控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

文章编号: 1000−8152(2010)06−0815−06

多胞不确定型多时变时滞系统的稳定性

李伯忍[1,2], 胥布工[1]

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640; 2. 东莞理工学院 计算机学院, 广东 东莞 523808)

摘要: 采用积分等式方法处理Lyapunov-Krasovskii泛函导数中的交叉项, 利用牛顿–莱布尼兹公式和自由权矩阵来保留状态的导数项, 标称系统的稳定性条件中的系统矩阵和Lyapunov矩阵得以分离, 再通过参数依赖Lyapunov-Krasovskii泛函得到多胞不确定型系统的鲁棒稳定性结论, 最后数值算例说明稳定性条件的有效性.

关键词: 积分等式; 多胞不确定型; 鲁棒稳定; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Stability criteria of multiple time-varying delays system with polytopic-type uncertainties

LI Bo-ren[1,2], XU Bu-gong[1]

(1. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;
2. College of Computer, Dongguan University of Technology, Dongguan Guangdong 523808, China)

Abstract: The cross-product terms in the derivative of Lyapunov-Krasovskii functional are disposed by using the integral-equality approach, and the state-derivative term is reserved by employing Newton-Leibnitz formula and free-weighting matrix. System matrices and Lyapunov matrices in the stability condition of nominal system are separated; thus, robust stability criteria for polytopic-type uncertainties system are obtained easily. Finally, numerical example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: integral-equality; polytopic-type uncertainties; robust stability; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

许多工程系统, 如机械传动系统、流体传输系统、冶金工业过程以及网络控制系统, 都存在时滞现象, 而且时滞常常是造成系统不稳定的一个重要原因. 由于其广泛的研究背景, 时滞系统得到了许多学者的关注[1∼19]. 对于时变时滞系统, 处理时滞依赖稳定性问题的常用方法是模型变换[6], 该方法是借助不等式[1,2]去估计交叉项的上界. 近年来, 引入自由权矩阵[12,15,17]来减少系统时滞依赖稳定性条件的保守性, 在这些不同的方法的中, 主要的区别是在如何处理相应系统的Lyapunov泛函的导数而选取的上界[6,11,12,15,17,18].

另一方面, 通过引入新的Lyapunov泛函来提升时滞系统的稳定性条件, 也有一些成果[9,10,15]. 然而, 保守性并不能总是通过Lyapunov泛函引入更多的自由权矩阵来降低, 如文献[12,15], 借助了不同的Lyapunov泛函, 在文献[12]Theorem 1和文献[15] Lemma 1得到的保守性是相同的.

目前, 对于多时变时滞系统稳定性的研究文献并不多见, 其中文献[4]讨论了两个时变时滞的情况, 文献[16]借助于两个线性矩阵不等式给出了多时变时滞系统的稳定性条件, 文献[16]在做保守性的比较时, 也只给出了单时滞的情况, 而本文的稳定性条件只需一个线性矩阵不等式.

结合线性矩阵不等式技术, 文中推出了多胞不确定型多时变时滞系统的时滞依赖稳定性条件. 相比较之前的不等式方法得到的稳定性结果, 我们的结果有明显的区别, 即没有使用不等式, 而是利用积分等式去估计交叉项的上界, 这使得保守性得以减少.

记号: $\mathbb{R}^n$表示n维欧几里德空间, $\mathbb{R}^{n\times m}$表示全部$n\times m$阶实矩阵的集合, I表示单位矩阵, $X>0$(或$X\geqslant 0$), 表示X是实正定矩阵(或半正定), 其中$X\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 对任意的矩阵$B$和两个对称矩阵$A$,$C$, 用$\begin{bmatrix} A & B \\ * & C\end{bmatrix}$表示块对称矩阵, 这里$*$表示对称矩阵主对角线以上块矩阵的转置.

收稿日期: 2009−03−21; 收修改稿日期: 2009−12−15.
基金项目: 广东联合基金重点资助项目(U0735003); 广东省自然科学基金资助项目(06105413).

