

基于受控拉格朗日函数的垂直起降飞机控制器设计

李茂青

(北京航空航天大学 第七研究室, 北京 100191)

摘要: 本文将单欠驱动力学系统基于受控拉格朗日函数(CL)的控制器设计技术应用到具有输入耦合的垂直起降(PVTOL)飞机的控制问题中. 在显式陀螺力的匹配条件下, 得到的光滑反馈控制律保证了系统几乎全局渐近稳定. 与现有同类方法所得到的结果相比, 该匹配控制器形式更简单而收敛性能得到保持.

关键词: 欠驱动力学系统; 受控拉格朗日函数; 匹配条件; 陀螺力; 垂直起降飞机

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Control design for planar vertical takeoff-and-landing aircraft based on controlled Lagrangians

LI Mao-qing

(The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The controller design technique based on controlled Lagrangians(CL) for the mechanical systems with underactuation degree one is applied to control a planar vertical takeoff-and-landing (PVTOL) aircraft system with input coupling. Under the matching condition between the explicit gyroscopic forces, we develop a smooth feedback control law which ensures almost globally asymptotic stabilization for the system. Compared with the results obtained with existing similar methods, this matching controller is simpler in construction while retaining the same convergence performance.

Key words: underactuated mechanical systems; controlled Lagrangians; matching condition; gyroscopic forces; PVTOL aircraft

1 绪论(Introduction)

大部分非线性的控制方法试图作某些线性化的努力. 近些年, 对于力学系统的控制问题, 新出现了一种与线性化无关的方法, 也就是基于能量的构造性的控制器设计技术——受控拉格朗日函数(CL)法. 它的主要步骤如下: 首先构造期望的受控能量, 再根据其时间导数来构造广义力(如陀螺力、耗散力). 接着由受控拉格朗日函数和广义力导出Euler-Langrange方程, 即受控方程. 通过求解使系统受控方程与原始方程相匹配的条件, 可确定控制器形式. 进一步利用附加的受控能量正定条件还可得到控制器的参数范围. 由此看出控制器设计过程得到简化. 另一方面, 利用正定受控能量来作为候选Lyapunov函数会给稳定性分析带来较大方便.

文献[1~3]提出了CL法, 通过修改能量来镇定驱动变量为对称群变量的欠驱动力学系统, 并解决了小车 n 级倒立摆的镇定问题. 文献[4]利用黎曼度量构造受控动能, 使CL法不局限于动能具有对称性的力学系统. 由于得到的匹配条件用 λ 方程表示, 被称

为 λ 方法. 文献[5]进一步改进了 λ 方法, 得到了用 ν 方程表示的更加简单的匹配条件. 文献[6]通过引入陀螺力(科氏力), 扩展了文献[4]提出的 λ 方法, 实现了Furuta摆的渐近镇定. 文献[7]开始以Hamiltonian形式研究力学系统控制问题, 该形式的势能修改、动能修改、泊松结构修改技术先后被引入. 文献[8,9]将应用这些技术的方法称为基于无源性的互联和阻尼配置(interconnection and damping assignment passivity based control)方法, 简称IDA-PBC方法. 文献[9]将IDA-PBC方法应用到惯性轮摆和球棒系统的镇定问题. 对具有一个欠驱动动能循环变量的力学系统, 文献[10]得到了匹配条件中偏微分方程(PDEs)的一组显式解, 并以垂直起降(PVTOL)飞机和小车摆为例作了说明. 文献[6,11]探讨了CL法和IDA-PBC方法之间的等价关系.

对于输入耦合的 n 自由度单欠驱动力学系统, 文献[10]所得的匹配条件可表示为不依赖于广义速度的两组级联的PDEs. 其中: 第1组动能方程(K 方程)包括 $n(n+1)/2 (= C_{n+1}^2)$ 个含有受控动能项和

陀螺力项的方程, 而第2组中只含一个势能方程(P 方程). 文献[12]利用陀螺力的性质, 先得到了一个新的与陀螺力无关的 K 方程, 然后用其它的 K 方程确定出了陀螺力. 从而, 新得到的匹配的充分条件具有显式陀螺力. 因此与文献[10]相比, 由于待求解PDE数从 C_{n+1}^2 减少为只有2个, 大大简化了匹配条件的求解.

欠驱动和输入耦合给PVTOL飞机的控制问题带来不小的困难. 本文将文献[12]中的基于CL的单欠驱动度力学系统控制器设计技术应用到该例子. 从与陀螺力无关的 K 方程, 得到了其形式更简单或更一般的解, 验证了具有显式陀螺力的匹配条件的优点. 而导出的光滑反馈控制律仍实现了系统几乎全局渐近镇定. 与文献[10]所得到的结果相比, 该匹配控制器形式更简单而收敛性能得到保持.

2 基于受控拉格朗日函数的单欠驱动度力学系统控制器设计(Controller design for mechanical systems with underactuation degree one based on CL)

