

反正切形式跟踪微分器设计及相平面分析

董小萌¹, 张平²

(1. 中国空间技术研究院 研究发展部, 北京 100094; 2. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘要: 跟踪微分器可以从不连续或含有噪声的测量信号中提取连续滤波信号和微分信号. 本文从二阶跟踪微分器的加速度函数式入手, 提出一种反正切形式的跟踪微分器结构, 利用李雅普诺夫第二方法证明其具有全局一致渐近稳定性, 利用相平面分析方法研究, 说明原点是稳定结点或稳定焦点, 并给出跟踪微分器参数调节的定性规律和约束条件. 最后在含有噪声的方波输入下进行仿真, 结果表明反正切形式跟踪微分器可以兼顾跟踪快速性与过渡过程平稳性, 并且具有很好的滤波效果, 可以给出连续平滑的跟踪信号和微分信号, 而且待调节的参数较少, 具有工程实用价值.

关键词: 跟踪微分器; 李雅普诺夫第二方法; 相轨迹

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Design and phase plane analysis of an arctangent-based tracking differentiator

DONG Xiao-meng¹, ZHANG Ping²

(1. Research and Development Center, China Academy of Space Technology, Beijing 100094, China;

2. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Tracking differentiator(TD) can produce continuous tracking signal and its differential signal from discontinuous and noisy inputs. An arctangent-based TD is presented based on acceleration function analysis, and then its global uniformly asymptotical stability is proved using Lyapunov's direct method. Moreover, phase plane analysis is conducted to show that the origin (0, 0) is a stable nodal point or a stable focus point. By these results, we propose the parameter constraint conditions of the arctangent-based TD. The TD is simulated to track square wave input signals, giving three conclusions: first, the tracking output and its differential signals are smooth and continuous; second, the filter performance of the TD is satisfactory; third, the setting time of the response is short and the overshoot is small.

Key words: tracking differentiator; Lyapunov's direct method; phase trajectory

1 引言(Introduction)

跟踪微分器最早是由我国控制领域学者韩京清研究员等人于1994年提出的^[1], 它是自抗扰控制器^[2]的重要单元, 用于实际工程问题中从不连续或带随机噪声的测量信号中提取连续滤波信号及微分信号. 目前文献所见的几种形式的跟踪微分器中具有较好特性的主要有两大类, 一类是线性高阶跟踪微分器^[3~7], 另一类是以离散形式^[8]和加权幂函数形式^[9~11]为代表的非线性二阶跟踪微分器. 线性高阶跟踪微分器构成的高阶微分控制器在混沌等高度复杂非线性系统中取得满意的控制效果, 这种高阶微分器参数少, 便于利用线性系统的各种理论方法进行系统分析和设计, 是一种较为满意的高阶微分器. 但是对于常见的工业控制、导航制导系统等应

用场合, 采用信号及其微分量可以满足大部分控制需求, 另外纯线性系统仍然存在系统快速性与平稳性之间协调的问题, 因此研究较多的仍然是非线性二阶跟踪微分器. 由于二阶跟踪微分器的第二个方程是对输入信号的二次微分, 不妨称之为加速度函数式. 近年来一些理论分析和研究主要是针对跟踪微分器的加速度函数式的结构形式所进行的.

加速度函数的选取是构造跟踪微分器的关键, 线性形式和非线性形式的合理加权利用是这一问题的核心. 从仿真中发现, 线性特性可以避免颤振, 但难以平衡响应快速性与过渡过程平稳性之间的矛盾, 非线性特性可以取得这二者之间的平衡, 但有时容易发生颤振.

本文从跟踪微分器加速度函数入手, 分析加速度

函数的形式,提出一种基于反正切形式加速度函数的跟踪微分器,并通过相平面分析给出奇点类型与相轨迹分布情况,给出调参规律,最后对方波输入信号进行跟踪仿真。

2 跟踪微分器设计(Design of TD)

要想构造一种具有较好特性的跟踪微分器,就要适当选取加速度函数,使之兼有线性函数和非线性函数的特性。为了便于分析,应尽量避免采用分段函数、符号函数的使用。进一步分析发现,当误差较大时笔者希望系统具有非线性特性,近乎符号函数的特性,当误差较小时笔者希望系统具有线性特性,文献[10,11]就是基于这一考虑而采用线性函数和幂函数加权的加速度函数形式,取得了较为满意的结果。但是这两种跟踪微分器的可调参数较多,并且系统的跟踪特性和滤波特性对某些参数很敏感,对某些参数则很不敏感,调试时不具有较直观的目的性,不便于调参。这里给出一种基于反正切函数形式的加速度函数,由此构造出的跟踪微分器通过下面两个定理给出。

