

# 连续时间系统多目标鲁棒滤波器设计

苏子漪, 俞立, 宋洪波, 张文安

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032)

**摘要:** 针对存在凸多面体参数不确定性的连续时间系统, 提出了一种广义 $H_2/\alpha$ 稳定的多目标鲁棒滤波器设计方法. 基于参数依赖Lyapunov函数方法和线性矩阵不等式技术得到滤波误差系统鲁棒 $\alpha$ 稳定且具有给定广义 $H_2$ 性能的充分必要条件, 并通过合适的变量替换给出了广义 $H_2/\alpha$ 稳定滤波器的设计方法. 最后, 给出两个算例验证本文方法的有效性.

**关键词:** 不确定系统; 广义 $H_2/\alpha$ 稳定滤波; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Design of multi-objective robust filter for continuous time systems

SU Zi-yi, YU Li, SONG Hong-bo, ZHANG Wen-an

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310032, China)

**Abstract:** The generalized H-two/ $\alpha$ -stability filtering is investigated for continuous-time systems with polytopic type parameter uncertainties. By using parameter-dependent Lyapunov function method and the linear matrix inequality approach, we derive a necessary and sufficient condition for the filtering error system to be robustly  $\alpha$ -stable and to achieve a prescribed generalized H-two performance. Generalized H-two/ $\alpha$ -stability filters are designed under the above-mentioned condition and are developed by applying an appropriate variable transformation technique. Two numerical examples are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** uncertain systems; generalized H-two/ $\alpha$ -stability filtering; linear matrix inequalities

### 1 引言(Introduction)

滤波一直是控制和信号处理界研究的热点问题之一, 其目的是根据系统的测量输出来估计未知的系统状态或状态的线性组合. Kalman滤波方法是应用最为广泛的滤波方法之一, 但它要求系统模型是精确已知的, 并且外部噪声为统计特性已知的高斯白噪声. 而在实际应用中, 这两个假设条件往往难以满足. 因此一些学者提出了 $H_\infty$ 滤波, 广义 $H_2$ 滤波等方法<sup>[1~3]</sup>, 它们确保了存在模型不确定性时系统的鲁棒性, 同时, 对于一类能量有界的扰动信号, 此类方法可保证估计误差具有确定的上界. 文献[3]针对存在凸多面体参数不确定性系统, 研究了广义 $H_2$ 鲁棒滤波问题. 文献[4]研究了不确定系统的广义 $H_2$ 鲁棒控制问题. 文献[3,4]对所有不确定性选取一个公共Lyapunov函数, 从而得到二次稳定的结果, 但该方法引入了较大的保守性. 采用参数依赖Lyapunov方法可降低结果保守性, 但为控制器/滤波器设计带来一定的困难, 目前已有一些有效的处理方法<sup>[5]</sup>. 另一

方面, 在许多实际问题中, 单一性能指标很难完全反映系统性能的要求, 近年来出现如 $H_2/H_\infty$ 控制/滤波问题<sup>[6]</sup>,  $H_\infty/\alpha$ 区域极点配置问题<sup>[7]</sup>等多目标控制与滤波问题的研究. 特别地, 虽然广义 $H_2$ 滤波可保证误差信号的峰值有最小上界, 却不能保证滤波误差系统有良好的暂态特性. 而 $\alpha$ 区域极点配置可保证系统状态响应具有衰减度 $\alpha$ . 因此, 对于不确定系统, 同时结合广义 $H_2$ 性能与 $\alpha$ 区域极点配置的鲁棒滤波器设计问题值得研究.

本文针对具有凸多面体不确定性的线性系统, 提出一种广义 $H_2/\alpha$ 稳定鲁棒滤波器的设计方法. 首先基于参数依赖Lyapunov方法得到保证滤波误差系统鲁棒 $\alpha$ 稳定且具给定广义 $H_2$ 性能的充分必要条件; 根据该条件, 通过变量替换线性化方法导出鲁棒滤波器的线性矩阵不等式(LMI)设计方法; 进一步, 通过求解一个具有LMI约束的凸优化问题得到最优广义 $H_2/\alpha$ 稳定滤波器. 该滤波器保证滤波误差系统鲁棒 $\alpha$ 稳定, 并具有最小的广义 $H_2$ 性能上界; 最后通过

仿真算例验证本文提出方法的有效性.