为方便起见, 在本节对文献[12]中的基于CL的单欠驱动度力学系统控制器设计过程作了简要回顾. 为书写方便, 将函数和函数矩阵首次出现时标明其自变量, 以后多省略. 在此 $l, m, n \in \mathbb{N}$. \mathbb{N}_n 表示前 n 个自然数. 对于 $i \in \mathbb{N}_n$, 定义集合 $\mathbb{N}_i = \{1, \dots, i\}$ 和 $\mathbb{N}_i^c = \mathbb{N}_n - \{i\} = \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. 用 $x(\mathbf{q})$ 表示向量 $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ 的函数, Y_i 表示函数向量 $Y(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 第 i 个分量, 其中 $i \in \mathbb{N}_m$. $Z_{j\circ}$ 和 $Z_{\circ k}$ 分别表示函数矩阵 $Z(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{l \times m}$ 的第 j 个行向量和第 k 个列向量, 其中 $j \in \mathbb{N}_l, k \in \mathbb{N}_m$. 并定义下列符号:

$$x_{,i} = \frac{\partial x(\mathbf{q})}{\partial q_i}, Z_{,i} = \begin{bmatrix} Z_{11,i} & \cdots & Z_{1m,i} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{l1,i} & \cdots & Z_{lm,i} \end{bmatrix},$$

$$\partial_{\mathbf{q}} x = \begin{bmatrix} x_{,1} \\ \vdots \\ x_{,n} \end{bmatrix}, \partial_{\mathbf{q}^T} Y = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{m,1} & \cdots & Y_{m,n} \end{bmatrix}.$$

此外, I 代表 n 阶单位矩阵. 对于 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $i, j \in \mathbb{N}_n$, 记 $A_{ij} I_{\circ i} I_{j\circ} \triangleq A_{[ij]}$ 和 $A - A_{[ij]} \triangleq A_{[-ij]}$. 另记 $\sin \theta \triangleq s_\theta, \cos \theta \triangleq c_\theta, \sin(2\theta) \triangleq s_{2\theta}$ 和 $\cos(2\theta) \triangleq c_{2\theta}$.

对输入耦合的 n 自由度单欠驱动度力学系统, 令 $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ 表示其广义坐标, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T$ 表示其广义速度. 系统原始输入 $\mathbf{u} = O(\mathbf{q})\mathbf{v}$, 其中 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$, 输入耦合矩阵 $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$ 满秩. 系统原始动能 $E_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$, 其中 $M :$

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, M = M^T > 0$, 原始势能 $E_p(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. 则其原始拉格朗日函数 $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}} - E_p$. 系统原始方程, 即由 L 和 \mathbf{u} 导出的Euler-Langrange方程为

$$\mathbf{u} = M\ddot{\mathbf{q}} + \partial_{\mathbf{q}^T}(M\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}}) + \partial_{\mathbf{q}}E_p. \quad (1)$$

系统的允许输入须满足 $(O^\perp)^T \mathbf{u} = 0$, 其中

$$(O^\perp)^T O = 0.$$

2.1 构造受控能量和广义力(Construction of controlled energy and generalized forces)

取系统受控动能 $\bar{E}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \bar{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$, 其中 $\bar{M} = MK^{-1}(\mathbf{q})M, K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, K = K^T. |K| \neq 0$ 为矩阵 K 的正则(可逆)条件. 另受控势能 $\bar{E}_p(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 则系统的受控拉格朗日函数 $\bar{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 和受控能量 $\bar{E}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 分别为

$$\bar{L} = \bar{E}_k - \bar{E}_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \bar{M} \dot{\mathbf{q}} - \bar{E}_p \quad (2)$$

和

$$\bar{E} = \bar{E}_k + \bar{E}_p = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \bar{M} \dot{\mathbf{q}} + \bar{E}_p = \dot{\mathbf{q}}^T \partial_{\dot{\mathbf{q}}} \bar{L} - \bar{L}. \quad (3)$$

系统受控方程, 即根据 \bar{L} 和广义力 $\bar{\mathbf{u}}$ 确定的Euler-Langrange方程为

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{M}\ddot{\mathbf{q}} + \partial_{\mathbf{q}^T}(\bar{M}\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}^T \bar{M} \dot{\mathbf{q}}) + \partial_{\mathbf{q}}\bar{E}_p. \quad (4)$$

利用式(3)和式(4), 得 \bar{E} 对时间的导数:

$$\dot{\bar{E}} = \frac{d}{dt} [\dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \bar{L}] = \dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \mathbf{q}} \right] = \dot{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{u}}. \quad (5)$$

令陀螺力 $\bar{\mathbf{u}}^{\text{cons}} = G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$, 其中 $G = -G^T = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} I_{\circ i} G_{i\circ} = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} I_{\circ i} \dot{\mathbf{q}}^T g^{i\circ}(\mathbf{q})$, 且矩阵 $g^{i\circ}$ 的第 k 行第 j 列的元素为 $g_k^{ij}(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. 注意到 $g_k^{ij} = -g_k^{ji}$, 那么, 矩阵 G 的元素总共包含 $n^2(n-1)/2 (= nC_n^2)$ 个独立的非零分量函数. 令 Rayleigh 耗散力 $\bar{\mathbf{u}}^{\text{diss}} = -D(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$, 其中 $D = D^T \geq 0$. 若广义力 $\bar{\mathbf{u}}$ 取为 $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}^{\text{cons}} + \bar{\mathbf{u}}^{\text{diss}}$, 根据式(5)有

$$\dot{\bar{E}} = \dot{\mathbf{q}}^T (G - D) \dot{\mathbf{q}} \leq 0, \quad (6)$$

即受控能量是衰减的.