2.1 跟踪微分器结构与稳定性证明(TD structure and stability)

定理 1 对于系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = -a_1 \arctan[f_1 z_1(t)] - a_2 \arctan[f_2 z_2(t)]. \end{cases} \quad (1)$$

如果 a_1, a_2, f_1, f_2 均为正的常数,则系统在原点 $(0, 0)$ 渐进稳定。

除非特殊说明,以下讨论均略去各个状态量的时间自变量符号。

证 选取 $(0, 0)$ 邻域内的Lyapunov函数

$$V(z_1, z_2) = \int_0^{z_1} a_1 \arctan(f_1 \xi) d\xi + \frac{1}{2} z_2^2. \quad (2)$$

由于反正切函数是I, III象限内的奇函数,且 a_1, f_1 都是正的常数,因此当 $z_1 \neq 0$ 时保证 z_1 与 $\arctan(f_1 z_1)$ 同号,即 $z_1 \cdot [a_1 \arctan(f_1 z_1)] > 0$,根据定积分性质,得到

$$\int_0^{z_1} a_1 \arctan(f_1 \xi) d\xi > 0.$$

于是可得

$$V(z_1, z_2) > 0. \quad (3)$$

$V(z_1, z_2)$ 沿系统(1)的解对时间 t 的全导数为

$$\frac{dV(z_1, z_2)}{dt} = -a_2 z_2 \arctan(f_2 z_2). \quad (4)$$

由于反正切函数是I, III象限内的奇函数且 $a_2,$

f_2 都是正的常数,因此当 $z_2 \neq 0$ 时保证 z_2 与 $\arctan(f_2 z_2)$ 同号,即 $z_2 \cdot [a_2 \arctan(f_2 z_2)] > 0$,于是可得

$$\frac{dV(z_1, z_2)}{dt} \leq 0. \quad (5)$$

考察式(5)取等号的情况:在 $(0, 0)$ 邻域内满足式(5)取等号的点集为 $z_2 = 0$,即相平面内横轴上的点。对于系统(1),在相平面横轴上如果 $z_1 \neq 0$ 则 $\dot{z}_2 = -a_1 \arctan(f_1 z_1) \neq 0$, z_2 不会保持为零,即满足式(5)取等号的点集除了 $(0, 0)$ 之外不包含系统(1)的其它整轨线。

根据附录(巴尔巴欣-克拉索夫斯基定理),系统(1)在 $(0, 0)$ 渐进稳定。

进一步分析,

$$\begin{aligned} \text{当 } |z_1| \rightarrow +\infty \text{ 时, } & \int_0^{z_1} a_1 \arctan(f_1 \xi) d\xi \rightarrow +\infty; \\ \text{当 } |z_2| \rightarrow +\infty \text{ 时, } & \frac{1}{2} z_2^2 \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

根据附录(定理B),系统(1)的零解 $(0, 0)$ 是全局渐进稳定的。以上证明过程与时间变量无关,因此系统(1)的零解 $(0, 0)$ 是全局一致渐进稳定的。证毕。

定理 2 对于系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = R^2 \{-a_1 \arctan[f_1(x_1(t)-v(t))] - a_2 \arctan[f_2 x_2(t)/R]\}. \end{cases} \quad (6)$$

如果 a_1, a_2, f_1, f_2 均为正的常数,则对任意有界可积函数 $v(t)$ 和任意常数 $T > 0$,系统(6)的解 $x_1(t)$ 满足

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^T |x_1(t) - v(t)| dt = 0. \quad (7)$$

根据定理1和附录(定理C),易证定理2的结论成立。

2.2 反正切加速度函数(Arc tangent acceleration function)

定理2给出了一种反正切加速度函数的跟踪微分器,其加速度函数为

$$\dot{z}_2 = -a_1 \arctan(f_1 z_1) - a_2 \arctan(f_2 z_2). \quad (8)$$

其中加速度函数的参数有 a_1, a_2, f_1, f_2 共4个, a_1, f_1 分别用来对跟踪误差的反正切函数进行加权, a_2, f_2 分别用来对输入信号微分的反正切函数进行加权。之所以选择反正切函数作为加速度函数的主体,基于以下几点考虑。

1) 反正切函数是分布在I, III象限的奇函数,并且具有类似饱和函数的特性,当自变量绝对值较大时函数值趋于平缓并逐渐接近饱和,当自变量绝对值

逐渐变小时函数值逐渐接近线性变化. 这种由类似饱和函数特性的加速度函数构成的跟踪微分器具有较好的跟踪特性和微分特性.