## 2 问题描述(Problem description)

考虑如下不确定线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\sigma)x(t) + B(\sigma)w(t), \\ y(t) = C(\sigma)x(t) + D(\sigma)w(t), \\ z(t) = L(\sigma)x(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  为状态向量,  $y(t) \in \mathbb{R}^r$  为测量输出,  $z(t) \in \mathbb{R}^p$  为待估信号,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  为能量有界噪声信号; 假设系统中的不确定矩阵由以下多胞形描述:

$$\begin{cases} \Omega_\sigma \triangleq (A(\sigma), B(\sigma), C(\sigma), D(\sigma), L(\sigma)) \in \mathcal{R}, \\ \mathcal{R} \triangleq \{ \Omega_\sigma \mid \Omega_\sigma = \sum_{i=1}^N \sigma_i \Omega_i; \sum_{i=1}^N \sigma_i = 1, \sigma_i \geq 0 \}, \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\Omega_i \triangleq (A_i, B_i, C_i, D_i, L_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  为此多胞形顶点矩阵.

构造如下形式的全维滤波器:

$$\begin{cases} \dot{x}_F(t) = A_F x_F(t) + B_F y(t), \\ z_F(t) = C_F x_F(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $x_F(t) \in \mathbb{R}^n$  为滤波器状态,  $z_F(t) \in \mathbb{R}^p$  为估计输出,  $A_F, B_F$  和  $C_F$  为待设计的滤波器参数矩阵. 定义滤波误差  $\tilde{z}(t) \triangleq z(t) - z_F(t)$ , 状态变量  $\tilde{x}(t) = [x^T(t) \ x_F^T(t)]^T$ , 则可得如下滤波误差系统:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(\sigma)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(\sigma)w(t), \\ \tilde{z}(t) = \tilde{C}(\sigma)\tilde{x}(t). \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$\tilde{A}(\sigma) = \begin{bmatrix} A(\sigma) & 0 \\ B_F C(\sigma) & A_F \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}(\sigma) = \begin{bmatrix} B(\sigma) \\ B_F D(\sigma) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}(\sigma) = \begin{bmatrix} L^T(\sigma) \\ -C_F^T \end{bmatrix}^T.$$

在给出本文的问题之前, 引入以下定义和引理:

**定义 1** 对给定的复平面中区域  $D_\alpha = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) < -\alpha\}$ ,  $\alpha > 0$  和所有允许的不确定性  $\sigma$ , 若矩阵  $\tilde{A}(\sigma)$  的所有特征值都位于区域  $D_\alpha$  中, 则具有  $w(t) = 0$  的系统(4)称为是鲁棒  $\alpha$  稳定的.

**定义 2** 对给定正数  $\gamma$ , 若滤波误差系统(4)是鲁棒  $\alpha$  稳定的, 且在零初始条件, 对所有允许的  $\sigma$  和所有非零能量有界干扰输入  $w(w \in L_2[0, \infty))$ , 有

$$\begin{cases} \sup_{0 \neq w \in L_2} \frac{\|\tilde{z}\|_\infty}{\|w\|_2} < \gamma, \\ \forall (A(\sigma), B(\sigma), C(\sigma), D(\sigma), L(\sigma)) \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5)$$

则称该系统具有广义  $H_2$  性能  $\gamma$ . 其中:

$$\|\tilde{z}\|_\infty = \sup_t \sqrt{\tilde{z}^T(t)\tilde{z}(t)},$$

$$\|w\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty w^T(t)w(t)dt}.$$

满足以上条件的滤波器(3)被称为广义  $H_2/\alpha$  稳定滤波器.

**引理 1** 对给定的  $\gamma > 0$ , 滤波误差系统(4)渐近稳定且具有广义  $H_2$  性能的充要条件为存在参数依赖矩阵  $P(\sigma) > 0$ , 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T(\sigma)P(\sigma) + P(\sigma)\tilde{A}(\sigma) & P(\sigma)\tilde{B}(\sigma) \\ * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} P(\sigma) & \tilde{C}^T(\sigma) \\ * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (7)$$

其中 \* 表示由矩阵的对称性得到的矩阵块.

**引理 2** 矩阵  $\tilde{A}(\sigma)$  是  $\alpha$  稳定的充要条件是存在参数依赖矩阵  $P(\sigma) > 0$ , 使得如下矩阵不等式成立:

$$\tilde{A}(\sigma)P(\sigma) + P(\sigma)\tilde{A}^T(\sigma) + 2\alpha P(\sigma) < 0, \quad (8)$$

本文的目的是对系统(1)和给定的标量  $\gamma$ , 设计形如式(3)的滤波器, 使得对所有允许的不确定性, 滤波误差系统(4)鲁棒  $\alpha$  稳定且具有广义  $H_2$  性能  $\gamma$ .