给式(4)两端同时左乘 $M\bar{M}^{-1} = KM^{-1} \triangleq N(\mathbf{q})$ 得

$$N\bar{\mathbf{u}} = M\ddot{\mathbf{q}} + N[\partial_{\mathbf{q}^T}(\bar{M}\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}^T \bar{M} \dot{\mathbf{q}}) + \partial_{\mathbf{q}}\bar{E}_p]. \quad (7)$$

使由式(1)和式(7)所解出加速度项相等, 得到原始输入 \mathbf{u} 和广义力 $\bar{\mathbf{u}}$ 的如下关系:

$$\mathbf{u} = \partial_{\mathbf{q}^T}(M\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}}) + \partial_{\mathbf{q}}E_p - N\partial_{\mathbf{q}}\bar{E}_p -$$

$$N[\partial_{\mathbf{q}^T}(\bar{M}\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}^T\bar{M}\dot{\mathbf{q}})] + N\bar{\mathbf{u}}. \quad (8)$$

将反对称阵 $G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 取为

$$G = \bar{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \hat{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (9)$$

其中:

$$\bar{G} = \sum_{i=1}^n \{ \partial_{\mathbf{q}^T}(\bar{M}M^{-1})_{oi} - [\partial_{\mathbf{q}^T}(\bar{M}M^{-1})_{oi}]^T \} M_{io}\dot{\mathbf{q}},$$

且矩阵 \hat{G} , $\hat{g}^{io}(\mathbf{q})$, $\hat{g}_k^{ij}(\mathbf{q})$ 具有和前面 G 等类似的定义.

根据式(8)和文献[12]中的式(15), 原始输入 \mathbf{u} 和广义力 $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}^{\text{cons}} + \bar{\mathbf{u}}^{\text{diss}}$ 的关系可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & -\frac{1}{2}\partial_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}N \sum_{i \in \mathbb{N}_n} I_{oi}\dot{\mathbf{q}}^T [T^{(i)}(\mathbf{q}) - \\ & 2\hat{g}^{io}] \dot{\mathbf{q}} - ND\dot{\mathbf{q}} + \partial_{\mathbf{q}}E_p - N\partial_{\mathbf{q}}\bar{E}_p, \end{aligned} \quad (10)$$

其中: $T^{(i)} = M(K^{-1})_{,i}M$, $i \in \mathbb{N}_n$.

2.2 确定匹配条件(Determination of matching condition)

如果由式(8)所得输入是允许的, 则认为受控方程(4)与原始方程(1)相匹配.

定义 n 维行向量 \bar{O} 和 \bar{N} 为

$$\bar{O} \in (O^+)^T, \quad \bar{N} = \bar{O}N. \quad (11)$$

\bar{O}_i, \bar{N}_i 是行向量 \bar{O}, \bar{N} 的第 i 个分量. 则由 \bar{O} 左乘式(10)并恒取零可确定匹配条件:

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{1}{2}\bar{O}\partial_{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{q}}^T M \dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\bar{N} \sum_{i=1}^n I_{oi}\dot{\mathbf{q}}^T [T^{(i)} - 2\hat{g}^{io}] \dot{\mathbf{q}} - \\ & \bar{N}D\dot{\mathbf{q}} + \bar{O}\partial_{\mathbf{q}}E_p - \bar{N}\partial_{\mathbf{q}}\bar{E}_p. \end{aligned} \quad (12)$$

根据正则条件和矩阵 N 的定义, 至少存在一个 $\alpha \in \mathbb{N}_n$, 使 $\bar{N}_\alpha \neq 0$. 类似于文献[10], 引入函数向量 $\Gamma^T(\mathbf{q}) = -\frac{\bar{N}}{\bar{N}_\alpha}$, 其中 $\Gamma^T = [\Gamma_1, \dots, \Gamma_n]$ 且 $\Gamma_\alpha = -1$. 下面引入矩阵变换 $\hat{g}^{+i} = \hat{g}^{io} + (\hat{g}^{io})^T$ 和 $\hat{g}^{-i} = \hat{g}^{io} - (\hat{g}^{io})^T$.

将从式(10)导出且由文献[12]中的定理3.3和命题3.4构成的匹配条件合起来列在下面:

对于输入耦合的单欠驱动度力学系统, 一个匹配的充分条件包括新的 K 方程(13), 与其级联的 P 方程(14), 正则条件, 由式(9)和式(15)确定显式的陀螺力, 以及由式(16)确定的耗散力:

$$\begin{cases} \bar{O}[\sum_{i \in \mathbb{N}_n} \bar{N}_i K_{,i}] \bar{O}^T = \bar{N}[\sum_{i \in \mathbb{N}_n} \bar{O}_i M_{,i}] \bar{N}^T, \\ |K| \neq 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\bar{N}\partial_{\mathbf{q}}\bar{E}_p = \bar{O}\partial_{\mathbf{q}}E_p, \quad (14)$$

$$\hat{g}^{+\alpha} = U^{(1)} + U^{(2)} - \frac{1}{2}[I_{\alpha\alpha}\Gamma^T U^T - U\Gamma I_{\alpha\alpha}], \quad (15)$$

$$D = \bar{\Gamma}^T \bar{D}(\mathbf{q}) \bar{\Gamma}, \quad (16)$$

其中:

$$U = I_{[-\alpha\alpha]}U^{(1)}I_{[-\alpha\alpha]} + U^{(2)} + U^{(-\alpha)},$$

$$U^{(1)} = \sum_{i \in \mathbb{N}_n} \left(\frac{\bar{O}_i}{\bar{N}_\alpha} M_{[-\alpha\alpha],i} - \Gamma_i T_{[-\alpha\alpha]}^{(i)} \right),$$

$$U^{(2)} = I_{[-\alpha\alpha]} \sum_{i \in \mathbb{N}_\alpha} \Gamma_i \hat{g}^{+i} I_{[-\alpha\alpha]},$$

$$U^{(-\alpha)} = I_{[-\alpha\alpha]}(\hat{g}^{-\alpha} + 2\hat{g}_\alpha)I_{[-\alpha\alpha]},$$

$$\bar{D}^T = \bar{D} \geq 0, \quad \bar{\Gamma}^T = I + I_{\alpha\alpha}\Gamma^T,$$

矩阵 \hat{g}_α 第 i 行第 j 列的元素为 \hat{g}_α^{ij} . 注意到, $\text{rank } D \leq n - 1$.