2) 反正切函数是平滑连续渐变的, 没有分段、切换、突变等环节, 系统的响应更加平稳.

3) 对比离散形式跟踪微分器结构, 单一的反正切加速度函数构成的跟踪微分器在形式上更加简单直观, 在系统分析和综合过程中以及参数调整过程中都比较方便.

4) 对比加权幂函数形式跟踪微分器, 反正切加速度函数构成的跟踪微分器可调参数相对较少. 图1给出了反正切函数曲线与幅值参数 a 的关系, 增大幅值参数 a , 反正切曲线提高相应的幅值倍数. 图2给出了反正切曲线与参数 f 的关系, 增大参数 f , 反正切曲线的近似线性区间变小, 近似线性区间的斜率变大. 根据反正切函数与幅值参数 a 和参数 f 的关系, 可以定性调节反正切加速度函数的跟踪微分器参数.

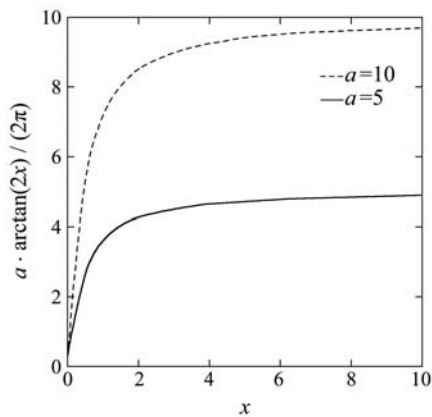


图1 反正切函数曲线与幅值参数 a 的关系

Fig. 1 Arc tangent curve vs. parameter a

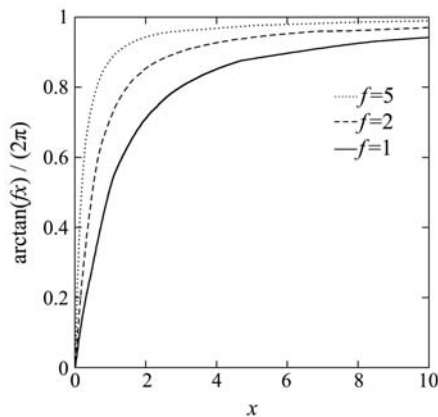


图2 反正切函数曲线与参数 f 的关系

Fig. 2 Arc tangent curve vs. parameter f

3 相平面分析(Phase plane analysis)

相平面方法是研究二阶非线性时不变控制系统的定性行为的重要工具, 下边利用相平面分析来

研究奇点类型和相轨迹形状, 从而找出加速度函数中4个参数对跟踪微分器的影响, 得到调参的定性规律.

考查系统(1), 令 $\begin{cases} \dot{z}_1 = 0 \\ \dot{z}_2 = 0 \end{cases}$, 得到系统唯一的奇点(0, 0), 即原点.

系统(1)在原点处的雅各比矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 f_1 & -a_2 f_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

则系统(1)可以写成线性近似系统与泰勒展开的高阶小量的组合, 即

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \Phi, \\ \dot{z}_2 = -a_1 f_1 z_1 - a_2 f_2 z_2 + \Psi. \end{cases} \quad (10)$$

其中 Φ, Ψ 分别是泰勒展开的高阶小量, 系统(1)对应的线性系统为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = -a_1 f_1 z_1 - a_2 f_2 z_2. \end{cases} \quad (11)$$

雅各比矩阵没有零特征值, 则原点是系统(1)的初等奇点. 显然雅各比矩阵的一切特征值都有非零实部, 原点是系统(1)的一个双曲奇点. 根据常微分方程知识可知, 对于非线性系统的双曲奇点, 可以用雅各比矩阵得到的线性近似系统对该奇点类型以及奇点邻域内的相轨迹分布进行分析^[12].