2 系统描述及预备知识(System description and preliminary knowledge)

考虑如下形式的多时变时滞标称系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum\limits_{i=1}^{K}B_ix(t-\tau_i(t)),\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-\tau,0].\end{cases}\tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$是状态向量, 矩阵$A, B_i(i=1,2,\cdots,K)$是具有适当维数的定常矩阵. 时滞$\tau_i(t)(i=1,2,\cdots,K)$是满足条件:

$$\begin{cases}0\leqslant\tau_i(t)\leqslant\tau_i\leqslant\tau,\\ \dot{\tau}_i(t)\leqslant\mu_i\leqslant\mu,\ i=1,2,\cdots,K,\ \forall t>0,\end{cases}\tag{2}$$

或

$$0\leqslant\tau_i(t)\leqslant\tau_i\leqslant\tau,\ i=1,2,\cdots,K,\ \forall t>0\tag{3}$$

的时变连续函数. 这里τ_i和μ_i是常数, τ和μ分别是τ_i和μ_i的上界, 即

$$\tau=\max_{1\leqslant i\leqslant K}\{\tau_i\},\ \mu=\max_{1\leqslant i\leqslant K}\{\mu_i\},$$

$\phi(t)$是$[-\tau,0]$上连续初始向量函数.

同时, 还将讨论一类具有多胞不确定型, 即对于系统(1)中的矩阵$A, B_i(i=1,2,\cdots,K)$有如下限制:

$$[A,B_1,\cdots,B_K]=\sum_{j=1}^{r}\zeta_j[A_j,B_{1j},\cdots,B_{Kj}],\tag{4}$$

其中: $A_j, B_{ij}(i=1,2,\cdots,K; j=1,2,\cdots,r)$是适当维数的定常矩阵, $\sum\limits_{j=1}^{r}\zeta_j=1, 0\leqslant\zeta_j\leqslant1$表示时变不确定性.

注 1 条件(2)是条件(3)的特殊情况, 如果时变时滞可微并且时变时滞的导数有上界, 基于条件(2)得到的保守性一般比基于条件(3)得到的保守性更低. 然而, 如果时变时滞不可微, 或者缺少时变时滞的导数的信息, 那么只能基于条件(3)来处理.

在时滞满足条件(2)或(3)的情况下, 本文的目的是推导出新的时滞依赖稳定性, 它能够确保标称系统(1)渐进稳定和系统(1)满足多胞不确定型(4)的条件下鲁棒渐进稳定. 为此, 引入下面的引理.

引理 1 给定的$d(t)>0$, 对任意适当维数的矩阵U,V,W、函数$g(s)$和$\eta(t)$, 下面的等式成立:

$$\begin{aligned}&-\int_{t-d(t)}^{t}g^{\mathrm{T}}(s)Wg(s)\mathrm{d}s=\\&2\eta^{\mathrm{T}}(t)V\int_{t-d(t)}^{t}g(s)\mathrm{d}s+d(t)\eta^{\mathrm{T}}(t)U\eta(t)-\\&\int_{t-d(t)}^{t}\begin{bmatrix}\eta^{\mathrm{T}}(t)\ g^{\mathrm{T}}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U & V\\ * & W\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta(t)\\ g(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{5}$$

证 易知下面的两个等式成立:

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)V\int_{t-d(t)}^{t}g(s)\mathrm{d}s=\int_{t-d(t)}^{t}g^{\mathrm{T}}(s)V^{\mathrm{T}}\eta(t)\mathrm{d}s$$

和

$$\int_{t-d(t)}^{t}\eta^{\mathrm{T}}(t)U\eta(t)\mathrm{d}s=d(t)\eta^{\mathrm{T}}(t)U\eta(t),$$

显然引理1成立.

注 2 引理1中给出的积分等式, 在文中得到的时滞依赖稳定性的分析过程中起到了非常重要的作用, 很好的处理了泛函导数中的交叉项, 由于采用的是等式变换, 不会引入保守性.

3 主要结论及证明(Main results and proof)

首先, 推导标称系统在满足条件(2)或(3)的时滞稳定性, 这一结果的获得是基于积分等式和一类Lyapunov泛函.

