

不完全量测下随机有偏离散系统的Cramér-Rao下界

刘 锐, 戚国庆, 陈 黎, 盛安冬

(南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 针对含有不完全随机有偏测量序列的状态估计问题, 给出了统计意义下的修正递推估计误差方差Cramér-Rao下界(CRLB)求解算法. 首先建立了不完全随机有偏量测离散系统的数学模型, 进而推导了枚举的CRLB和统计意义的CRLB计算式, 该统计意义的CRLB为枚举CRLB的下界, 其计算量远小于枚举CRLB求解的计算量. 最后, 以给定探测概率和偏差发生率下的一类光电跟踪系统为例, 进行了数字仿真.

关键词: 状态估计; 不完全量测; 随机有偏; Cramér-Rao下界

中图分类号: TP13 文献标识码: A

Cramér-Rao lower bounds for stochastic-bias discrete-time system with incomplete measurements

LIU Rui, QI Guo-qing, CHEN Li, SHENG An-dong

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: A modified recursive Cramér-Rao lower bound(CRLB) of the statistical estimation error variance is derived for the state estimation with incomplete and stochastic-biased measurement sequences. Firstly, a mathematical model of the discrete-time system with incomplete and stochastic-biased measurements is built; and then, the enumeration CRLB and the statistical CRLB are derived, respectively. The proposed statistical CRLB is a lower bound of the enumeration CRLB, but its calculation complexity is far lower than that of the enumeration CRLB. Simulation is performed in an optical-electrical tracking system with pre-specified detection probability and biased occurrence probability.

Key words: state estimation; incomplete measurements; stochastic-bias; Cramér-Rao lower bound

1 引言(Introduction)

观测系统的不完全随机有偏量测, 一方面是指因外部因素引起以一定“探测概率”接收目标状态信息; 另一方面是指由于自身原因以一定“偏差发生率”出现观测数据有偏的现象. 在讨论这样一个观测系统的最优性能时, 为了避免不同的滤波方法带来的影响, 本文引入在2阶误差性能指标意义下, Cramér-Rao下界(简称CRLB), 比较系统可达到的最优误差方差性能指标.

目前, 利用CRLB进行估计性能分析的文献可分为两类:

一类是在完全量测情形下利用CRLB来分析系统的性能. 如: 文献[1~8]主要是利用CRLB作为工具用于各类系统的设计与评估; 文献[9]给出了离散系统滤波后验CRLB递推计算公式, 使得CRLB的计算更加简便. 文献[10]进行了有偏纯方位目标跟踪的CRLB研究, 很好地解决了量测确定有偏情形下的

状态估计问题.

另一类则是在不完全量测下系统的CRLB的研究, 最早的代表性文献是1969年Nahi N E提出的基于最小均方差的不完全量测递归估计器; 2002年Farina A等^[11]给出了探测概率小于1情形下(即不完全量测), 计算量随采样时间呈指数型增长CRLB下界的穷举算法, 该算法不利于工程应用; 2004年Hernandez M等^[12]比较了带信息缩减因子的CRLB法和穷举CRLB法, 首次给出了一种新的简单实用的CRLB算法, 但是该算法未考虑量测有偏情形对估计误差方差的影响.

在工程系统中的有偏现象具有两类特点: a) 有偏量出现的不确定性, 且有偏量出现时服从正态分布. 如激光光轴的松动导致的偏离、角度传感器的连接/固定装置松动等等; b) 有偏量存在的确定性(包括有偏为常值或时变的), 如: 不可恢复的形变、设备在不可靠状态下的持续运行等等.

文献[10]给出了一种有偏完全量测信息下的CRLB,且有偏量在观测时间序列中是固定存在的情形.从现有的文献看,研究主要是针对“是否观测到”的问题,而考虑a)类有偏(随机有偏)下的不完全量测的文献相对较少.受已有学者成果(文献[10~12])的启发,结合实际工程中的应用,本文对不完全量测下随机有偏离散系统的CRLB进行了深入的分析,并给出了修正递推估计误差方差CRLB下界的求解算法.