对于线性近似系统(11), 需要分情况讨论奇点的类型. A 的特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_2 f_2 \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (12)$$

其中

$$\Delta = (a_2 f_2)^2 - 4a_1 f_1. \quad (13)$$

当 $\Delta \geq 0$ 时, 即

$$a_2 f_2 \geq 2\sqrt{a_1 f_1}. \quad (14)$$

奇点(0, 0)是系统(11)的稳定结点, 对应的非线性系统(1)在原点也是稳定结点, 其相轨迹如图3所示. 图中相轨迹都不是螺旋趋近原点, 而是沿着相同的两个方向趋近原点, 这正是稳定退化结点的基本特征.

当 $\Delta < 0$, 即

$$a_2 f_2 < 2\sqrt{a_1 f_1}. \quad (15)$$

奇点(0, 0)是系统(11)的稳定焦点, 对应的非线性系统(1)在原点也是稳定焦点, 其相轨迹如图4所示.

由于结点邻域内相轨迹沿着某些固定方向趋于奇点, 而焦点邻域内相轨迹是螺旋渐进趋近奇点, 因

此结点对应的系统的收敛是直接的,并且过渡过程震荡较小,在系统综合时应该使奇点是结点,即满足式(14)条件.

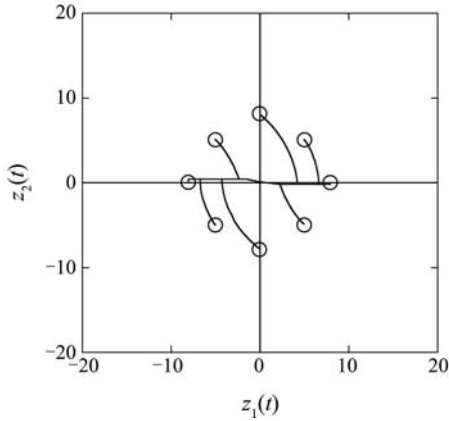


图3 结点型奇点的相轨迹

Fig. 3 Orbit of stable nodal point

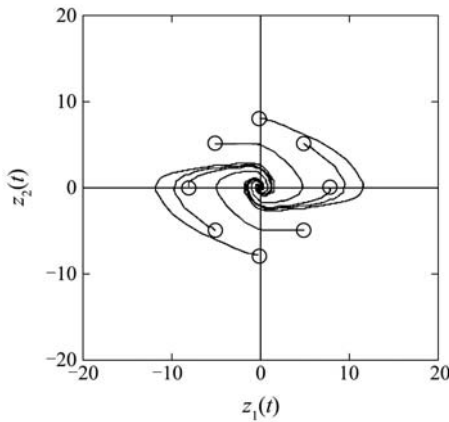


图4 焦点型奇点的相轨迹

Fig. 4 Orbit of stable focus point

4 关于参数的说明(Parameter explanation)

从前边的分析可知,系统(6)中含有5个参数: R, a_1, f_1, a_2, f_2 ,其中 R 与跟踪效果有关,增大会提高跟踪快速性,但过大会增加微分信号高频噪声; a_1 与跟踪效果相关,它的效果与 R 类似; a_2 与微分效果有关,增大对抑制微分噪声有利,但过大会使跟踪变慢; f_1 与跟踪效果有关,增大会提高跟踪快速性,它的作用虽然与 a_1 类似,但它的作用是通过改变反正切曲线的线性区与饱和区的过渡点实现的,一般选定 $f_1 \in [2, 5]$ 即可,再通过选择 a_1 来改变跟踪效果; f_2 与微分效果有关,它的作用与 a_2 类似,但也是通过改变反正切曲线的线性区与饱和区的过渡点实现的,一般选定 $f_2 \in [2, 5]$,再选择 a_2 .这里参数之间存在一定的冗余,一般可以首先大致选定 f_1, f_2 ,然后选定 R 调节跟踪效果,最后通过微调 a_1, a_2 来调节跟踪和微分的综合效果,需要重点调节的主要是 a_1, a_2 ,并兼顾式(14)的条件.