定理 1 对给定的常量$\tau_i,\mu_i(i=1,\cdots,K)$, 标称系统(1)满足条件(2)渐进稳定, 如果存在矩阵$P=P^{\mathrm{T}}>0,\ G_i=G_i^{\mathrm{T}}\geqslant0,\ H_i=H_i^{\mathrm{T}}\geqslant0,\ Q_i=Q_i^{\mathrm{T}}\geqslant0,\ R_i=R_i^{\mathrm{T}}\geqslant0(i=1,\cdots,K)$和任意适当维数的矩阵$L_i,M_i,N_i(i=1,\cdots,K)$及$T$满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix}\Xi & L & M & N\\ * & G & 0 & 0\\ * & * & G & 0\\ * & * & * & H\end{bmatrix}<0,\tag{6}$$

这里$\Xi=\Xi_1+\Xi_2+\Xi_2^{\mathrm{T}}$. 其中:

$$\Xi_1=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{K}(Q_i+R_i) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & P\\ * & -(1-\mu_1)Q_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ * & * & -R_1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ * & * & * & \cdots & -(1-\mu_K)Q_K & 0 & 0\\ * & * & * & \cdots & * & -R_K & 0\\ * & * & * & \cdots & * & * & \sum\limits_{i=1}^{K}\tau_i(G_i+H_i)\end{bmatrix},$$

$$\varXi_2=[\sum_{i=1}^{K}(L_i+N_i)\quad M_1-L_1\quad -M_1-N_1\quad \cdots$$
$$M_K-L_K\quad -M_K-N_K\quad 0]+TA_d,$$
$$A_d=[A\ \ B_1\ \ 0\ \ \cdots\ \ B_K\ \ 0\ \ -I],$$
$$T^{\mathrm{T}}=[T_1^{\mathrm{T}}\ \ T_2^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ \ T_{2K+2}^{\mathrm{T}}],$$
$$L=[\tau_1L_1\ \ \tau_2L_2\ \ \cdots\ \ \tau_KL_K],$$
$$L_i^{\mathrm{T}}=[L_{i,1}^{\mathrm{T}}\ \ L_{i,2}^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ L_{i,2K+2}^{\mathrm{T}}],$$
$$M=[\tau_1M_1\ \ \tau_2M_2\ \ \cdots\ \ \tau_KM_K],$$
$$M_i^{\mathrm{T}}=[M_{i,1}^{\mathrm{T}}\ \ M_{i,2}^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ \ M_{i,2K+2}^{\mathrm{T}}],$$
$$N=[\tau_1N_1\ \ \tau_2N_2\ \ \cdots\ \tau_KN_K],$$
$$N_i^{\mathrm{T}}=[N_{i,1}^{\mathrm{T}}\ \ N_{i,2}^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ N_{i,2K+2}^{\mathrm{T}}],$$
$$G=-\mathrm{diag}\{\tau_1G_1,\tau_2G_2,\cdots,\tau_KG_K\},$$
$$H=-\mathrm{diag}\{\tau_1H_1,\tau_2H_2,\cdots,\tau_KH_K\}.$$

证　选取如下形式的 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(x_t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)+V_4(t),\tag{7}$$

其中:

$$V_1(t)=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t),$$
$$V_2(t)=\sum_{i=1}^{K}\{\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+s}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(v)(G_i+H_i)\dot x(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s\},$$
$$V_3(t)=\sum_{i=1}^{K}\{\int_{t-\tau_i(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_ix(s)\mathrm{d}s\},$$
$$V_4(t)=\sum_{i=1}^{K}\{\int_{t-\tau_i}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)R_ix(s)\mathrm{d}s\},$$

正定矩阵$P>0$, $G_i\geqslant 0$, $H_i\geqslant 0$, $Q_i\geqslant 0$, $R_i\geqslant 0(i=1,\cdots,K)$是待定矩阵.