注 1 当 $n=2$, $nC_n^2 = C_{n+1}^2 - 1$, 则该条件为充要的.

2.3 确定匹配控制器(Determination of matching controller)

通过求解具体系统的匹配条件, 可得到 K, \bar{E}_p, G (或 $\hat{g}^{+\alpha}$)和 D . 下面将矩阵 $\hat{g}^{+\alpha}$ 代入匹配控制律, 不再要求其值.

记

$$(O^T O)^{-1} O^T \triangleq \hat{O}, \quad \hat{O}N \triangleq \hat{N}. \quad (17)$$

用 \hat{O} 左乘式(10), 并将式(15)代入得到输入耦合的单欠驱动度力学系统的匹配控制律:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & -\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{N}_n} (\hat{O}_{oi}\dot{\mathbf{q}}^T M_{,i} + \hat{N}_{oi}\dot{\mathbf{q}}^T T^{(i)}) \dot{\mathbf{q}} + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{N}_\alpha} \hat{N}_{oi}\dot{\mathbf{q}}^T I_{[-\alpha\alpha]} \hat{g}^{+i} I_{[-\alpha\alpha]} \dot{\mathbf{q}} + \\ & \frac{1}{2} \hat{N}_{\alpha\alpha}\dot{\mathbf{q}}^T (U^{(1)} + U^{(2)}) \dot{\mathbf{q}} - \\ & \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha (\hat{N} + \hat{N}_{\alpha\alpha}\Gamma^T) U^T \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha^2 \hat{N} (2U_{\alpha\alpha}^{(1)} - U\Gamma) - \\ & \hat{N}\bar{\Gamma}^T \bar{D}\bar{\Gamma}\dot{\mathbf{q}} + \hat{O}\partial_{\mathbf{q}}E_p - \hat{N}\partial_{\mathbf{q}}\bar{E}_p. \end{aligned} \quad (18)$$

为使受控能量在期望的平衡点 $(\mathbf{q}_e^T, \mathbf{0}^T)$ 取得极小值且在其附近保持正定, 附加正定条件:

存在常数 $\delta > 0$, 使

$$\begin{cases} K > 0, & \text{当} \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_e\| < \delta \text{时}; \\ \bar{E}_p(\mathbf{q}) > \bar{E}_p(\mathbf{q}_e) = 0, & \text{当} 0 < \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_e\| < \delta \text{时}. \end{cases}$$

本节末尾, 给出控制器设计步骤. 为方便起见, 受控方程和正定条件被一起求解.

1) 求解 K 方程和 P 方程以及关于受控动能和受控势能的正定条件, 可得到正定的满足匹配条件的矩阵 K 和函数 \bar{E}_p .

2) 利用 K, \bar{E}_p , 选择矩阵 D 求出匹配控制律.

3) 取 Lyapunov 函数 V 为前面得到的正定的受控能量 \bar{E} , 则由式(6)知匹配的控制律 \mathbf{v} 可使闭环系统在平衡点 $(\mathbf{q}_e^T, \mathbf{0}^T)$ 稳定. 结合具体的系统方程可分析渐近稳定性.

3 基于 CL 的控制器设计在垂直起降飞机中的应用 (Application of controller design based on CL to the PVTOL aircraft)

同文献[10], 图1所示 PVTOL 飞机的简化动力学模型(原始方程)如下:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_\theta & \varepsilon c_\theta \\ c_\theta & \varepsilon s_\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

期望的平衡点是 $(\mathbf{q}_d^T, \dot{\mathbf{q}}_d^T) = (x_d, y_d, 0, 0, 0, 0)$.

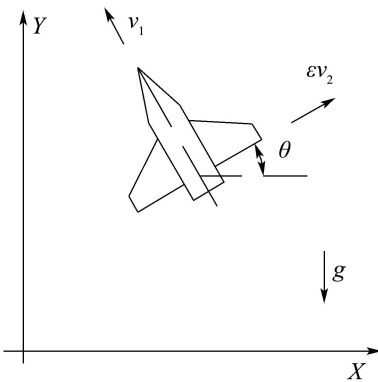


图 1 垂直起降飞机
Fig. 1 PVTOL aircraft

3.1 求解匹配条件 (Solution of matching condition)

根据式(11)(17)和(19), 易知

$$\begin{bmatrix} \bar{O} \\ \hat{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta & -\varepsilon \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \\ \frac{\varepsilon c_\theta}{1+\varepsilon^2} & \frac{\varepsilon s_\theta}{1+\varepsilon^2} & \frac{1}{1+\varepsilon^2} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

且有

$$N = KM^{-1} = K, \quad \bar{N} = \bar{O}K, \quad \hat{N} = \hat{O}K. \quad (21)$$

进一步, 由式(13)和式(14)得到 K 方程和 P 方程:

$$\bar{O} \left[\sum_{i=1}^3 \bar{N}_i K_{\cdot i} \right] \bar{O}^T = 0, \quad (22)$$

$$\bar{N}_1 \bar{E}_{p,1} + \bar{N}_2 \bar{E}_{p,2} + \bar{N}_3 \bar{E}_{p,3} = g s_\theta. \quad (23)$$

当 \bar{N}_3 取不等于 0 的常数 n_2 , 可得到式(23)的一个特解

$$\bar{E}_p = \frac{g}{n_2} (1 - c_\theta). \quad (24)$$

由 $\bar{N}_3 = K_{13}c_\theta + K_{23}s_\theta - \varepsilon K_{33}$, 取 $K_{13} = k_2c_\theta$, $K_{23} = k_2s_\theta$, $K_{33} = k_3$, 则 $n_2 = k_2 - \varepsilon k_3$.