2 不完全随机有偏量测的数学模型 (Mathematical model of incomplete and stochastic-bias measurements)

不完全有偏量测的离散线性系统描述为

$$X_{k+1} = AX_k + \omega_k, \quad (1)$$

$$Y_k = d_k CX_k + d_k(1 - l_k)A_k + v_k. \quad (2)$$

其中: X_k 是 k 时刻的 n 维目标状态, A 是适维的状态转移矩阵且 A 可逆, ω 是零均值方差为 Q 的高斯白噪声; C 为观测系统的量测矩阵.

在不完全有偏量测下,随机变量 v_k 服从以下分布:

$$v_k \sim \begin{cases} N(0, R_{v_k}); & d_k = 1, \\ N(0, \sigma^2 I); & \sigma \rightarrow \infty, d_k = 0. \end{cases} \quad (3)$$

其中: R_{v_k} 为 k 时刻的量测噪声方差;离散随机变量 d_k 服从0-1分布,取1的概率为 λ ,表示 k 时刻量测到状态数据;取0的概率为 $1 - \lambda$,表示 k 时刻没有量测到状态数据.离散随机变量 l_k 服从0-1分布,取1的概率为 η ,表示 k 时刻观测设备工作良好未发生量测有偏现象;取0的概率为 $1 - \eta$,表示 k 时刻观测设备发生量测有偏现象.

d_k 和 l_k 两随机变量互不相关,满足

$$\text{cov}(d_k, l_k) = \begin{pmatrix} \lambda(1 - \lambda) & 0 \\ 0 & \eta(1 - \eta) \end{pmatrix}.$$

这里,当 $d_k = 0$,即没有探测到目标时,对应的 σ 取极限形式: $\sigma \rightarrow \infty$.当 $d_k = 1$ 且 $l_k = 0$,即探测到目标,但观测设备出现可预知其统计特性的偏差问题(如工程中的激光轴偏离,轴角编码器的轴连接部位松动等),式(2)出现的偏移量 A_k 服从 $N(\mu, R_{A_k})$ 分布,该分布能很好反映观测设备偏移发生时的特点,即在期望值附近随机变化,该随机偏移量与量测噪声无关.

3 不完全随机有偏量测下的递推CRLB (Recursive CRLB with incomplete and stochastic-bias measurements)

为了方便分析,考虑到随机有偏量与测量噪声无

关,对式(2)观测方程做如下变形:

$$Y_k = CX_k + \tilde{v}_k, \quad (4)$$

$$\tilde{v}_k \sim \begin{cases} N(0, R_{v_k}); & d_k = 1, l_k = 1, \\ N(\mu, R_{A_k} + R_{v_k}), & d_k = 1, l_k = 0, \\ N(0, \sigma^2 I); & d_k = 0, \sigma \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5)$$

由式(1)(4)(5)构成的系统,其物理意义与原系统一样.

根据系统模型式(1)(4),其估计误差协方差阵满足

$$P_{k|k} = E[(\hat{X}_k - X_k)(\hat{X}_k - X_k)^T] \geq J_k^{-1}. \quad (6)$$

其中: \hat{X}_k 为状态变量 X_k 的一个无偏估计,即 $\hat{X}_k \triangleq E[X_k | Y_k, d_k, l_k]$; J_k 为Fisher信息矩阵(FIM);不等式表示 $P_{k|k} - J_k^{-1}$ 是一个半正定矩阵;CRLB是FIM的逆,即 $C_k \triangleq J_k^{-1}$.

本文借鉴文献[9]的方法,在随机有偏情形下,推导了相应的离散型滤波信息阵 J_k 一个递推计算公式:

$$J_{k+1} = D_k^{22} - D_k^{21}(J_k + D_k^{11})^{-1}D_k^{12}, \quad (7)$$

$$D_k^{11} = E[-\Delta_{X_k}^{X_k} \log p(X_{k+1} | X_k)], \quad (8)$$

$$D_k^{12} = E[-\Delta_{X_k}^{X_{k+1}} \log p(X_{k+1} | X_k)], \quad (9)$$

$$D_k^{21} = E[-\Delta_{X_{k+1}}^{X_k} \log p(X_{k+1} | X_k)] = [D_k^{12}]^T, \quad (10)$$

$$D_k^{22} = E[-\Delta_{X_{k+1}}^{X_{k+1}} \log p(X_{k+1} | X_k)] + E[-\Delta_{X_{k+1}}^{Y_{k+1}} \log p(Y_{k+1} | X_{k+1}, d_{k+1}, l_{k+1})]. \quad (11)$$

