文章编号: 1000−8152(2010)08−1103−05

无穷网络流的顶点控制

郑 福[1,2], 白乙拉[1], 朱广田[3]

(1. 渤海大学 数学系, 辽宁 锦州 121013; 2. 北京信息控制研究所, 北京 100037; 3. 中国科学院 数学与系统科学研究所, 北京 100080)

摘要: 本文研究了无穷网络上的传输过程并在一个顶点对其进行控制. 描绘了所有的可控状态, 并在最大可控的顶点给出了卡尔曼型判断标准. 本文的结果是近期一个相似结果的推广.

关键词: 网络流; 算子半群; 边界控制; 最大可控空间

中图分类号: O230.4 **文献标识码**: A

Vertex control of flows in infinite networks

ZHENG Fu[1,2], BAI Yi-la[1], ZHU Guang-tian[3]

(1. Department of Mathematics, Bo Hai University, Jinzhou Liaoning 121013, China;
2. Beijing Institute of Information and Control, Beijing 100037, China;
3. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: The transmission process in a network with different velocities is studied by imposing the control on a single vertex. All possible reachable states are described and a Kalman-type criterion is provided for those vertices in which the problem is maximally controllable. Our results are the extension of the similar existing ones.

Key words: flows in network; operator semigroup; boundary control; maximally controllable space

1 引言(Introduction)

由于在经典自然科学(电路、化学过程、神经网络、人口生物学等) 以及社会科学甚至互联网上的各种应用, 网络已被广泛研究, 并在了解网络的结构方面取得了丰富的结果, 文献[1]作者对近些年来这方面的进展进行了详细综述, 有兴趣的读者请看文献[1]. 但是在网络上还有物质流动, 比如电路中的电子流动, 互联网上信息包的传输, 暖气管道中水的流动等等, 上述发生在网络上的动力学(物理的、社会的或生物的)过程就是网络流. 最近, 几位作者用谱理论和算子半群研究了网络流(有限[2~4]或无穷[5])的适定性和渐进性. 在文献[6], Engel, K.-J.等人首先研究了有限网络上的传输过程的控制问题, 在此需要指出的是, 关于波动方程的相似控制问题已被广泛研究, 文献[7]对这类问题进行了系统的处理. 本文是文献[6]的继续, 将对无穷网络流的控制问题进行研究. 给出了卡尔曼型的最大可控判断标准, 从而推广了文献[6]中的相应结论.

本文结构如下: 在第2节将介绍一些基本的控制理论方面的术语, 文献[7,8]对这些术语进行详细解释; 在第3节简要给出与网络流有关的图论知识和半群结果; 在第4节, 引出笔者所研究的网络流控制问题, 应用文献[6]的顶点控制的抽象结果于本文的网络流控制问题, 得到了卡尔曼型的最大可控判据, 最后给出一个简单的例子验证结论的正确性.

2 抽象边界控制(Abstract boundary control)

首先, 回顾一下控制论中的一些概念, 虽然本节大部分的内容可在文献[6]中找到, 但为了本文的完整性, 在此简单介绍本文需要的一些抽象边界控制术语.

考虑:

1) 3个Banach空间X, ∂X和U, 分别被称作状态、边界和控制空间;

2) 稠定的状态算子$A_m : D(A_m) \subseteq X \to X$;

3) 边界算子$Q \in L([D(A_m)], \partial X)$;

4) 控制算子$B \in L(U, \partial X)$.

在Banach空间X上, 与抽象Cauchy问题相应的具有边界空间U和控制算子B的抽象边界控制系统$\Sigma_{\mathrm{BC}}(A_m, B, Q)$定义如下:

收稿日期: 2009−1−15; 收修改稿日期: 2009−10−20.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671126).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_m x(t),\ t \geqslant 0, \\ Qx(t) = Bu(t), t \geqslant 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

本文主要想描绘给定抽象边界控制系统所有的可达状态, 为此引入如下定义:

定义 1 相应于(1)的近似可达空间是

$$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}} := \mathrm{cl}\,\{\, y \in X | \exists t > 0 \text{ 和} u(\cdot) \in L^1([0,t],U) \text{ 使得} y = x(t), \text{此处} x(\cdot) \text{是满足 } x(0) = 0 \text{ 的(1) 的一个解}\}. \tag{2}$$

如果$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}} = X$, 则抽象边界控制系统$\Sigma_{\mathrm{BC}}(A_m, B, Q)$ 被称作近似边界可控.