## 3 滤波误差系统分析(Analysis of filtering error system)

**定理 1** 滤波误差系统(4)鲁棒  $\alpha$  稳定且具有广义  $H_2$  性能指标  $\gamma$  的充分必要条件为存在对称正定矩阵  $P_i (i = 1, \dots, N)$ 、矩阵  $G$  和标量  $\varepsilon > 0$ , 使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi_i & P_i - G^T + \varepsilon \tilde{A}_i^T G & G^T \tilde{B}_i \\ * & -\varepsilon(G + G^T) & \varepsilon G^T \tilde{B}_i \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} P_i & \tilde{C}_i^T \\ * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (10)$$

其中  $\Pi_i = \tilde{A}_i^T G + G^T \tilde{A}_i + 2\alpha P_i$ .

**证** 对滤波误差系统(4), 取如下的参数依赖 Lyapunov 矩阵  $P(\sigma) = P^T(\sigma) > 0$ ,

$$P(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i P_i, \quad \sum_{i=1}^N \sigma_i = 1, \sigma_i \geq 0. \quad (11)$$

充分性. 分别将式(9)(10)乘以  $\sigma_i$  并对  $i = 1, \dots, N$  求和, 可得下式和式(7)成立:

$$\Gamma = \Lambda + \text{diag}\{2\alpha P(\sigma), 0, 0\} < 0. \quad (12)$$

其中

$$\Lambda =$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T(\sigma)G + G^T\tilde{A}(\sigma) & P(\sigma) - G^T + \varepsilon\tilde{A}^T(\sigma)G & G^T\tilde{B}(\sigma) \\ * & -\varepsilon(G + G^T) & \varepsilon G^T\tilde{B}(\sigma) \\ * & * & -I \end{bmatrix}.$$

由于 $P(\sigma)$ 正定,且 $\alpha > 0$ ,故可得

$$A < 0. \quad (13)$$

定义 $T_1(\sigma) = \begin{bmatrix} I & \tilde{A}^T(\sigma) & 0 \\ 0 & \tilde{B}^T(\sigma) & I \end{bmatrix}$ ,对式(13)分别左乘 $T_1(\sigma)$ 和右乘 $T_1^T(\sigma)$ ,即可得到式(6).由引理1可知,滤波误差系统(4)渐近稳定并具有广义 $H_2$ 性能 $\gamma$ .

进一步,由式(12)可得

$$\begin{bmatrix} \Pi(\sigma) & P(\sigma) - G^T + \varepsilon\tilde{A}^T(\sigma)G \\ * & -\varepsilon(G + G^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

其中: $\Pi(\sigma) = \tilde{A}^T(\sigma)G + G^T\tilde{A}(\sigma) + 2\alpha P(\sigma)$ .定义 $T_2(\sigma) = [I \ \tilde{A}^T(\sigma)]$ ,对式(14)分别左乘 $T_2(\sigma)$ 和右乘 $T_2^T(\sigma)$ ,即可得到式(8).由引理2可知,滤波误差系统(4)是鲁棒 $\alpha$ 稳定的.充分性得证.

必要性.由引理1和引理2可知,若滤波误差系统(4)鲁棒 $\alpha$ 稳定且具有广义 $H_2$ 性能,则有式(6)~(8)成立.将式(7)写成

$$\begin{bmatrix} P(\sigma) & \tilde{C}^T(\sigma) \\ * & \gamma^2 I \end{bmatrix} = \sum_i \sigma_i \begin{bmatrix} P_i & \tilde{C}_i^T \\ * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0.$$

由式(2)的假设,可得式(10)成立.