5 仿真实例(Simulation)

利用定理2给出的跟踪微分器系统(6),取参数 $R = 20, a_1 = 5, a_2 = 4, f_1 = 2, f_2 = 2$,输入取单位幅值且含10%幅值白噪声、频率为1 Hz的方波信号(如图5),仿真计算步长为1 ms,预测提前10步,仿真结果如图6和图7所示.

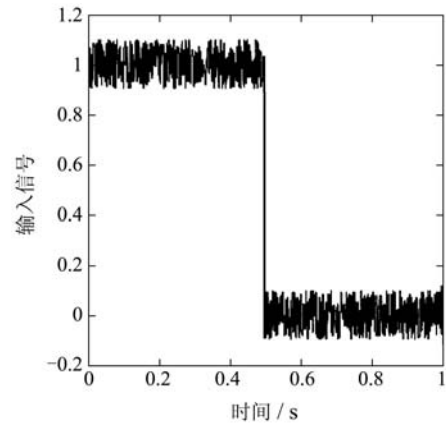


图5 方波输入信号

Fig. 5 Square wave input signal

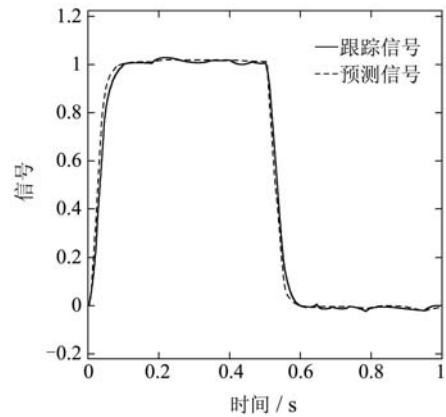


图6 跟踪和预测曲线

Fig. 6 Tracking and forecast curve

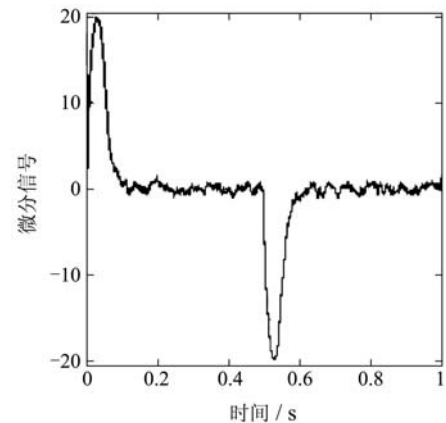


图7 微分曲线

Fig. 7 Differential curve

由图6和图7可见,跟踪输出信号的调节时间80 ms(5%误差带),无超调;十步预测输出信号的调节时间60 ms(5%误差带),无超调。

从跟踪信号的滤波品质、跟踪输出的快速性和过渡过程的平稳性、微分输出信号品质、预测信号的平稳性等综合来看,本文提出的跟踪微分器具有较好的综合品质。

6 结论(Conclusion)

本文提出一种基于反正切加速度函数的跟踪微分器结构,它具有全局一致渐进稳定性,通过适当选择参数可以保证其奇点是稳定结点。反正切加速度函数具有近似饱和函数的特性,结构简单,含有较少的参数,调参方便。这种结构的跟踪微分器兼顾了跟踪信号的快速性和过渡过程平稳性,滤波性能良好,预测信号平稳,具有很好的工程应用价值。

参考文献(References):