对于$\lambda \in \rho(A_m)$, 算子$Q_\lambda := Q|_{\ker(\lambda - A_m)}$在文献[9]中被引入, 被称作Dirichlet算子且定义: $B_\lambda := Q_\lambda B \in L(U, \ker(\lambda - A_m))$.

算子A的谱界$\omega_0(A)$为$\omega_0(A) = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$. 用$\mathrm{rg}(A)$代表算子$A$的值域. 如下定理来自文献[6], 就是应用这个定理得到本文的主要结论.

定理 1 抽象边界控制系统$\Sigma_{\mathrm{BC}}(A_m, B, Q)$的近似可达空间$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}$等于:

1) 包含所有充分大μ的$\mathrm{rg}(B_\mu)$的最小的、X的$(T(t))_{t \geqslant 0}$–不变闭子空间;

2) 包含所有充分大μ的$\mathrm{rg}(B_\mu)$的最小的、X的$R(\lambda, A)$–不变闭子空间, 其中$\lambda > \omega > \omega_0(A)$;

3) $\overline{\mathrm{span}}\,(\cup_{\lambda > \omega} \mathrm{rg}(B_\lambda))$, 对某一$\omega > \omega_0(A)$.

定义 2 1)的最大可达空间为

$$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}_{\max} = \overline{\mathrm{span}} \bigcup_{\lambda > \omega_0(A)} \ker(\lambda - A_m), \tag{3}$$

如果$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}} = \mathcal{R}^{\mathrm{BC}}_{\max}$, 则称抽象边界控制系统$\Sigma_{\mathrm{BC}}(A_m, B, Q)$是最大可控的.

文献[6]已指出$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}} \subseteq \mathcal{R}^{\mathrm{BC}}_{\max}$, 因而$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}_{\max}$实际上是通过施加某一边界控制$B$所能得到的最大的近似可达空间, 所关心的问题是何时这两个空间相等.

3 图论基本概念和无穷网络流(Basic concepts on graph and flows in infinite networks)

本节简要介绍基本的图论概念, 在此引入的这些概念可在文献[2]或文献[9]中找到.

首先考虑简单有向无穷图, 用$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots\}$和$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m, \cdots\}$分别表示有向图的顶点集和边(弧)集. 边$e = (v_i, v_j)$的方向被认为是从$v_i$到$v_j$; 顶点$v_j$和$v_i$分别是边$e$的首和尾. 在此将边分为流入边和流出边, 也就是边$e = (v_i, v_j)$是顶点v_i的流出边, 而是v_j的流入边. 所有的边都参数化为:$e_j = [0,1]$, 并且参数化的方向与流向相反, 即: 每一条弧在弧首与参数0对应, 弧尾与参数1对应. 这样也可以用记号$e_j(1)$和$e_j(0)$分别来表示弧尾和弧首. 本文假定我们所研究的图是简单的, 也就是没有环和多边.

由图论的知识可知, 一个图的结构可完全由此图的关联或相邻矩阵来决定. 由于在此将边分为流出边和流入边, 所以就有如下的两个关联矩阵和两个相邻矩阵, 分别是流出、流入关联矩阵和流出、流入相邻矩阵. 下面依次给出这些矩阵的定义. 在流出关联矩阵$\Phi^- = (\phi^-_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$中, 其元素$\phi^-_{ij}$等于1 当其仅当边$e_j$是顶点$v_i$的一条流出边. 类似地, 流入关联矩阵$\Phi^+ = (\phi^+_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$的元素$\phi^+_{ij}$等于1当其仅当边$e_j$是顶点$v_i$的一条流入边.

需要注意的是无穷矩阵Φ^+和Φ^-每一列只有一个非零元素. 矩阵$\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$被称作图的关联矩阵.