$V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t)$和$V_4(t)$关于时间t的导数分别是

$$\dot V_1(t)=2x^{\mathrm{T}}(t)P\dot x(t),\tag{8}$$
$$\dot V_2(t)=\sum_{i=1}^{K}\tau_i\dot x^{\mathrm{T}}(t)(G_i+H_i)\dot x(t)-\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)(G_i+H_i)\dot x(s)\mathrm{d}s,\tag{9}$$
$$\dot V_3(t)\leqslant\sum_{i=1}^{K}x^{\mathrm{T}}(t)Q_ix(t)-\sum_{i=1}^{K}(1-\mu_i)x^{\mathrm{T}}(t-\tau_i(t))Q_ix(t-\tau_i(t)),\tag{10}$$
$$\dot V_4(t)=\sum_{i=1}^{K}x^{\mathrm{T}}(t)R_ix(t)-\sum_{i=1}^{K}x^{\mathrm{T}}(t-\tau_i)R_ix(t-\tau_i).\tag{11}$$

易知下面的等式成立:

$$-\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)(G_i+H_i)\dot x(s)\mathrm{d}s=-\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)G_i\dot x(s)\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i}^{t-\tau_i(t)}\dot x^{\mathrm{T}}(s)G_i\dot x(s)\mathrm{d}s-\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)H_i\dot x(s)\mathrm{d}s.\tag{12}$$

基于引理1，下面的等式成立:

$$-\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)G_i\dot x(s)\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^{K}\{2\xi^{\mathrm{T}}(t)L_i\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\dot x(s)\mathrm{d}s+\tau_i(t)\xi^{\mathrm{T}}(t)X_i\xi(t)-\int_{t-\tau_i(t)}^{t}[\xi^{\mathrm{T}}(t)\ \ \dot x^{\mathrm{T}}(s)]\begin{bmatrix}X_i & L_i\\ L_i^{\mathrm{T}} & G_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \dot x(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\},\tag{13}$$

$$-\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i}^{t-\tau_i(t)}\dot x^{\mathrm{T}}(s)G_i\dot x(s)\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^{K}\{2\xi^{\mathrm{T}}(t)M_i\int_{t-\tau_i}^{t-\tau_i(t)}\dot x(s)\mathrm{d}s+(\tau_i-\tau_i(t))\xi^{\mathrm{T}}(t)Y_i\xi(t)-\int_{t-\tau_i}^{t-\tau_i(t)}[\xi^{\mathrm{T}}(t)\ \ \dot x^{\mathrm{T}}(s)]\cdot\begin{bmatrix}Y_i & M_i\\ M_i^{\mathrm{T}} & G_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \dot x(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\},\tag{14}$$

$$-\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i}^{t}\dot x^{\mathrm{T}}(s)H_i\dot x(s)\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^{K}\{2\xi^{\mathrm{T}}(t)N_i\int_{t-\tau_i}^{t}\dot x(s)\mathrm{d}s+\tau_i\xi^{\mathrm{T}}(t)Z_i\xi(t)-\int_{t-\tau_i}^{t}[\xi^{\mathrm{T}}(t)\ \ \dot x^{\mathrm{T}}(s)]\begin{bmatrix}Z_i & N_i\\ N_i^{\mathrm{T}} & H_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t)\\ \dot x(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s\}.\tag{15}$$

其中:

$$\xi^{\mathrm{T}}(t)=[x^{\mathrm{T}}(t)\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau_1(t))\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau_1)\quad\cdots\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau_K(t))\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau_K)\quad \dot x^{\mathrm{T}}(t)],$$

且$X_i,Y_i,Z_i(i=1,\cdots,K)$是适当维数的矩阵.

利用牛顿–莱布尼茨公式, 对适当维数的矩阵$L_i,M_i,N_i(i=1,\cdots,K)$, 下面的等式成立:

$$\sum_{i=1}^{K}2\xi^{\mathrm{T}}(t)L_i[x(t)-\int_{t-\tau_i(t)}^{t}\dot x(s)\mathrm{d}s-x(t-\tau_i(t))]=0,\tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{K}2\xi^{\mathrm{T}}(t)M_i[x(t-\tau_i(t))-$$

$$\int_{t-\tau_i}^{t-\tau_i(t)}\dot{x}(s)\mathrm{d}s - x(t-\tau_i)] = 0, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{K} 2\xi^{\mathrm{T}}(t)N_i[x(t) - \int_{t-\tau_i}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s - x(t-\tau_i)] = 0. \tag{18}$$