根据下式:

$$\bar{O} \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{13,3} \\ 0 & 0 & K_{23,3} \\ K_{13,3} & K_{23,3} & K_{33,3} \end{bmatrix} \bar{O}^T =$$

$$\bar{O} k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_\theta \\ 0 & 0 & c_\theta \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \end{bmatrix} \bar{O}^T = 0,$$

如下矩阵 K 为满足 K 方程(22)的解:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_5 & k_2c_\theta \\ k_5 & k_4 & k_2s_\theta \\ k_2c_\theta & k_2s_\theta & k_3 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

注 2 对完全相同的例子, 文献[10]的解为

$$M_d = \begin{bmatrix} k_1 + \varepsilon k_2 c_\theta^2 & \frac{1}{2} \varepsilon k_2 s_{2\theta} & k_2 c_\theta \\ \frac{1}{2} \varepsilon k_2 s_{2\theta} & k_1 - \varepsilon k_2 c_\theta^2 & k_2 s_\theta \\ k_2 c_\theta & k_2 s_\theta & k_3 \end{bmatrix}.$$

与该解相比, 式(25)的元素 K_{13}, K_{23}, K_{33} 与其相同, 其余元素 K_{11}, K_{12}, K_{22} 简化为常数项. 而文献[10]认为不能得到元素 K_{11}, K_{12}, K_{22} 为常数项的解.

进一步可验证, 下列更一般形式的矩阵

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_6 c_\theta^2 & k_5 + \frac{k_6}{2} s_{2\theta} & k_2 c_\theta \\ k_5 + \frac{k_6}{2} s_{2\theta} & k_4 - k_6 c_\theta^2 & k_2 s_\theta \\ k_2 c_\theta & k_2 s_\theta & k_3 \end{bmatrix}$$

也满足 K 方程(22). 当取 $k_4 = k_1, k_5 = 0, k_6 = \varepsilon k_2$, 该解退化为文献[10]的解.

后面采用式(25)的解作为匹配条件的解. 为方便起见, 取 $k_4 = k_1$ 和 $k_5 = 0$. 可得到 $|K| = k_1 k_7$, 其中 $k_7 = k_1 k_3 - k_2^2$. 易知 $K > 0$ 的一个充分条件:

$$k_1 > 0, \quad k_3 > 0, \quad k_7 = k_1 k_3 - k_2^2 > 0.$$

根据式(21)和式(25), 计算得

$$\begin{bmatrix} \bar{N} \\ \hat{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 c_\theta & n_1 s_\theta & n_2 \\ -k_1 s_\theta & k_1 c_\theta & 0 \\ \frac{\varepsilon k_1 + k_2}{1 + \varepsilon^2} c_\theta & \frac{\varepsilon k_1 + k_2}{1 + \varepsilon^2} s_\theta & \frac{\varepsilon k_2 + k_3}{1 + \varepsilon^2} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

其中 $n_1 = k_1 - \varepsilon k_2$. 取 $\alpha = 3$, 可得 $\Gamma^T = [\gamma_1 c_\theta, \gamma_1 s_\theta, -1]$, 其中 $\gamma_1 = -n_1/n_2$. 进而利用前面所得到的特解(24), 可得式(23)的如下通解:

$$\bar{E}_p(\mathbf{q}) = \Omega(x - x_d + \int_0^\theta \Gamma_1(\delta) d\delta, y - y_d + \int_0^\theta \Gamma_2(\delta) d\delta) + \frac{g}{n_2} (1 - c_\theta),$$

其中 Ω 是其自变量的任意可微函数. 一般取其为正定阵 P 的二次型, 这里取 P 为对角阵 $\text{diag}\{p_1, p_2\}$. 则

$$\bar{E}_p(\mathbf{q}) = \frac{g}{n_2}(1 - c_\theta) + \frac{1}{2}p_1(x - x_d + \gamma_1 s_\theta)^2 + \frac{1}{2}p_2[y - y_d - \gamma_1(c_\theta - 1)]^2. \quad (27)$$

计算得受控势能 $\bar{E}_p(\mathbf{q})$ 的Hessian矩阵为

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_p}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}^T} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & p_1 \gamma_1 c_\theta \\ 0 & p_2 & p_2 \gamma_1 s_\theta \\ p_1 \gamma_1 c_\theta & p_2 \gamma_1 s_\theta & \bar{E}_{p,\theta,\theta} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{E}_{p,\theta,\theta} = & g c_\theta / n_2 + p_1 \gamma_1 [-(x - x_d) s_\theta + \gamma_1 c_{2\theta}] + \\ & p_2 \gamma_1 [(y - y_d) c_\theta - \gamma_1 (c_{2\theta} - c_\theta)]. \end{aligned}$$

易得平衡点 $(x_d, y_d, 0, 0, 0, 0)$ 为受控势能的极小点, 且极值条件为

$$p_1 > 0, p_2 > 0, n_2 = k_2 - \varepsilon k_3 > 0.$$

这也是 $\bar{E}_p(\mathbf{q}) > 0$ 的充分条件.

还可判断出, 在区域 $\mathbb{R}^2 \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}^3$ 中的其余平衡点 $(x_d, y_d, \pm\pi, 0, 0, 0)$ 不是极值点.