其中: $\Delta_{X_k}^{X_{k+1}}(\cdot)$ 表示矩阵值函数 (\cdot) 先对矩阵变量 X_k 求偏导,再对 X_{k+1} 求偏导.

根据系统模型(1)(4)(5)可知

$$-\log p(X_{k+1} | X_k) = c_1 + \frac{1}{2}(X_{k+1} - AX_k)^T Q^{-1}(X_{k+1} - AX_k), \quad (12)$$

$$-\log p(Y_{k+1} | X_{k+1}, d_{k+1}, l_{k+1}) = \begin{cases} c_2 + \frac{1}{2}F_{k+1}^T R_{v_{k+1}}^{-1} F_{k+1}, & \text{如果 } d_{k+1} = 1, l_{k+1} = 1; \\ c_3 + \frac{1}{2}H_{k+1}^T (R_{A_{k+1}} + R_{v_{k+1}})^{-1} H_{k+1}, & \text{如果 } d_{k+1} = 1, l_{k+1} = 0; \\ + \infty, & \text{如果 } d_{k+1} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

其中: $F_{k+1} = Y_{k+1} - CX_{k+1}$, $H_{k+1} = Y_{k+1} - CX_{k+1} - \mu$, c_1, c_2, c_3 为常数.

将式(13)简化为

$$\begin{aligned}
 & -\log p(Y_{k+1} | X_{k+1}, d_{k+1}, l_{k+1}) = \\
 & c_4(d_{k+1}, l_{k+1}) + \frac{1}{2}[Y_{k+1} - CX_{k+1} - \\
 & (1 - l_{k+1})\mu]^T \times R^{-1} \times [Y_{k+1} - \\
 & CX_{k+1} - (1 - l_{k+1})\mu]. \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中: $R^{-1} = [d_{k+1}R_{v_{k+1}} + d_{k+1}(1 - l_{k+1})R_{A_{k+1}} + (1 - d_{k+1})\sigma^2 I]^{-1}$, $c_4(d_{k+1}, l_{k+1})$ 为随 d_{k+1}, l_{k+1} 的取值而变化的常数, 且 $\sigma \rightarrow \infty$.

那么式(8)~(11)的取值为

$$\begin{cases}
 D_k^{11} = A^T Q^{-1} A, \\
 D_k^{12} = -A^T Q^{-1}, \\
 D_k^{21} = -Q^{-1} A, \\
 D_k^{22} = Q^{-1} + C^T [d_{k+1} l_{k+1} R_{v_{k+1}} + \\
 d_{k+1} (1 - l_{k+1}) (R_{A_{k+1}} + R_{v_{k+1}}) + \\
 (1 - d_{k+1}) \sigma^2 I]^{-1} C.
 \end{cases} \quad (15)$$

代入式(7)经整理后得

$$\begin{aligned}
 J_{k+1} = & Q^{-1} + d_{k+1} l_{k+1} C^T R_{v_{k+1}}^{-1} C + d_{k+1} (1 - \\
 & l_{k+1}) C^T (R_{A_{k+1}} + R_{v_{k+1}})^{-1} C - \\
 & Q^{-1} A (J_k + A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

那么, 理想(枚举)CRLB的FIM递推表达式为

$$\begin{aligned}
 J_{k+1}(S_i) = & Q^{-1} + d_{k+1}(S_i) l_{k+1}(S_i) C^T R_{v_{k+1}}^{-1} C + \\
 & d_{k+1}(S_i) [1 - l_{k+1}(S_i)] C^T (R_{A_{k+1}} + R_{v_{k+1}})^{-1} C - \\
 & Q^{-1} A [J_k(S_i) + A^T Q^{-1} A]^{-1} A^T Q^{-1}, \quad (17)
 \end{aligned}$$

则理想CRLB^[11]为

$$\begin{aligned}
 C_k(\text{ENUM}) \triangleq & E_{S_i} [J_k(S_i)^{-1}] = \\
 & \sum_{i=1}^{2^{2k}} [J_k(S_i)^{-1}] \cdot P_k(S_i). \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中: S_i 为 k 采样时刻 d_k, l_k 构成的探测偏差序列, 共 2^{2k} 个序列, $P_k(S_i)$ 为各序列所占的权重.