也需要与关联矩阵同零型的另一类矩阵. 矩阵$\Phi^-_\omega = (\omega^-_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$被称作加权流出关联矩阵, 具有元素$\omega^-_{ij} \geqslant 0$被定义为$\omega^-_{ij} = 0 \Leftrightarrow \phi^-_{ij} = 0$, 加权流入关联矩阵可用类似的方式给出. 用加权一词是因为, 元素ω^-_{ij}表示在顶点v_i从边e_j流出物质占顶点v_i流出总量的权重.

描绘图结构的第2类型矩阵是相邻矩阵, 本文需要用到图的加权相邻矩阵$\mathscr{A}$和其线性图的加权相邻矩阵$\mathscr{B}$, 由图论的基本知识可知, 刚刚提到的两个矩阵分别定义为: $\mathscr{A} = (a_{ij}) := \Phi^+(\Phi^-_\omega)^{\mathrm{T}}$和$\mathscr{B} = (b_{ij}) = (\Phi^-_\omega)^{\mathrm{T}}\Phi^+$.

通过对矩阵Φ^+和Φ^-_ω的简单分析, 显然可以得到如下性质, 并且在下节中将多次用到这些性质.

引理 1 1) $\Phi^-(\Phi^-_\omega)^{\mathrm{T}} = I$, 其中$I$代表无穷单位矩阵;

2) $\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$两个矩阵均是列随机的, 因而$||\mathscr{A}||_1 = 1$和$||\mathscr{B}||_1 = 1$. 这样有$r(\mathscr{A}) \leqslant 1$, $r(\mathscr{B}) \leqslant 1$, 此处$r(\mathscr{A})$表示$\mathscr{A}$的谱半径, 而$||\mathscr{A}||_1 = \sup_j \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|$;

3) 有如下关系式: $(\Phi^-_\omega)^{\mathrm{T}}\mathscr{A} = \mathscr{B}(\Phi^-_\omega)^{\mathrm{T}}$和$(\Phi^-_\omega)^{\mathrm{T}}\mathscr{A}^k = \mathscr{B}^k(\Phi^-_\omega)^{\mathrm{T}}, k = 0, 1, \cdots$.

假设图中的每一个顶点至少有一条流入边和一条流出边. 对于$s \in [0,1]$, 在时刻$t \geqslant 0$, 边e_j上的质量分布用二元函数$u_j(t,s)$来表示; 正数c_j是边e_j上的流速. 同时, 在边上选择如下的传输方程(具有初始条件),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_j(t,s) = c_j \dfrac{\partial}{\partial s} u_j(t,s), s \in (0,1), t > 0, \\ u_j(0,s) = f_j(s), s \in (0,1). \end{cases}$$

此处, 对于$j \in \mathbb{N}$, $f_j(s) \in L^1(0,1)$.

令$u(t,s) = (u_1(t,s),\cdots,u_m(t,s),\cdots)^{\mathrm{T}}$, 首先要求

$$u(t,1) \in \mathrm{ran}(\varPhi_\omega^-)^{\mathrm{T}}, t \geqslant 0, \tag{4}$$

接下来引入边界条件

$$\varPhi_{ij}^- u_j(t,1) = \omega_{ij}^- \sum_{k=1}^m \varPhi_{ik}^+ u_k(t,0),$$

注意到加权流出关联矩阵的定义, 上述边界条件蕴含着基尔霍夫定律成立, 即: 在每一顶点的流入总量等于其流出总量.

现在可将上述网络流问题转化成Banach空间$X = L^1([0,1],l^1)$上的抽象Cauchy问题.

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t)\ t > 0, \\ u(0) = f. \end{cases} \tag{5}$$

此处$A := \mathrm{diag}\{c_1\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}, c_m\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s},\cdots\}$,$u(t) = u(t,\cdot)$和$f = (f_1,\cdots,f_m,\cdots)^{\mathrm{T}}$具有定义域

$$D(A) = \{g \in W^{1,1}([0,1],l^1) | g(1) \in \mathrm{rg}(\varPhi_\omega^-)^{\mathrm{T}}\ 且\ \varPhi^- g(1) = \varPhi^+ g(0)\}, \tag{6}$$

在假设所有的流速均相等且设其为1 的前提下, 且本文将沿用此假设, 文献[9]给出了如下结果:

定理 2　具有定义域$D(A)$的算子A是Banach空间X上某一C_0半群$(T(t))_{t\geqslant 0}$的无穷小生成元, 算子A的定义域$D(A)$可改为如下的等价形式:

$$D(A) = \{g \in W^{1,1}([0,1],l^1) | g(1) \in \mathrm{rg}(\varPhi_\omega^-)^{\mathrm{T}}\ 且\ g(1) = \mathscr{B}g(0)\},$$

同时对于$n \leqslant t+s < n+1$, $f(s) \in X$, $n \in \mathbb{N}$, 半群$(T(t))_{t\geqslant 0}$具有如下形式:

$$T(t)f(s) = \mathscr{B}^n f(t+s-n). \tag{7}$$

4　网络流的顶点控制(Vertex control of flows in networks)

现在将主要研究在网络流的单顶点施加控制的最大可控问题. 在此所关心的问题是, 通过在一个顶点添加或减少物质(即施加控制), 网络中的哪种质量分布是近似可达的. 为此在式(5)中添加合适的边界算子和控制算子使其成为具有边界控制的抽象Cauchy问题. 在此$X = L^1([0,1],l^1)$是状态空间, 而边界空间是: $\partial X := l^1$. 其次, 需要如下算子: 流出边界算子$L: X \to \partial X$定义为

$$Lg = \varPhi^- g(1), g \in D(L) = W^{1,1}([0,1],l^1),$$

而流入边界算子$M: X \to \partial X$定义为

$$Mg = \varPhi^+ g(0), g \in D(M) = W^{1,1}([0,1],l^1),$$

这两个算子均是有界的且映空间$W^{1,1}([0,1],l^1)$到l^1内.

这样可定义$A_m := \mathrm{diag}\{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s},\cdots,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s},\cdots\}$具有定义域

$$D(A_m) = \{g \in W^{1,1}([0,1],l^1) | g(1) \in \mathrm{rg}(\varPhi_\omega^-)^{\mathrm{T}}\}$$

和边界算子

$$Q := L - M \in L([D(A_m)], \partial X),$$

则抽象Cauchy 问题(5) 便为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_m x(t), t \geqslant 0, \\ Qx(t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{8}$$

最后, 在某个固定的顶点$v = v_i \in V, i \in \mathbb{N}$施加控制, 将此顶点看作一个$l^1$中的无穷向量$v = (0,\cdots,1,\cdots,0,\cdots)^{\mathrm{T}}$, 其中向量$v$的第$i$个坐标是1, 其余坐标全为零.

选择$U := \mathbb{C}$和$B: U \to \mathrm{span}\{v\} \subseteq \partial X = l^1$作为控制空间和控制算子, 其中$B$是任意给定的有界线性算子. 有了这些概念后, 就得到了形式(1)的具有边界控制的抽象Cauchy问题.

现在将应用第2节的定理1来研究本节的控制问题. 通常来说, 由于A_m的特征向量在顶点必满足边界条件, 因而$\mathcal{R}_{\max}^{\mathrm{BC}}$与状态空间$X = L^1([0,1],l^1)$不能相等, 也就是近似边界可控不成立. 所以转向另一问题: $\mathcal{R}_{\max}^{\mathrm{BC}}$与$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}$ 何时相等, 也就是系统何时是最大可达的. 为此需要如下的用图的相邻矩阵或关联矩阵给出的$\mathcal{R}_{\max}^{\mathrm{BC}}$和$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}$的刻画.

引理 2　最大可达空间$\mathcal{R}_{\max}^{\mathrm{BC}}$ 等于

$$\mathcal{R}_{\max}^{\mathrm{BC}} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} a_1 g_1 \\ \vdots \\ a_m g_m \\ \vdots \end{pmatrix} : g_1,\cdots,g_m,\cdots \in L^1([0,1],\mathbb{C})\ 且 \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathrm{rg}(\varPhi_\omega^-)^{\mathrm{T}}\right\}.$$

证　用文[2]第147页中的结论有, 对某一$\lambda \in \mathbb{C}$

$$\ker(\lambda - A_m) = \left\{\mathrm{e}^{\lambda s}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ \vdots \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathrm{rg}(\varPhi_\omega^-)^{\mathrm{T}}\right\},$$

这样由Stone-Weierstrass定理有

$$\overline{\text{span}}\bigcup_{\lambda>\omega_0(A)}\mathrm{e}^{\lambda s}=L^1([0,1],\mathbb{C}).$$

证毕.