3.2 确定匹配控制器和稳定性分析(Determination of matching controller and stability analysis)

由 $K_{,j} = \mathbf{0}$, 得 $T^j = \mathbf{0}$, 其中 $j \in \mathbb{N}_2$. 另对 $i \in \mathbb{N}_3$, $M_{,i} = \mathbf{0}$. 将它们代入式(18)得到

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & -\frac{1}{2} \dot{q}_3^2 T_{33}^{(3)} \hat{N}_{\circ 3} - \frac{1}{2} \dot{q}_3 (\hat{N} + \\ & \hat{N}_{\circ 3} \Gamma^T) T^{(3)} I_{[-33]} \dot{\mathbf{q}} - \\ & \frac{1}{2} \dot{q}_3^2 \hat{N} I_{[-33]} T^{(3)} (I_{\circ 3} - \Gamma) + \\ & \hat{O}_{\circ 2} E_{p,2} - \hat{N} \partial_{\mathbf{q}} \bar{E}_p - \\ & d_1 (\hat{N}_{\circ 1} + \Gamma_1 \hat{N}_{\circ 3}) (\dot{q}_1 + \Gamma_1 \dot{q}_3) - \\ & d_2 (\hat{N}_{\circ 2} + \Gamma_2 \hat{N}_{\circ 3}) (\dot{q}_2 + \Gamma_2 \dot{q}_3), \quad (28) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} T^{(3)} = & (K^{-1})_{,3} = \\ & \frac{k_2}{|K|} \begin{bmatrix} -k_2 s_{2\theta} & k_2 c_{2\theta} & k_1 s_\theta \\ k_2 c_{2\theta} & k_2 s_{2\theta} & -k_1 c_\theta \\ k_1 s_\theta & -k_1 c_\theta & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

将矩阵 $T^{(3)}$ 和式(26)代入式(28)得到更具体的控制律表达式:

$$v_1 =$$

$$\begin{aligned} & \frac{k_2}{2k_7 n_2} \dot{\theta} [-k_2 n_2 (\dot{x} c_\theta + \dot{y} s_\theta) + (k_1 n_2 - \varepsilon k_7) \dot{\theta}] + \\ & g c_\theta + k_1 s_\theta [p_1 (x - x_d + \gamma_1 s_\theta) + d_1 (\dot{x} + \gamma_1 c_\theta \dot{\theta})] - \\ & k_1 c_\theta [p_2 (y - y_d - \gamma_1 (c_\theta - 1)) + d_2 (\dot{y} + \gamma_1 s_\theta \dot{\theta})], \quad (29) \end{aligned}$$

$v_2 =$

$$\begin{aligned} & \frac{k_2^2}{2k_1 n_2} \dot{\theta} (\dot{x} s_\theta - \dot{y} c_\theta) - \frac{k_3}{n_2} g s_\theta + \\ & \frac{k_7}{n_2} c_\theta [p_1 (x - x_d + \gamma_1 s_\theta) + d_1 (\dot{x} + \gamma_1 c_\theta \dot{\theta})] + \\ & \frac{k_7}{n_2} s_\theta [p_2 (y - y_d - \gamma_1 (c_\theta - 1)) + d_2 (\dot{y} + \gamma_1 s_\theta \dot{\theta})]. \quad (30) \end{aligned}$$

给出如下结论:

命题 1 如果控制器参数满足如下条件:

$$\begin{cases} k_1, k_3, k_1 k_3 - k_2^2, k_2 - \varepsilon k_3 > 0, \\ p_1, p_2, d_1, d_2 > 0, \end{cases} \quad (31)$$

则式(29)和式(30)确定的匹配控制律可使垂直起降飞机在平衡点 $(x_d, y_d, 0, 0, 0, 0)$ 实现几乎全局渐近镇定.

证 取Lyapunov函数 $V = \bar{E}$, 根据控制器参数满足式(31), 则 V 正定. 又由式(6)易知 $\dot{V} \leq 0$, 则式(29)和式(30)确定的控制律可实现平衡点 $(x_d, y_d, 0, 0, 0, 0)$ 稳定. 下面证明可渐近镇定.

这里用反证法证明在 $\dot{V} = 0$ 的集合中不存在非孤立点的轨线. 先假设在该集合中存在这种轨线, 则由 $\dot{V} = 0$ 得到

$$\begin{cases} \dot{x} + \Gamma_1(\theta) \dot{\theta} \equiv 0, \\ \dot{y} + \Gamma_2(\theta) \dot{\theta} \equiv 0. \end{cases} \quad (32)$$

在该轨线上应存在某点 (x_0, y_0, θ_0) , 该处 $\dot{\theta} \neq 0$. 进而存在 (x_0, y_0, θ_0) 的某个邻域 δ_0 , 其中 $\dot{\theta} \neq 0$. 将式(32)沿该轨线微分和积分可得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Gamma_1(\theta) \\ 0 & 1 & \Gamma_2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \gamma_1 \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} -s_\theta \\ c_\theta \end{bmatrix} \equiv 0 \quad (33)$$

和

$$\begin{cases} x - x_d + \gamma_1 s_\theta \equiv \alpha_1, \\ y - y_d - \gamma_1 (c_\theta - 1) \equiv \alpha_2, \end{cases} \quad (34)$$

其中 α_1, α_2 为积分常数. 将原始方程(19)代入式(33), 得

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \dot{\theta}^2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g c_\theta \\ \alpha_3 s_\theta \end{bmatrix} \equiv 0, \quad (35)$$

其中 $\alpha_3 = g/(\varepsilon + \gamma_1)$.