由于理想CRLB的计算量随采样点个数的增加呈指数型增长, 不利于工程设计, 因此下一章节给出一种简单使用的CRLB计算方法.

4 非统计意义下的 CRLB 下界(Statistical CRLB)

一般情况下, 无法预先知道“数据丢失序列”和“观测设备出现偏差的序列”, 因此其CRLB是随机的, 可以通过理想(枚举)CRLB方法得到, 但是该算法计算量随采样个数指数增长. 为了能在试验前给出系统估计特性的性能, 本文进行了一定的

近似, 即对统计意义下CRLB进行分析时用探测率 λ 替换探测/丢失序列: $d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots$ 和未发生偏差概率 η 替换有偏发生序列: $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots, l_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, d_k, l_k$ 组成的序列表示为 S_i .

引理 1 设方阵 A, B, C, D , 若 A 和 B 可逆, 则

$$\begin{aligned}
 (A + DBE)^{-1} = \\
 A^{-1} - A^{-1} D (B^{-1} + EA^{-1} D)^{-1} EA^{-1}.
 \end{aligned}$$

根据引理1, 式(16)改写为

$$\begin{aligned}
 J_{k+1} = \\
 (Q + A(J_k)^{-1} A^T)^{-1} + d_{k+1} l_{k+1} C^T R_{v_{k+1}}^{-1} C + \\
 d_{k+1} (1 - l_{k+1}) C^T (R_{A_{k+1}} + R_{v_{k+1}})^{-1} C. \quad (19)
 \end{aligned}$$

定义 \bar{J}_k 为统计意义下的FIM, 式(19)变化为

$$\begin{aligned}
 \bar{J}_k = & (Q + A(\bar{J}_{k-1})^{-1} A^T)^{-1} + \\
 & \lambda \eta C^T R_{v_k}^{-1} C + \\
 & \lambda (1 - \eta) C^T (R_{A_k} + R_{v_k})^{-1} C. \quad (20)
 \end{aligned}$$

则不完全随机有偏量测的递推CRLB下界为

$$\begin{aligned}
 C_{\lambda, \eta, k} \triangleq & (\bar{J}_k)^{-1} = \\
 & \{ [Q + A(\bar{J}_{k-1})^{-1} A^T]^{-1} + \\
 & \lambda \eta C^T R_{v_k}^{-1} C + \\
 & \lambda (1 - \eta) C^T (R_{A_k} + R_{v_k})^{-1} C \}^{-1}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

引理 2 若 X 为一随机正定矩阵, 有

$$E[X^{-1}] \geq (E[X])^{-1}, \quad (22)$$

当 X 为常数时取等号.

引理 3 矩阵 X, Y, Z , 如果 $X > Y$ 且 Z 非奇异, 有

$$Z^T X Z > Z^T Y Z. \quad (23)$$

引理 4 矩阵 X, Y 可逆, 若 $X > Y > 0$, 有

$$Y^{-1} > X^{-1}. \quad (24)$$

定理 1 不完全随机有偏量测, 相同前提下, 统计意义的CRLB为理想(枚举)CRLB的下界. 即 $C_{k+1}(\text{ENUM}) > C_{\lambda, \eta, k+1}$.