如果引入矩阵论中的两个矩阵的Kronecker 积, 最大可达空间$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}_{\max}$有如下简洁的表示方式:

$$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}_{\max}=L^1([0,1],\mathbb{C})\otimes(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}l^1. \tag{9}$$

为了用定理1的3)来刻画近似可达空间$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}$, 需要知道$\lambda$充分大时, 算子$B_\lambda=Q_\lambda B$的表达式, 所以需要先知道$Q_\lambda=(Q|_{\ker(\lambda-A_m)})^{-1}$, 为此引出如下两个引理, 其中引理3成立是因为矩阵$\mathscr{A}$的列范数等于1, 而预解式的Neumann级数展开式可在一般的泛函分析教材中找到.

引理 3 对于$\lambda>0$, 算子$\mathscr{A}$的预解式$R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})$由下式给出:

$$R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda k}\mathscr{A}^k.$$

引理 4 **证** 对于$\lambda>0=\omega_0(A)$, 有

$$Q_\lambda=\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A}).$$

由算子L,M的定义及引理1的1)可知

$$(L-M)\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})=$$
$$\mathrm{e}^\lambda\varPhi^-(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})-\varPhi^+(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})=$$
$$\mathrm{e}^\lambda R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})-\mathscr{A}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})=I.$$

反过来, 任取$f\in\ker(\lambda-A_m)$, 有:

$$f=\mathrm{e}^{\lambda s}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\\ \vdots\end{pmatrix}\ \text{对某一}\ \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\\ \vdots\end{pmatrix}=(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\in l^1.$$

这样, 由引理1的2)和3), 引理2和等式$\mathscr{B}=(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}\varPhi^+$, 可有

$$\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})(L-M)f=$$
$$\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})(\varPhi^-f(1)-\varPhi^+f(0))=$$
$$\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{e}^{-\lambda}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda k}\mathscr{A}^k(\mathrm{e}^\lambda I-\varPhi^+\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=$$
$$\mathrm{e}^{\lambda s}(\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda k}\mathscr{B}^k-\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda(k+1)}\mathscr{B}^{k+1})(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=f.$$

这样实际上说明了

$$\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})(L-M)=I_{\ker(\lambda-A_m)},$$

结合前半部分可知本引理结论成立.

有了引理3, 4后可以得到近似可达空间的用图的相邻矩阵和关联矩阵给出的刻画:

定理 3 存在$\omega>0$使得

$$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}=\overline{\text{span}}\bigcup_{\lambda>\omega}\{\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})v\}=$$
$$L^1([0,1],\mathbb{C})\otimes(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}(\overline{\text{span}}\{v,\mathscr{A}v,\cdots,\mathscr{A}^nv,\cdots\}). \tag{10}$$

证 事实上, 只需证明第2个等式. 由定理2和引理3以及$\mathscr{A}=\varPhi^+(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}$有

$$T(1)(\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})v)=$$
$$\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})\mathscr{A}v,$$

由上可知$\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})\mathscr{A}v\in\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}$, 再用$T(1)$作用$\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})\mathscr{A}v$可得:

$$\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})\mathscr{A}^2v\in\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}.$$

将上述过程进行下去, 则有: 对于$n=0,1,\cdots$,

$$\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})\mathscr{A}^nv\in\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}.$$

由于$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}$是一个线性空间, 也有: 对于$n=0,1,\cdots$,

$$\mathrm{e}^\lambda\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})\mathscr{A}^nv-\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}\cdot$$
$$R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})\mathscr{A}^{n+1}v=$$
$$\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}R(\mathrm{e}^\lambda,\mathscr{A})(\mathrm{e}^\lambda I-\mathscr{A})\mathscr{A}^nv=$$
$$\mathrm{e}^{\lambda s}(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}\mathscr{A}^nv\in\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}.$$

最后由引理2中$R(\mathrm{e}^\lambda-\mathscr{A})$的Neumann展开式和Stone-Weierstrass定理可知定理中的第2个等式成立.