将控制律(29)和(30)代入式(35), 得

$$\begin{cases} 0 \equiv -\frac{k_1}{n_2}\dot{\theta}^2 + k_1(p_1\alpha_1s_\theta - p_2\alpha_2c_\theta), \\ 0 \equiv -\alpha_3s_\theta + \alpha_4s_\theta + \frac{k_7}{n_2}(p_1\alpha_1c_\theta + p_2\alpha_2s_\theta). \end{cases} \quad (36)$$

其中 $\alpha_4 = -gk_3/n_2$. 由其第2式, 可知

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1, \\ 0 = -\alpha_3 + \alpha_4 + p_2\alpha_2k_7/n_2. \end{cases} \quad (37)$$

将式(36)第1式对时间求导数得

$$\ddot{\theta} = n_2p_2\alpha_2s_\theta/2.$$

根据原始方程(19)第3式和式(35)第2式, 得到

$$\ddot{\theta} = v_2 \equiv \alpha_3s_\theta.$$

根据上两式得 $\alpha_3 = n_2p_2\alpha_2/2$. 又结合式(36)第2式得

$$0 = -\alpha_3 + \alpha_4 + 2\frac{k_7}{n_2^2}\alpha_3.$$

进一步得

$$k_7 = k_1k_3 - k_2^2 = 0.$$

该式与命题1的条件矛盾, 故前面假设不成立. 因此, 在 $\dot{V} = 0$ 的集合中不存在非孤立点的轨线.

在孤立点轨线上 $\dot{x} \equiv 0, \dot{y} \equiv 0, \dot{\theta} \equiv 0$. 根据受控方程, 该轨线只能为平衡点. 由于区域 $\mathbb{R}^2 \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}^3$ 中的其他平衡点 $(x_d, y_d, \pm\pi, 0, 0, 0)$ 不是极值点, 线性近似化后只有部分特征值含有负实部. 它们对应的稳定子流形具有Lebesgue测度(参考文献[10]). 因而, 根据LaSalle's不变原理, 匹配控制器在平衡点 $(x_d, y_d, 0, 0, 0, 0)$ 实现了几乎全局渐近稳定.

4 仿真(Simulations)

同文献[10], 系统参数 ε 取为1. 取控制器参数

$$\begin{aligned} k_1 &= 5, k_2 = 4, k_3 = 3.5, \\ p_1 &= p_2 = 1.2, d_1 = d_2 = 6, \end{aligned}$$

满足命题1条件(31).

同文献[10]第2个仿真例子, 期望的平衡位置

$$x_d = 5, y_d = 0,$$

初始时刻的

$$(q^T, \dot{q}^T) = (-5, 0, 0.1, -0.1, -0.1, 0.1).$$

图2和图3所示的仿真结果中系统的运动轨迹不再像文献[10]的图6所显示的那么曲折.

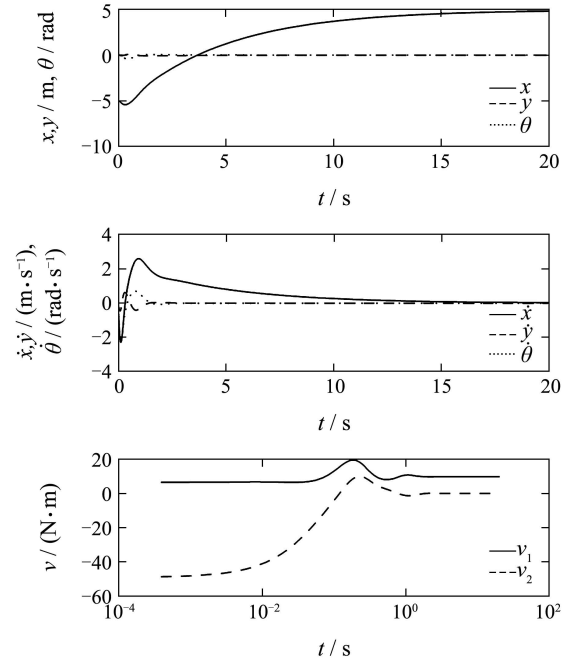


图 2 $(q^T(0), \dot{q}^T(0)) = (-5, 0, 0.1, -0.1, -0.1, 0.1)$ 时的镇定结果

Fig. 2 Stabilization of PVTOL aircraft with $(q^T(0), \dot{q}^T(0)) = (-5, 0, 0.1, -0.1, -0.1, 0.1)$

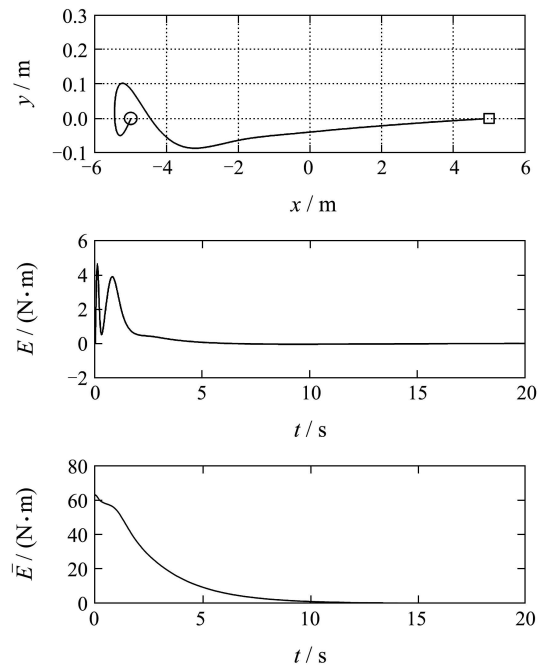


图 3 能量和受控能量的变化

Fig. 3 Variation of energy and controlled energy

同文献[10]第3个仿真例子, 期望的平衡位置 $x_d = -5, y_d = 5$, 初始时刻的 $(q^T, \dot{q}^T) = (5, -5, \pi, 0.1, -0.1, 0.1)$. 图4和图5所示的仿真结果中系统的运动轨迹接近直线, 而文献[10]的图8所示轨迹是类似成直角的折线.