证 采用数学归纳法, 定理1可转变为证明:

如果 $\exists k$ 使得

$$\begin{cases}
 C_k(\text{ENUM}) \geq C_{\lambda, \eta, k}, \\
 E_{S_i} [J_k(S_i)] \leq \bar{J}_k
 \end{cases} \quad (25)$$

成立, 那么有

$$\begin{cases}
 C_{k+1}(\text{ENUM}) > C_{\lambda, \eta, k+1}, \\
 E_{S_i} [J_{k+1}(S_i)] < \bar{J}_{k+1}
 \end{cases} \quad (26)$$

成立.

假设1 目标先验初始方差 $C_0 > 0$, 且 D_k^{12} 可逆, 那么 $\bar{J}_k > 0$, $J_k(S_i) > 0$ 恒成立.

假设2 $C_0(\text{ENUM})=C_{\lambda,\eta,0}=C_0$, 且 $E_{S_i}[J_0(S_i)] = J_0 = C_0^{-1}$.

根据引理3和式(7), 对于任意的探测和偏差序列 S_i 有

$$[D_k^{12}(S_i)]^T [J_k(S_i) + D_k^{11}(S_i)]^{-1} D_k^{12}(S_i) > 0. \quad (27)$$

结合引理2可知

$$E_{S_i} \{ [D_k^{12}(S_i)]^T [J_k(S_i) + D_k^{11}(S_i)]^{-1} D_k^{12}(S_i) \} > [D_k^{12}(S_i)]^T \{ E_{S_i} [J_k(S_i)] + D_k^{11}(S_i) \}^{-1} D_k^{12}(S_i). \quad (28)$$

而考虑到命题假设条件式(25)与引理4有

$$\{ E_{S_i} [J_k(S_i)] + D_k^{11}(S_i) \}^{-1} \geq [\bar{J}_k + D_k^{11}(S_i)]^{-1}. \quad (29)$$

那么结合引理3和式(28)(29)可得

$$\begin{aligned} E_{S_i} \{ [D_k^{12}(S_i)]^T [J_k(S_i) + D_k^{11}(S_i)]^{-1} D_k^{12}(S_i) \} > \\ [D_k^{12}(S_i)]^T [\bar{J}_k + D_k^{11}(S_i)]^{-1} D_k^{12}(S_i) = \\ (D_{\lambda,\eta,k}^{12})^T [\bar{J}_k + D_{\lambda,\eta,k}^{11}]^{-1} D_{\lambda,\eta,k}^{12}. \end{aligned} \quad (30)$$

根据式(15)可知, D_k^{11} , D_k^{12} , D_k^{21} 均与 d_k, l_k 无关, 也与探测概率 λ 和偏差发生率 η 无关, 因而有

$$\begin{cases} D_k^{11}(S_i) = D_{\lambda,\eta,k}^{11} = D_k^{11}, \\ D_k^{12}(S_i) = D_{\lambda,\eta,k}^{12} = D_k^{12}, \\ D_k^{21}(S_i) = D_{\lambda,\eta,k}^{21} = D_k^{21}. \end{cases} \quad (31)$$

特别地,

$$\begin{aligned} E_{S_i} [D_k^{22}(S_i)] = \\ E_{S_i} \{ Q^{-1} + d_{k+1}(S_i) l_{k+1}(S_i) C^T R_{v_{k+1}}^{-1} C + \\ d_{k+1}(S_i) [1 - l_{k+1}(S_i)] C^T (R_{A_{k+1}} + R_{v_{k+1}})^{-1} C \} = \\ Q^{-1} + \lambda \eta C^T R_{v_{k+1}}^{-1} C + \lambda (1 - \\ \eta) C^T (R_{A_{k+1}} + R_{v_{k+1}})^{-1} C = D_{\lambda,\eta,k}^{22}. \end{aligned} \quad (32)$$

结合不等式(30)和式(32):

$$\begin{aligned} E_{S_i} [J_{k+1}(S_i)] = \\ E_{S_i} \{ D_k^{22}(S_i) - \\ D_k^{21}(S_i) [J_k(S_i) + D_k^{11}(S_i)]^{-1} D_k^{12}(S_i) \} = \\ E_{S_i} [D_k^{22}(S_i)] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{S_i} \{ D_k^{21}(S_i) [J_k(S_i) + D_k^{11}(S_i)]^{-1} D_k^{12}(S_i) \} < \\ D_{\lambda,\eta,k}^{22} - (D_{\lambda,\eta,k}^{12})^T [\bar{J}_k + D_{\lambda,\eta,k}^{11}]^{-1} D_{\lambda,\eta,k}^{12} = \\ \bar{J}_{k+1}, \end{aligned} \quad (33)$$