这样, 现在可给出在哪个顶点施加控制, 系统在此是最大可控的刻画:

定理 4 对顶点v, 如下结论等价:

1) $\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}=\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}_{\max}$, 也就是, 网络流在此顶点是最大可控;

2) $\overline{\text{span}}\{v,\mathscr{A}v,\cdots,\mathscr{A}^nv,\cdots\}=l^1$.

证 由式(9)和式(10), 上述(1)等价于

$$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}}_{\max}=L^1([0,1],\mathbb{C})\otimes(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}l^1=$$
$$L^1([0,1],\mathbb{C})\otimes(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}(\overline{\text{span}}\{v,\mathscr{A}v,\cdots,\mathscr{A}^nv,\cdots\})=$$
$$\mathcal{R}^{\mathrm{BC}},$$

由于$\varPhi^-(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}=I$, 所以$(\varPhi^-_\omega)^{\mathrm{T}}$的左逆存在, 这样上面等式成立当且仅当

$$\overline{\text{span}}\{v,\mathscr{A}v,\cdots,\mathscr{A}^nv,\cdots\}=l^1.$$

通过本定理2)可以看到, 本结论是文献[6]中主要结果的推广.

最后给出一个简单的例子来验证本文结论.

例 1　考虑由无穷个顶点$\{v_1,\cdots,v_n,\cdots\}$组成一个圆型的简单有向图, 即边$e_1$从$v_1$流向$v_2$, 边$e_2$从$v_2$流向$v_3$, 边$e_n$从$v_n$流向$v_{n+1}$. 对于此图, 假设每条边上的流速是1, 每条边长也是1, 显然在它的任何一个顶点施加控制均是最大可控的. 同时, 它的流出关联矩阵$\varPhi^-$和加权流出关联矩阵$\varPhi_\omega^-$均等于无穷单位矩阵, 所以此图的加权相邻矩阵$\mathscr{A}$应等于流出关联矩阵$\varPhi^+$, 这样有

$$\mathscr{A}=\varPhi^+=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdots\\1&0&0&0&\cdots\\0&1&0&0&\cdots\\0&0&1&0&\cdots\end{pmatrix},$$

如果在顶点v_1施加控制, 则有

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix},\mathscr{A}v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix},\mathscr{A}^2v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\end{pmatrix},\cdots$$

显然满足定理4的结论2), 也即在顶点v_1施加控制可最大可控. 类似地也可验证在其他顶点施加控制也最大可控.

参考文献(References):

[1] NEWMAN M E J. The structure and function of complex networks[J]. *SIAM Review*, 2003, 45(2): 167 – 256.

[2] KRAMAR M, SIKOLYA E. Spectral properties and asymptotic periodicity of flows in networks[J]. *Mathematische Zeitschrift*, 2005, 249(1): 139 – 162.

[3] MATRAI T, SIKOLYA E. Asymptotic behavior of flows in networks[J]. *Forum Mathematicum*, 2007, 19(3): 429 – 461.

[4] SIKOLYA E. Flows in networks with dynamic ramification nodes[J]. *Journal of Evolution Equations*, 2005, 5(3): 441 – 463.

[5] DORN B, KEICHER V, SIKOLYA E. Asymptotic periodicity of recurrent flows in infinite networks[J]. *Mathematische Zeitschrift*, DOI: 10.1007/s00209-008-0410-x (online first).

[6] ENGEL K J. Vertex control of flows in networks[J]. *Netwrks And Hetergoeneous Media*, 2008, 3(4): 709 – 722.

[7] DAGER R, ZUAZUA E. *Wave Propagation, Observation and Control in 1-d Flexible Multistructures*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[8] CURTAIN R F, ZWART H J. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[9] DORN B. Semigroups for flows in infinite networks[J]. *Semigroup Forum*, 2008, 76(2): 341 – 356.

作者简介:

郑　福　(1977—), 男, 博士研究生, 主要从事分布参数控制系统和可修复系统的研究, E-mail: fz555888@.com.cn;

白乙拉　(1965—), 男, 教授, 博士, 主要从事非光滑分布参数系统参数辨识及其应用;

朱广田　(1938—), 男, 中科院研究员, 博士生导师, 主要从事分布参数控制系统和可修复系统的研究.