对于满足式(6)的正定对称矩阵 $P(\sigma)$ ,参数 $\varepsilon$ 取值范围选取为 $0 < \varepsilon < 2\lambda_1/\lambda_2$ ,其中:

$$\lambda_1 = \lambda_{\min}(-\Gamma_1), \lambda_2 = \lambda_{\max}(\Gamma_2),$$

$$\Gamma_1 =$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T(\sigma)P(\sigma) + P(\sigma)\tilde{A}(\sigma) + 2\alpha P(\sigma) & P(\sigma)\tilde{B}(\sigma) \\ * & -I \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \tilde{A}^T(\sigma) \\ \tilde{B}^T(\sigma) \end{bmatrix} P(\sigma) [\tilde{A}(\sigma) \ \tilde{B}(\sigma)].$$

同时,对式(9)应用Schur补引理,并选取 $G = P$ ,可得 $\Gamma_1 + \frac{\varepsilon}{2}\Gamma_2 < 0$ .参数 $\varepsilon$ 总能令式(9)与下式成立:

$$\begin{aligned} & (\tilde{A}^T(\sigma)P(\sigma) + P(\sigma)\tilde{A}(\sigma) + 2\alpha P(\sigma)) + \\ & \frac{\varepsilon}{2}(\tilde{A}^T(\sigma)P(\sigma)\tilde{A}(\sigma)) < 0, \end{aligned} \quad (15)$$

故对任意标量 $\varepsilon > 0$ ,总能保证式(8)成立.

综上,必要性得证.

#### 4 多目标鲁棒滤波器设计(Design of multi-objective robust filter)

定理1给出的矩阵不等式条件是关于滤波误差系统(4)的系数矩阵和矩阵 $G$ 的非线性矩阵不等式,难以直接求解.本节提出一种线性化方法将式(9)(10)转化为线性矩阵不等式,从而可用已有的数值算法求解滤波器参数矩阵.以下定理以LMI的

形式给出了滤波器存在的充要条件.

**定理2** 对给定的 $\gamma > 0$ ,滤波误差系统(4)鲁棒 $\alpha$ 稳定且具有广义 $H_2$ 性能指标的充分必要条件为存在矩阵 $X, \hat{X}_1, \hat{X}_2, W, F, \hat{F}_1, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{N}, \hat{J}_{1i}, \hat{J}_{2i}$ 及对称矩阵 $R_{1i}, \hat{R}_{1i}, \hat{H}_{2i}, i = 1, \dots, N$ ,使得以下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} & \Theta_{15} \\ * & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \Theta_{24} & W^T B_i \\ * & * & \Theta_{33} & \Theta_{34} & \varepsilon \Theta_{15} \\ * & * & * & \Theta_{44} & \varepsilon W^T B_i \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} R_{1i} & \hat{J}_{1i} & L_i^T \\ * & \hat{H}_{2i} & L_i^T - \hat{N}^T \\ * & * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0, \forall i = 1, \dots, N. \quad (17)$$

其中:

$$\Theta_{11} = A_i^T X + X^T A_i + C_i^T F^T + F C_i + 2\alpha R_{1i},$$

$$\Theta_{12} = A_i^T W + \hat{Q}_2 + F C_i + X^T A_i + 2\alpha \hat{J}_{1i},$$

$$\Theta_{13} = \hat{R}_{1i} - \hat{X}_1^T + \varepsilon(A_i^T \hat{X}_1 + C_i^T \hat{F}_1^T),$$

$$\Theta_{14} = \hat{J}_{1i} - \hat{S}_i^T + \varepsilon A_i^T W, \Theta_{15} = X^T B_i + F D_i,$$

$$\Theta_{22} = A_i^T W + W^T A_i + 2\alpha \hat{H}_{2i},$$

$$\Theta_{23} = \hat{J}_{2i}^T - I + \varepsilon(\hat{Q}_1^T + A_i^T \hat{X}_1 + C_i^T \hat{F}_1^T),$$

$$\Theta_{24} = \hat{H}_{2i} - W + \varepsilon A_i^T W, \Theta_{33} = -\varepsilon(\hat{X}_2 + \hat{X}_2^T),$$

$$\Theta_{34} = -\varepsilon(\hat{S}_2^T + I), \Theta_{44} = -\varepsilon(W + W^T).$$

进一步,相应的滤波器矩阵为

$$A_F = M \hat{Q}_2, B_F = M F, C_F = \hat{N}. \quad (18)$$

其中 $M = (\hat{S}_1 - X)^{-T}$ .