因此

$$\begin{aligned} C_{k+1}(\text{ENUM}) = E_{S_i} [J_{k+1}(S_i)^{-1}] > \\ \{ E_{S_i} [J_{k+1}(S_i)] \}^{-1} > \bar{J}_{k+1}^{-1} = C_{\lambda,\eta,k+1}. \end{aligned} \quad (34)$$

综上, 命题成立. 证毕.

即在不完全量测系统随机有偏条件下, 统计意义的CRLB存在过优的现象. 其原因在于统计意义下的CRLB没有考虑数据丢失和数据有偏发生的序列位置, 而理想CRLB通过各序列出现的权重 $P_k(S_i)$ 将“丢失”和“有偏”出现的位置影响也带入到CRLB中, 因此统计意义下的CRLB是理想CRLB的一种近似, 其优点是计算量远远小于理想CRLB.

定理2 相同前提下, 不完全随机有偏量测CRLB大于不完全无偏量测CRLB. 即当 $0 < \lambda < 1, 0 < \eta < 1$ 时, 有下列不等式:

$$\tilde{R}_k = [\lambda \eta R_{v_k}^{-1} + \lambda (1 - \eta) (R_{A_k} + R_{v_k})^{-1}]^{-1} > R_{v_k} / \lambda \quad (35)$$

恒成立.

证 因为

$$\lambda \eta R_{v_k}^{-1} + \lambda (1 - \eta) (R_{A_k} + R_{v_k})^{-1} > 0$$

恒成立;

又因为

$$\begin{aligned} I - [\lambda \eta R_{v_k}^{-1} + \lambda (1 - \eta) (R_{A_k} + R_{v_k})^{-1}] \cdot R_{v_k} / \lambda = \\ (1 - \eta) I - (1 - \eta) (R_{A_k} + R_{v_k})^{-1} R_{v_k} > \\ (1 - \eta) I - (1 - \eta) (R_{A_k} + R_{v_k})^{-1} (R_{v_k} + R_{A_k}) = 0. \end{aligned}$$

所以不等式(35)成立. 证毕.

从定理2可知, 不完全量测随机有偏系统下的最优估计性能低于不完全量测无偏系统下的CRLB.

5 实例仿真(Simulation)

以某型光电系统跟踪典型航路为例. 系统参数为

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} T^4/4 & 0 \\ 0 & T^2 \end{bmatrix}, \\ T = 0.2 \text{ s}, \quad C = [1 \ 0]. \end{aligned}$$

标准航路参数: 目标航速200 m/s, 航高1000 m, 航捷500 m. 设目标沿 x 轴平行飞行, 初始状态为

$$X_0 = [-6000 \text{ m} \quad 200 \text{ m/s}]^T, J_0 = 0.$$

光电跟踪设备参数为: 先验探测概率为 $\lambda = 0.8$, 先验偏差发生率为 $(1 - \eta) = 0.1$. 测角均方差 2 mil, 测距均方差 5 m. 光电系统偏差发生时, x 轴方向有偏均值 20 m, 均方差 5 m.

观测设备的量测噪声需从球坐标系转换到笛卡尔坐标系下, 转换后目标沿 x 轴方向上的测量方差, 如图 1 所示. 同一条航路目标斜距越近, x 轴方向上的测量方差越小, 即测量噪声方差为时变的.