另一方面, 对适当维数的矩阵T, 下面的等式成立:

$$2\xi^{\mathrm{T}}(t)T[Ax(t) + \sum_{i=1}^{K} B_i x(t-\tau_i(t)) - \dot{x}(t)] = 0. \tag{19}$$

结合(7)～(19), 有下面的结果:

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(x_t) \leqslant \\
&\xi^{\mathrm{T}}(t)[\varXi_{11} + \sum_{i=1}^{K}\tau_i(X_i + Y_i + Z_i)]\xi(t) - \\
&\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i(t)}^{t}[\xi^{\mathrm{T}}(t)\ \ \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)]\begin{bmatrix} X_i & L_i \\ L_i^{\mathrm{T}} & G_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t) \\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s - \\
&\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i}^{t-\tau_i(t)}[\xi^{\mathrm{T}}(t)\ \ \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)]\begin{bmatrix} Y_i & M_i \\ M_i^{\mathrm{T}} & G_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t) \\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s - \\
&\sum_{i=1}^{K}\int_{t-\tau_i}^{t}[\xi^{\mathrm{T}}(t)\ \ \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)]\begin{bmatrix} Z_i & N_i \\ N_i^{\mathrm{T}} & H_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(t) \\ \dot{x}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{20}$$

当选取

$$X_i = L_i G_i^{-1} L_i^{\mathrm{T}},\ Y_i = M_i G_i^{-1} M_i^{\mathrm{T}},$$
$$Z_i = N_i H_i^{-1} N_i^{\mathrm{T}},$$

能确保

$$\begin{bmatrix} X_i & L_i \\ L_i^{\mathrm{T}} & G_i\end{bmatrix} \geqslant 0,\ \begin{bmatrix} Y_i & M_i \\ M_i^{\mathrm{T}} & G_i\end{bmatrix} \geqslant 0,$$
$$\begin{bmatrix} Z_i & N_i \\ N_i^{\mathrm{T}} & H_i\end{bmatrix} \geqslant 0.$$

利用Schur补, 如果式(6)成立, 对任意的$\xi(t) \neq 0$, 则$\dot{V}(x_t) < 0$, 因此, 标称系统(1)渐进稳定.

注 3 在定理1的证明中, 积分等式被用来处理式(12)中的3个交叉项, 利用牛顿–莱布尼茨公式, 结合适当维数的矩阵$L_i, M_i, N_i (i = 1, \cdots, K)$, 得到3个零项(16)～(18), 这3个零项被加入到Lyapunov-Krasovskii泛函沿着系统(1)的导数中, 这样可以和积分等式(13)～(15)中的3项相抵消. 式(19)中自由权矩阵T被用来处理项$\dot{x}(t)$, $x(t)$和$x(t-\tau_i(t))(i = 1, \cdots, K)$之间的关系, 而且, 零项(19)也被加入到泛函沿着系统(1)的导数中, 这样能够很好的分离了Lyapunov矩阵和系统矩阵, 这为利用参数依赖的Lyapunov-Krasovskii泛函来讨论多胞不确定型系统提供了便利, 最后得到线性矩阵不等式(6).

当时变时滞的导数满足条件(3)时, 类似于定理1的证明, 可以得到下面的时滞相关和时滞变化率无关的渐进稳定性条件.

推论 1 对给定的常量$\tau_i (i = 1, \cdots, K)$, 标称系统(1)满足条件(3)渐进稳定, 如果存在矩阵

$$P = P^{\mathrm{T}} > 0,\ G_i = G_i^{\mathrm{T}} \geqslant 0,$$
$$H_i = H_i^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ R_i = R_i^{\mathrm{T}} \geqslant 0,$$
$$i = 1, \cdots, K$$

和任意适当维数的矩阵$L_i, M_i, N_i (i = 1, \cdots, K)$及$T$满足线性矩阵不等式(6)并恒取$Q_i \equiv 0 (i = 1, \cdots, K)$.