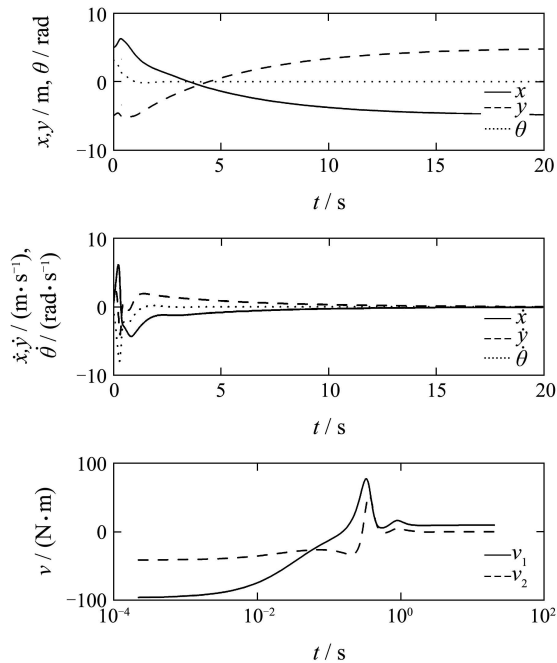


图4 当 $(\mathbf{q}^T(0), \dot{\mathbf{q}}^T(0)) = (5, -5, \pi, 0.1, -0.1, 0.1)$ 时的镇定结果

Fig. 4 Stabilization of PVTOL aircraft with $(\mathbf{q}^T(0), \dot{\mathbf{q}}^T(0)) = (5, -5, \pi, 0.1, -0.1, 0.1)$

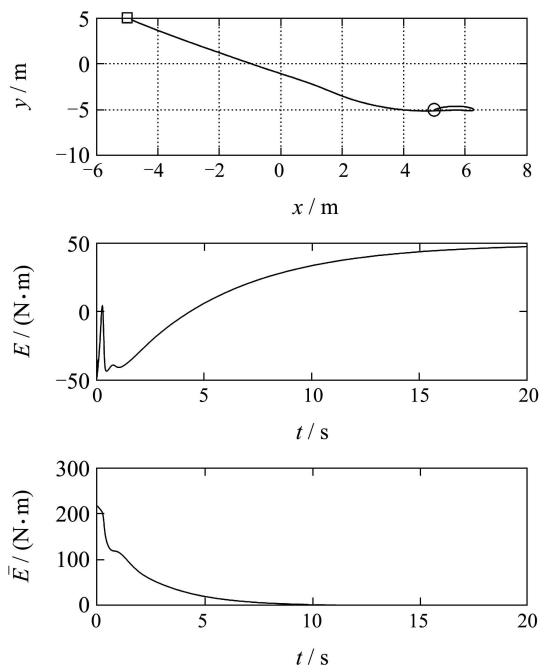


图5 能量和受控能量的变化

Fig. 5 Variation of energy and controlled energy

5 结论(Conclusion)

本文将基于CL的单欠驱动度力学系统控制器设计技术应用到具有输入耦合的垂直起降(PVTOL)飞机的控制问题. 通过求解具有显式陀螺力的匹配条件, 得到了形式更一般的解, 体现出该匹配条件的优点. 而导出的光滑反馈控制律仍实现了系统几乎全

局渐近镇定. 与同类方法所得到的结果相比, 该匹配控制器形式更简单而收敛性能得到保持.

该形式的匹配条件不仅适用于不具有对称性的欠驱动力学系统, 而且也可用于具有对称性的系统, 如小车摆和Furuta摆. 对应地, 在Hamiltonian形式下也可得到类似形式的匹配条件. 它将会被推广到具有更大欠驱动度的力学系统.

参考文献(References):

- [1] BLOCH A M, LEONARD N E, MARSDEN J E. Stabilization of mechanical systems using controlled Lagrangians[C] // *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 1997: 2356 – 2361.
- [2] BLOCH A M, LEONARD N E, MARSDEN J E. Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems I: the first matching theorem[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2253 – 2270.
- [3] BLOCH A M, CHANG D E, LEONARD N E, et al. Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems II: Potential shaping[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(10): 1556 – 1571.
- [4] AUCLKY D, KAPITANSKI L, WHITE W. Control of nonlinear underactuated systems[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2000, 53(3): 354 – 369.
- [5] AUCLKY D, KAPITANSKI L. On the λ -equations for matching control laws[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002, 41(5): 1372 – 1388.
- [6] CHANG D E. *Controlled Lagrangian and Hamiltonian systems*[D]. Pasadena, California: California Institute of Technology, 2002.
- [7] BROCKETT R W. Control theory and analytical mechanics[C] // HERMANN R, MARTIN C. *Lie Groups: History, Frontiers, and Applications VII: Proceedings of 1976 Ames Research Center (NASA) Conference on Geometric Control Theory*. Brookline, Massachusetts: Math Science Press, 1976: 1 – 46.
- [8] ORTEGA R, VAN DER SCHAFT A J, Maschke B, et al. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems[J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 585 – 596.
- [9] ORTEGA R, SPONG M W, GÓMEZ-ESTERN F, et al. Stabilization of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1218 – 1233.
- [10] ACOSTA J A, ORTEGA R, ASTOLFI A, et al. Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(12): 1936 – 1955.
- [11] BLANKENSTEIN G, ORTEGA R, VAN DER SCHAFT A J. The matching conditions of controlled Lagrangians and IDA-passivity based control[J]. *International Journal of Control*, 2002, 75(9): 645 – 665.
- [12] LI M Q, HUO W. Controller design for mechanical systems with underactuation degree one based on controlled Lagrangians method[J]. *International Journal of Control*, 2009, 82(9): 1747 – 1761.

作者简介:

李茂青 (1973—), 男, 博士研究生, 从事机器人控制、非线性控制研究, E-mail: lee_mq@126.com.