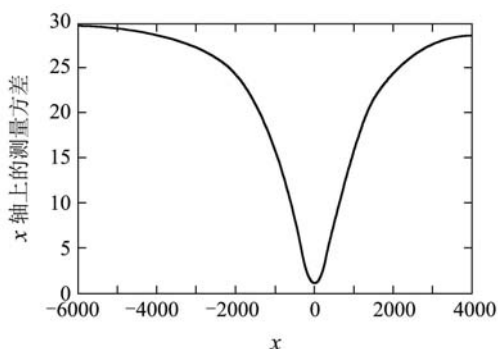


图 1 目标测量方差沿 x 轴方向的变化曲线

Fig. 1 Curve of target measurement variances along x -axis

按照式(21)迭代, 给出探测概率 $\lambda = 1$, 不同偏差发生率 $(1 - \eta)$ 下的 CRLB 下界变化曲线, 如图 2 所示.

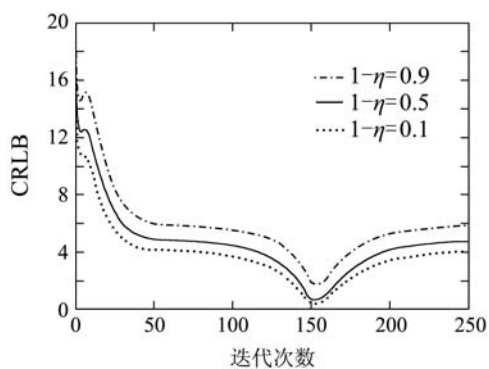


图 2 CRLB 与偏差发生率 $(1 - \eta)$ 的关系

Fig. 2 the relation between CRLB and $(1 - \eta)$

由图 2 可知, 偏差发生率 $(1 - \eta)$ 越小, 其 CRLB 越小, 即 CRLB 受随机有偏量的方差影响较小. 为了便于对比, 截取中、后段仿真结果(从迭代 50 步开始).

图 3 给出了探测概率与偏差发生率对 CRLB 的影响, 从图中可知, $\lambda = 1, \eta = 1$ 时, CRLB 估计方差最小, 其物理意义为完全无偏量测下的观测系统最优估计性能; $\lambda = 0.8, \eta = 0.9$ 时, CRLB 估计方差较其他 3 种情况更大. 最后给出这两种情况下在特征点上的数值如表 1 所示.

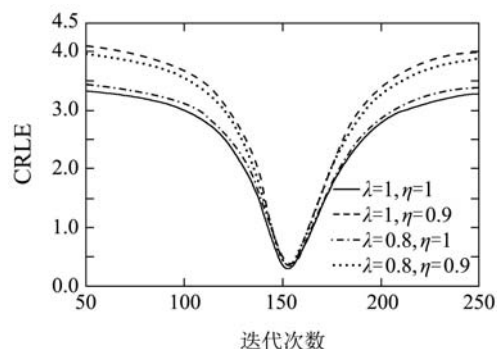


图 3 观测系统四类特殊情况下的 CRLB 对比

Fig. 3 CRLB for observation system under four kinds of special circumstances

表 1 两种量测情况下的最优估计性能

Table 1 Optimal estimation performances for two kinds of measurement

k	σ_1/m	σ_2/m
50	3.3	4.1
100	3.0	3.7
150	0.4	0.5

注 1 表 1 中“ k ”表示采样时刻且与图 1~3 的迭代步数、目标所处位置一一对应; “ σ_1 ”表示 $\lambda = 1, 1 - \eta = 0$ 下的估计误差均方差; “ σ_2 ”表示 $\lambda = 0.8, 1 - \eta = 0.1$ 下的估计误差均方差.

表 1 给出了观测系统在两种工作状态下不同观测距离对应的最优估计性能指标. 其中, 完全无偏量测状态在实际系统中很难达到. 而不完全随机有偏量测状态则时常发生, 因此分析不完全随机有偏量测的 CRLB 更具有实际指导意义.

6 结论(Conclusion)

本文通过理论分析, 给出了不完全量测下随机有偏离散系统具有统计特性的 CRLB 递推算法, 理论证明:

- 1) 该 CRLB 为理想 CRLB 的下界;
- 2) 相同探测概率下不完全随机有偏量测的最优估计性能低于不完全无偏量测的最优估计性能.