下面, 考虑系统(1)存在多胞不确定型(4)的情况下的鲁棒稳定性条件. 基于定理1, 能够得到下面的结论.

定理 2 对给定的常量$\tau_i, \mu_i (i = 1, \cdots, K)$, 系统(1)存在多胞不确定型(4), 满足条件(2)鲁棒稳定, 如果存在矩阵

$$P_j = P_j^{\mathrm{T}} > 0,\ G_{ij} = G_{ij}^{\mathrm{T}} \geqslant 0,$$
$$H_{ij} = H_{ij}^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ Q_{ij} = Q_{ij}^{\mathrm{T}} \geqslant 0,$$
$$R_{ij} = R_{ij}^{\mathrm{T}} \geqslant 0,$$
$$i = 1, \cdots, K$$

和任意适当维数的矩阵$L_{ij}, M_{ij}, N_{ij} (i = 1, \cdots, K)$及$T$, 对$j = 1, 2, \cdots, r$, 下面的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \varXi^{(j)} & L^{(j)} & M^{(j)} & N^{(j)} \\ * & G^{(j)} & 0 & 0 \\ * & * & G^{(j)} & 0 \\ * & * & * & H^{(j)} \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

其中:

$$\varXi^{(j)} = \varXi_1^{(j)} + \varXi_2^{(j)} + (\varXi_2^{(j)})^{\mathrm{T}},$$
$$\begin{aligned}\varXi_2^{(j)} = [&\sum_{i=1}^{K}(L_{ij} + N_{ij})\ \ M_{1j} - L_{1j} \\ &- M_{1j} - N_{1j}\ \ \cdots\ \ M_{Kj} - L_{Kj} \\ &- M_{Kj} - N_{Kj}\ \ 0] + TA_d^{(j)},\end{aligned}$$
$$A_d^{(j)} = [A_j\ \ B_{1j}\ \ 0\ \cdots\ B_{Kj}\ \ 0\ \ -I],$$
$$T^{\mathrm{T}} = [T_1^{\mathrm{T}}\ \ T_2^{\mathrm{T}}\ \cdots\ T_{2K+2}^{\mathrm{T}}],$$
$$L^{(j)} = [\tau_1 L_{1j}\ \ \tau_2 L_{2j}\ \cdots\ \tau_K L_{Kj}],$$
$$L_{ij}^{\mathrm{T}} = [L_{i,1,j}^{\mathrm{T}}\ \ L_{i,2,j}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ L_{i,2K+2,j}^{\mathrm{T}}],$$
$$M^{(j)} = [\tau_1 M_{1j}\ \ \tau_2 M_{2j}\ \cdots\ \tau_K M_{Kj}],$$

$$M_{ij}^{\mathrm{T}} = [M_{i,1,j}^{\mathrm{T}}\ M_{i,2,j}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ M_{i,2K+2,j}^{\mathrm{T}}],$$
$$N^{(j)} = [\tau_1 N_{1j}\ \tau_2 N_{2j}\ \cdots\ \tau_K N_{Kj}],$$
$$N_{ij}^{\mathrm{T}} = [N_{i,1,j}^{\mathrm{T}}\ N_{i,2,j}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ N_{i,2K+2,j}^{\mathrm{T}}],$$
$$G^{(j)} = -\mathrm{diag}\{\tau_1 G_{1j}, \tau_2 G_{2j}, \cdots, \tau_K G_{Kj}\},$$
$$H^{(j)} = -\mathrm{diag}\{\tau_1 H_{1j}, \tau_2 H_{2j}, \cdots, \tau_K H_{Kj}\}.$$

$$\varXi_1^{(j)} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{K}(Q_{ij}+R_{ij}) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & P_j \\ * & -(1-\mu_1)Q_{1j} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -R_{1j} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & -(1-\mu_K)Q_{Kj} & 0 & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & -R_{Kj} & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & * & \sum\limits_{i=1}^{K}\tau_i(G_{ij}+H_{ij}) \end{bmatrix},$$