**证** 定义矩阵 $\Xi$ ,并将矩阵 $G$ 与 $G^{-1}$ 做如下分解:

$$\Xi = \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} X & \square \\ U & \square \end{bmatrix}, G^{-1} = \begin{bmatrix} Y & \square \\ V & \square \end{bmatrix}. \quad (19)$$

其中: $X, Y$ 是 $n \times n$ 的矩阵,“ $\square$ ”表示在结果中不起决定性作用的矩阵块.由于 $GG^{-1} = I$ ,故

$$G \cdot \begin{bmatrix} Y \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \text{选取变换阵 } \Pi_1 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & V \end{bmatrix}, \text{则}$$

$$\Pi_2 = G \Pi_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ U & 0 \end{bmatrix}. \text{引进变量替换:}$$

$$\begin{cases} \Psi_1 = \begin{bmatrix} Q & F \\ N & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^T & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ \Phi_1 = \begin{bmatrix} R_{1i} & J_{1i} \\ * & H_{1i} \end{bmatrix} = \Pi_1^T P_i \Pi_1, \\ S = Y^T X + V^T U. \end{cases} \quad (20)$$

并定义如下变量:

$$\begin{cases} \hat{\Psi}_1 = \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 & \hat{F}_1 \\ \hat{N}_1 & 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Y^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \Psi_1 \begin{bmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ \hat{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \hat{R}_{1i} & \hat{J}_{1i} \\ * & \hat{H}_{1i} \end{bmatrix} := \Phi_1 \begin{bmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{bmatrix}, \\ \hat{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \hat{R}_{2i} & \hat{J}_{2i} \\ * & \hat{H}_{2i} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y^{-T} \end{bmatrix} \hat{\Phi}_1, \\ \hat{Q}_2 := QY^{-1}, \hat{S}_1 := Y^{-T}S, \hat{S}_2 := Y^{-T}SY^{-1}, \\ \hat{X}_1 := XY^{-1}, \hat{X}_2 := Y^{-T}XY^{-1}. \end{cases} \quad (21)$$

必要性. 将式(9)分别先后左乘矩阵  $T_3 = \text{diag}\{\Pi_1^T, \Pi_1^T, I\}$  和右乘矩阵  $T_3^T$ 、左乘矩阵  $T_5 = \text{diag}\{I, Y^{-1}, Y^{-1}, Y^{-1}, I\}$  和右乘矩阵  $T_5^T$ ; 同时将式(10)分别先后左乘矩阵  $T_4 = \text{diag}\{\Pi_1^T, I\}$  和右乘矩阵  $T_4^T$ 、左乘矩阵  $T_6 = \text{diag}\{I, Y^{-1}, I\}$  和右乘矩阵  $T_6^T$ ; 并将式(21)中的新变量替换乘积项, 记  $W := Y^{-1}$ , 可得LMI(16)和(17). 必要性得证.

充分性. 由式(16)可得以下不等式成立,

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_2 + \hat{X}_2^T & \hat{S}_2^T + I \\ * & W + W^T \end{bmatrix} > 0, \quad (22)$$

对式(22)分别左乘矩阵  $T_7 = \text{diag}\{Y^T, Y^T\}$  和右乘矩阵  $T_7^T$ , 得下式:

$$\begin{bmatrix} X + X^T & S^T + Y^T Y \\ * & Y + Y^T \end{bmatrix} > 0. \quad (23)$$

由式(23)可知分块矩阵  $X$  与  $Y$  非奇异, 对上式分别左乘矩阵  $T_8 = [Y^{-T} \quad -I]$  和右乘矩阵  $T_8^T$ , 可得

$$(Y^T X - S)Y + Y^T(Y^T X - S)^T > 0,$$

故矩阵  $Y^T X - S$  也为非奇异矩阵, 由式(20)的变量替换可知, 矩阵  $U$  与矩阵  $V$  亦为非奇异矩阵. 因此滤波器参数矩阵  $\Xi$ , 矩阵  $U$  及  $V$  可通过式(20)唯一确定, 且矩阵  $\Pi_1, \Pi_2, T_3, T_4, T_5$  和  $T_6$  都可逆. 式(16)与式(17)通过恰当的矩阵变换等价于

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} & \Pi_1^T G^T \tilde{B}_i \\ * & -\varepsilon \Pi_1^T (G + G^T) \Pi_1 & \varepsilon \Pi_1^T G^T \tilde{B}_i \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^T P_i \Pi_1 & \Pi_1^T C_i^T \\ * & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_{11} &:= \Pi_1^T \tilde{A}_i^T G \Pi_1 + \Pi_1^T G^T \tilde{A}_i \Pi_1 + 2\alpha \Pi_1^T P_i \Pi_1, \\ \Upsilon_{12} &:= \Pi_1^T P_i \Pi_1 - \Pi_1^T G^T \Pi_1 + \varepsilon \Pi_1^T \tilde{A}_i^T G \Pi_1. \end{aligned}$$

对式(24)分别左乘矩阵  $T_3^{-1}$  和右乘矩阵  $T_3^{-T}$ , 可得式(9); 同时对式(25)分别左乘矩阵  $T_4^{-1}$  和右乘矩阵  $T_4^{-T}$ , 可得式(10).