本文提出的算法计算简单实用; 既可以在系统设计前期用于参数估计, 又可以用于设备的工作条件判断和性能维护. 比如恶劣环境下设备是否满足工作的最低要求; 设备工况逐渐恶化下的停机检修判断等, 因此本文所给出的结论可为含有不完全随机有偏量测系统的估计性能分析提供有益的参考. 需要指出的是, 定理 1 证明过程的假定 1 中, D_k^{12} 可逆蕴含着系统转移矩阵可逆, 本文实例满足了这一假定.

但工程中是否存在 D_k^{12} 不可逆的情形, 如果存在, 在理论上又如何去处理, 仍是有待深入探讨的问题.

参考文献(References):

- [1] PASSERIEUX J M, VAN CAPPEL D. Optimal observer maneuver for bearings-only tracking[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, 1998, 34(3): 777 – 788.
- [2] HERNANDEZ M, KIRUBARAJAN T, BAR-SHALOM Y. Multi-sensor resource deployment using posterior Cramer-Rao bounds[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, 2004, 40(2): 399 – 416.
- [3] XIONG K, ZHANG H Y, CHAN C W. Performance evaluation of UKF-based nonlinear filtering[J]. *Automatica*, 2006, 42(2): 261 – 270.
- [4] 占荣辉, 郁春来, 辛勤, 等. 机动目标跟踪误差CRLB计算与分析[J]. 国防科技大学学报, 2007, 29(5): 89 – 94.
(ZHAN Ronghui, YU Chunlai, XIN Qin, et al. CRLB calculation and analysis for maneuvering target tracking[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2007, 29(5): 89 – 94.)
- [5] 郭云飞, 韦巍, 薛安克. 非线性滤波CRLB推导及在目标跟踪中的应用[J]. 光电工程, 2007, 34(4): 26 – 29.
(GUO Yunfei, WEI Wei, XUE Anke. Derivation of the CRLB in nonlinear filter and application to target tracking[J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2007, 34(4): 26 – 29.)
- [6] STEVEN KAY, XU C C. CRLB via the characteristic function with application to the K-Distribution[J]. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic system*, 2008, 44(3): 1161 – 1168.
- [7] 王纪强, 张春熹, 马宗峰, 等. 激光多普勒测速参数估计的Cramer-Rao下限[J]. 中国激光, 2008, 35(9): 1419 – 1422.
(WANG Jiqiang, ZHANG Chunxi, MA Zongfeng, et al. Cramer-Rao lower bounds of parameter estimation from laser doppler velocimetry[J]. *Chinese Journal of Lasers*, 2008, 35(9): 1419 – 1422.)
- [8] ZHANG J J, MAALLOULI G, PAPANDEIOU-SUPPAPOLA A, et al. Cramér-Rao lower bounds for the joint estimation of target attributes using MIMO radar[C] // *Proceedings of International Conference on Wave-form Diversity and Design*. Piscataway: IEEE Computer Society, 2009: 103 – 107.
- [9] TICHAVSKY P, MURAVCHIK C H, NEHORAI A. Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(25): 1386 – 1396.
- [10] XU B L, WU Z Y, WANG Z Q. On the Cramer-Rao lower bound for biased bearings-inly maneuvering target tracking[J]. *Signal Processing*, 2007, 87(12): 3175 – 3189.
- [11] FARINA A, RISTIC B, TIMMONERI L. Cramer-Rao bound for nonlinear filtering with $P_d < 1$ and its application to target tracking[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(8): 1916 – 1924.
- [12] HERNANDEZ M, RISTIC B, FARINA A, et al. A comparison of two Cramer-Rao bounds for nonlinear filtering with $P_d < 1$ [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(9): 2361 – 2369.

作者简介:

刘锐 (1981—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为导航制导与控制、火力与指挥控制, E-mail: liurui2001_2001@yahoo.com.cn;

戚国庆 (1977—), 男, 讲师, 目前研究方向为目标跟踪和多传感器数据融合, E-mail: qiguqing@mail.njust.edu.cn;

陈黎 (1981—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性估计、多传感器数据融合, E-mail: hncschenli@126.com;

盛安冬 (1964—), 男, 研究员, 博士生导师, 目前研究方向为非线性估计、火力与指挥控制, E-mail: shengandong@mail.njust.edu.cn.