- [1] 韩京清, 王伟. 非线性跟踪-微分器[J]. 系统科学与数学, 1994, 14(2): 177 - 183.
(HAN Jingqing, WANG Wei. Nonlinear tracking-differentiator[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 1994, 14(2): 177 - 183.)
- [2] 韩京清. 自抗扰控制技术[J]. 前沿科学, 2007, (1): 24 - 31.
(HAN Jingqing. Auto disturbances rejection control technique[J]. *Frontier Science*, 2007, (1): 24 - 31.)
- [3] 齐国元, 薛薇, 陈增强, 等. 稳定性的高阶跟踪-微分器设计及其应用[J]. 控制与决策, 2002, 17(增2): 98 - 104.
(QI Guoyuan, XUE Wei, CHEN Zengqiang, et al. Stable high order tracking-differentiator design and its application[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(Suppl.2): 98 - 104.)
- [4] 齐国元, 陈增强, 袁著祉. 非线性系统高阶微分反馈控制[J]. 中国工程科学, 2003, 5(8): 35 - 44, 63.
(QI Guoyuan, CHEN Zengqiang, YUAN Zhuzhi. High order differential feedback control of nonlinear systems[J]. *Engineering Science*, 2003, 5(8): 35 - 44, 63.)
- [5] 齐国元, 陈增强, 袁著祉. 倒立摆系统自适应高阶微分反馈控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 676 - 683.
(QI G Y, CHEN Z Q, YUAN Z Z. Adaptive high order differential feedback control for inverted pendulum system[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(5): 676 - 683.)
- [6] QI G Y, CHEN Z Q, YUAN Z Z. Model-free control of affine chaotic systems[J]. *Physics Letters A*, 2005, 344: 189 - 202.
- [7] QI G Y, CHEN Z Q, YUAN Z Z. Adaptive high order differential feedback control for affine nonlinear system[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 37: 308 - 315.
- [8] 韩京清, 袁露林. 跟踪-微分器的离散形式[J]. 系统科学与数学, 1999, 19(3): 268 - 273.
(HAN Jingqing, YUAN Lulin. The discrete form of tracking-differentiator[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 1999, 19(3): 268 - 273.)
- [9] 王新华, 陈增强, 袁著祉. 非线性跟踪-微分器的性能分析及其改进[J]. 控制与决策, 2002, 17(增1): 752 - 754.
(WANG Xinhua, CHEN Zengqiang, YUAN Zhuzhi. Analyse and improvement for nonlieaar tracking-differentiator[J]. *Control and Decision*, 2003, 17(Suppl): 752 - 754.)
- [10] 王新华, 陈增强, 袁著祉. 全程快速非线性跟踪-微分器[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(6): 875 - 878.
(WANG Xinhua, CHEN Zengqiang, YUAN Zhuzhi. Nonlinear tracking-differentiator with high speed in whole course[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 875 - 878.)
- [11] 史永丽, 侯朝桢. 改进的非线性跟踪微分器设计[J]. 控制与决策, 2008, 23(6): 647 - 650.
(SHI Yongli, HOU Chaozhen. Design of improved nonlinear tracking differentiator[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(6): 647 - 650.)
- [12] 陆启韶. 常微分方程的定性方法和分叉[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2002: 182 - 230.
(LU Qishao. *Qualitative Methods and Bifurcations for Ordinary Differential Equations*[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2002: 182 - 230.)

附录 定理(Appendix Theorem)

定理 A 巴尔巴欣-克拉索夫斯基定理^[12]

对于时不变系统

$$\dot{x} = f(x), x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (a)$$

设 Ω 为原点的邻域,如果在 Ω 内:

- 1) 存在一个正定(负定)函数 $V(x)$;
- 2) $V(x)$ 沿系统(a)的解对时间 t 的全导数是常负(常正)的;
- 3) 在原点的充分小邻域内,满足 $dV/dt = 0$ 的点集除原点外,不包含系统(a)的其它整轨线。

则系统(a)的零解是渐进稳定的。

定理 B^[12] 对于时不变系统

$$\dot{x} = f(x), x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad (b)$$

如果在 \mathbb{R}^n 中:

- 1) 存在一个无穷大正定(负定)函数 $V(x)$;
- 2) $V(x)$ 沿系统(b)的解对时间 t 的全导数在全相空间中是常负(常正)的;
- 3) 满足 $\frac{dV}{dt} = 0$ 的点集除原点外,不包含系统(b)的其它整轨线。

则系统(b)的零解是全局渐进稳定的。

定理 C^[1] 若系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = f(z_1, z_2), \end{cases} \quad (c)$$

的任意解均满足: $z_1(t) \rightarrow 0, z_2(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$, 则对任意有界可积函数 $v(t)$ 和任意常数 $T > 0$, 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = R^2 f(x_1 - v, x_2/R) \end{cases} \quad (d)$$

的解 $x_1(t)$ 满足

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^T |x_1(t) - v(t)| dt = 0.$$

作者简介:

董小萌 (1978—), 男, 博士, 目前研究方向为导航、制导与控制,

E-mail: dxm@asec.buaa.edu.cn;

张平 (1950—), 女, 教授, 博士生导师, 研究领域为现代飞行控制与仿真、计算机控制理论与应用、容错控制、故障检测与诊断、机器视觉与图形图像模式识别、虚拟样机等, E-mail: zhp@buaa.edu.cn.