进一步, 由式(20)和式(21)可得

$$\begin{cases} A_F = U^{-T} \hat{Q}_2 Y V^{-1}, \\ B_F = U^{-T} F, \\ C_F = \hat{N} Y V^{-1}, \end{cases} \quad (26)$$

将滤波器(3)描述为从  $y(t)$  到  $z_F(t)$  的传递函数形式  $T_{z_F y}(s) = C_F(sI - A_F)^{-1} B_F$ , 通过变量替换可得

$$T_{z_F y}(s) = \hat{N}(sI - M \hat{Q}_2)^{-1} M F,$$

故式(18)成立.

根据定理2的结论, 由于式(16)和式(17)关于  $\gamma^2$  是线性的, 故最优多目标广义  $H_2/\alpha$  稳定鲁棒滤波器可通过求解以下最小化问题得到:

$$\begin{cases} \min \rho, \\ \text{s.t. 式(20)(21), 当 } \rho = \gamma^2. \end{cases} \quad (27)$$

如果优化问题(27)有解  $\rho^*$ ,  $A_F^*$ ,  $B_F^*$  和  $C_F^*$ , 那么  $\gamma^* = \sqrt{\rho^*}$  是滤波误差系统广义  $H_2$  性能的最小上界, 且  $A_F^*$ ,  $B_F^*$ ,  $C_F^*$  是相应的最优滤波器参数矩阵.

### 5 数值算例(Illustrative examples)

例1 考虑系统(1), 其中的系数矩阵如下<sup>[3]</sup>:

$$A(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -11 & -2.2 + \sigma_1 \end{bmatrix},$$

$$B(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 + \sigma_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \ 1], D(\sigma_2) = [0 \ 1 + \sigma_2], L = [0 \ 1].$$

不确定参数满足  $-1 \leq \sigma_1 \leq 1, 0 \leq \sigma_2 \leq 1$ . 取  $\alpha = 0.5$ , 通过求解优化问题(27), 可得到最优系统广义  $H_2$  性能  $\gamma^* = 0.4574$ , 相应的广义  $H_2/\alpha$  稳定鲁棒滤波器参数矩阵为

$$A_F^* = \begin{bmatrix} -1.9985 & 10.0070 \\ -11.0103 & -2.2000 \end{bmatrix},$$

$$B_F^* = \begin{bmatrix} 1.0003 \\ 0.7987 \end{bmatrix},$$

$$C_F^* = [1.0021 \quad -0.0014].$$

文献[3]对于该系统有广义  $H_2$  性能  $\gamma^* = 1.2034$ . 由此可见, 本文方法所得结果的保守性更小.

为了进一步说明结合  $\alpha$  区域极点配置的广义  $H_2$  滤波器设计的优点, 针对无扰动输入的滤波误差动态  $\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(\sigma) \tilde{x}(t)$ , 图1给出系统在初始状态  $\tilde{x}(t) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  下, 不考虑区域极点配置和将极点配置于  $\alpha = 0.5$  的左半平面时, 状态分量  $x_{F1}(t)$  的响应. 由图可知, 当滤波误差系统具有衰减度  $\alpha = 0.5$  时,  $x_{F1}(t)$  有较好的时间相应与阻尼比, 即广义  $H_2/\alpha$  稳定鲁棒滤波器有更好的动态性能.

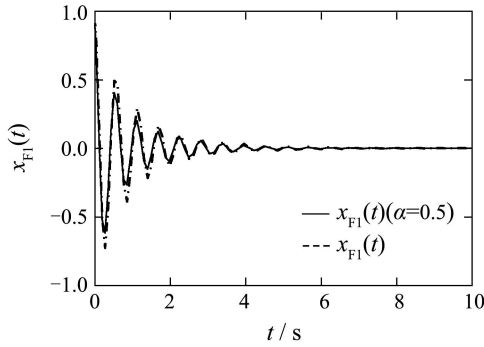


图1 滤波误差系统状态分量 $x_{F1}(t)$ 的动态响应  
Fig. 1 Dynamic response of  $x_{F1}(t)$

例2 考虑如图2所示的质量阻尼系统<sup>[8]</sup>.