证 构造如下形式的参数依赖 Lyapunov-Krasovshii 泛函:

$$V_{\mathrm{u}}(x_t) = V_{1\mathrm{u}}(t) + V_{2\mathrm{u}}(t) + V_{3\mathrm{u}}(t) + V_{4\mathrm{u}}(t), \quad (22)$$

其中:

$$V_{1\mathrm{u}}(t) = \sum_{j=1}^{r} x^{\mathrm{T}}(t)\zeta_j P_j x(t),$$

$$V_{2\mathrm{u}}(t) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{K}\{\int_{-\tau_i}^{0}\int_{t+s}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(v)\zeta_j(G_{ij} + H_{ij})\dot{x}(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s\},$$
$$V_{3\mathrm{u}}(t) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{K}\{\int_{t-\tau_i(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)\zeta_j Q_{ij} x(s)\mathrm{d}s\},$$
$$V_{4\mathrm{u}}(t) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{K}\{\int_{t-\tau_i}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)\zeta_j R_{ij} x(s)\mathrm{d}s\},$$

正定矩阵$P_j > 0, G_{ij} \geqslant 0,\ H_{ij} \geqslant 0,\ Q_{ij} \geqslant 0,\ R_{ij} \geqslant 0 (i = 1, \cdots, K; j = 1, \cdots, r)$是待定矩阵. 这样选取的参数依赖Lyapunov-Krasovshii泛函, 能够使得定理的证明线性类似于定理1的证明, 这里不再赘述.

在定理2中, 给出了多胞不确定型系统(1)满足条件(2)时的鲁棒稳定性条件, 基于推论1, 容易给出多胞不确定型系统(1)满足条件(3)时的鲁棒稳定性条件.

推论 2 对给定的常量$\tau_i (i = 1, \cdots, K)$, 系统(1)存在多胞不确定型(4), 满足条件(3)鲁棒稳定, 如果存在矩阵$P_j = P_j^{\mathrm{T}} > 0,\ G_{ij} = G_{ij}^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ H_{ij} = H_{ij}^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\ R_{ij} = R_{ij}^{\mathrm{T}} \geqslant 0 (i = 1, \cdots, K)$和任意适当维数的矩阵$L_{ij}, M_{ij}, N_{ij} (i = 1, \cdots, K)$及$T$, 对$j = 1, 2, \cdots, r$, 满足线性矩阵不等式(21)并恒取$Q_{ij} \equiv 0 (i = 1, \cdots, K)$.

注 4 当$K = 1$, 定理1退化为文献[17]Theorem 2, 定理2退化为文献[17]Corollary 2, 文中讨论了多时变时滞的情况, 在文献[17]中讨论的是单时变时滞的情况, 是本文结论的特例, 故在单时变时滞的情况下, 本文得到的稳定性结论的保守性与文献[17]中的保守性相同, 但相对于之前的积分不等式方法得到的一些稳定性条件的保守性有较大的提高[17]. 对于单时滞情形, 本文提出的积分等式方法与2004年Y. He et al.[13]提出的自由权矩阵方法得到的稳定性结论相同, 本文利用积分等式方法得到的多时变时滞系统的稳定性结论更具有一般性. 由于多时变时滞的算例很少, 难以作比较, 在后面的数值算例中, 主要验证标称系统在多时变时滞情况下结论的可行性.

4 数值算例(Numerical example)

算例 1 在定理1中取$K = 2$, 考虑标称系统(1)的渐进稳定性, 其系统参数矩阵具有如下形式:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -2.0 \\ 1.0 & -1.0 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & -1.0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