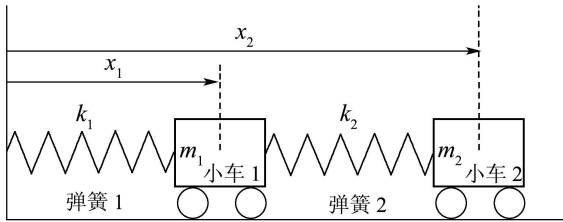


图2 质量阻尼系统  
Fig. 2 Mass-spring system

两小车质量分别为 $m_1 = 1, m_2 = 0.5$ , 弹簧弹性系数为 $k_1 = k_2 = 1, 0.5 \leq \sigma_1 \leq 3.5, 0.5 \leq \sigma_2 \leq 1.5$ , 可得如下系统模型:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -\sigma_1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2\sigma_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_2,$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x + \sigma_2, \quad z = [0 \ 1 \ 0 \ 0]x.$$

对于该系统, 目标是设计最优广义 $H_2/\alpha$ 稳定滤波器, 使得当存在不确定粘性摩擦系数 $\sigma_1$ 和测量噪声 $\sigma_2$ 时, 滤波误差系统鲁棒 $\alpha$ 稳定, 且小车2位置的估计误差有最小广义 $H_2$ 性能指标. 取 $\alpha = 0.1$ , 通过求解优化问题(27), 可得滤波误差系统的广义 $H_2$ 性能 $\gamma^* = 0.1118$ , 相应的滤波器参数矩阵为

$$A_F^* = \begin{bmatrix} -0.0076 & -0.0074 & 0.9875 & -0.0091 \\ -0.0003 & -0.0017 & -0.0009 & 1.0042 \\ -3.0021 & -1.0053 & -2.0036 & 0.0034 \\ 2.0016 & -2.0304 & 0.0023 & -3.9978 \end{bmatrix},$$

$$B_F^* = [0 \ 0 \ 1 \ -0.0016]^T, \quad C_F^* = [0 \ 1 \ -0.0003 \ 0].$$

另外, 对该例应用文献[3]的方法, 无可行滤波器. 对比显示, 本文提出的方法具有更广的适用性.

## 6 结论(Conclusions)

本文基于参数依赖Lyapunov函数方法, 针对具有凸多面体不确定性的连续时间系统, 提出了一种新的多目标广义 $H_2/\alpha$ 稳定滤波器设计方法. 最后的算例表明, 本文设计的多目标鲁棒滤波器在确保系统有广义 $H_2$ 性能的同时也保证了系统状态响应具有衰减度 $\alpha$ , 同时本文的方法在一定程度上减小了系统的保守性.

## 参考文献(References):

- [1] FRIDMAN E, SHAKED U. A new  $H_\infty$  filter design for linear time delay systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(11): 2839 – 2843.
- [2] WU A G, DUAN G R. Robust  $H_\infty$  estimation for continuous-time polytopic uncertain systems[J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2005, 3(4): 383 – 389.
- [3] PALHARES R M, PERES P L D. Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance—an LMI approach[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 851 – 858.
- [4] ROTEA M A. The generalized  $H_2$  control problem[J]. *Automatica*, 1993, 29(2): 373 – 385.
- [5] OLIVEIRA R C L F, PERES P L D. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions[J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(1): 52 – 61.
- [6] GEROMEL J C, DE OLIVEIRA M C.  $H_2$  and  $H_\infty$  robust filtering for convex bounded uncertain systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(1): 100 – 107.
- [7] CHILALI M, GAHINET P.  $H_\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 358 – 363.
- [8] IWASAKI T. Robust performance analysis for systems with structured uncertainty[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1996, 6(2): 85 – 99.

## 作者简介:

苏子漪 (1982—), 女, 博士研究生, 研究方向为鲁棒控制及滤波等, E-mail: ziyi.su@163.com;

俞立 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为网络控制系统、鲁棒控制、时滞系统等, E-mail: luy@zjut.edu.cn;

宋洪波 (1984—), 男, 博士研究生, 研究方向为网络控制系统等, E-mail: di7gan\_shb@hotmail.com;

张文安 (1982—), 男, 博士研究生, 研究方向为网络控制系统、时滞系统等.