这里取B_1, B_2为相同的常数矩阵, 在计算的时候设置$\mu = \mu_1 = \mu_2, \tau = \tau_1 = \tau_2$, 利用LMI工具箱中的求解器feasp进行求解. 计算可以得到, 对$\mu = 0.0$时, 允许的时滞上界$\tau = 0.6434$, 类似地, $\mu = 0.1$时, $\tau = 0.6149$; $\mu = 0.5$时, $\tau = 0.4239$; $\mu = 0.9$时, $\tau = 0.3660$. 笔者注意到, 随着μ的增加, 允许的时滞上界τ相应的减少. 当$\mu = 0.5, \tau = 0.4239$时, 通过求解LMI(6), 相应的矩阵变量为

$$P = 10000 \times \begin{bmatrix} 0.6541 & 0.7160 \\ 0.7160 & 2.8551 \end{bmatrix},$$

$$G_1 = G_2 = 1000 \times \begin{bmatrix} 1.7240 & 1.3027 \\ 1.3027 & 0.9862 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 8.4364 & 6.2537 \\ 6.2537 & 5.0756 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = Q_2 = 10000 \times \begin{bmatrix} 0.0028 & 0.0754 \\ 0.0754 & 2.0025 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = R_2 = \begin{bmatrix} 0.1070 & 0.1948 \\ 0.1948 & 2.6866 \end{bmatrix}.$$

参考文献(References):

[1] PARK P. A delay-dependent stabiltity criteria for systems with uncertain time – invariant delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(4): 876 – 877.

[2] MOON Y S, PARK P, KWON W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. *International Journal of Control*, 2001, 74(14): 1447 – 1455.

[3] XIA Y Q, JIA Y M. Robust stability functionals of state delayed systems with polytopic type uncertainties via parameter – dependent Lyapunov funtions[J]. *International Journal of Control*, 2002, 75(16): 1427 – 1434.

[4] FRIDMAN E, SHAKED U. An improved stabilization method for linear time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1931 – 1937.

[5] FRIDMAN E, SHAKED U. Parameter dependent stability and stabilization of uncertain time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 861 – 866.

[6] FRIDMAN E, SHAKED U. Delay-dependent stability and H_∞ control: constant and time-varying delays[J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(16): 48 – 60.

[7] GAO H, WANG C. Comments and further results on a descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(3): 520 – 525.

[8] RICHARD J P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems[J]. *Automatica*, 2003, 39(10): 1667 – 1694.

[9] HAN Q L. On robust stablity of neutral systems with time-varying discrete delay and norm-bounded uncertainty[J]. *Automatica*, 2004, 40(6): 1087 – 1092.

[10] LEE Y S, MOON Y S, KWON W H, et al. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with a state-delay[J]. *Automatica*, 2004, 40(1): 65 – 72.

[11] JING X J, TAN D L, WANG Y C. An LMI approach to stability of systems with severe time-delay[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1192 – 1195.

[12] HE Y, WU M, SHE J H, et al. Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainies[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(5): 828 – 832.

[13] HE Y, WU M, SHE J H, et al. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays[J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 51(1): 57 – 65.

[14] XU S, LAM J, ZOU Y. Simplified descriptor system approach to delay-dependent stability and performances analyses for time-delay systems[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2005, 152(2): 147 – 151.

[15] LIN C, WANG Q G, LEE T H. A less consevative robust stability test for linear uncertain time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(1): 87 – 91.

[16] YAN H C, HUANG X H, WANG M, et al. New delay-dependent stability criteria of uncertain linear systems with mulitiple time-varying state delays[J]. *Chaos, Solutions and Fractals*, 2008, 37(1): 157 – 165.

[17] HE Y, WANG Q G, XIE L H, et al. Further improvement of free-weighting matrices technique for sysrems with-varying delay[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(2): 293 – 299.

[18] PENG C, TIAN Y C. Improved delay-dependent robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2008, 2(9): 752 – 761.

[19] 张文安, 俞立, 张贵军. 离散多时滞系统的时滞相关鲁棒稳定性分析[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(4): 636 – 639.
(ZHANG Wenan, YU Li, ZHANG Guijun. Delay-dependent robust stability analysis for discrete-time systems with multiple delays[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(4): 636 – 639.)

作者简介:

李伯忍 (1980—), 男, 讲师, 博士, 主要从事时滞与不确定控制系统的分析与综合的研究, E-mail: liboren@dgut.edu.cn;

胥布工 (1956—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事时滞与不确定控制系统的分析与综合、网络化控制系统理论与应用的研究, E-mail: aubgxu@scut.edu.cn.