

## 带有非线性不确定奇异系统的积分滑模控制

郭壁垒, 苏宏业, 柳向斌, 刘之涛

(浙江大学 工业技术国家重点实验室 智能系统与控制研究所, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 针对一类含有非线性不确定的奇异系统, 提出了一种面向性能的鲁棒控制器. 控制器由 3 部分组成: 积分滑模控制、附加的非线性控制及复合非线性反馈控制. 积分滑模控制可将匹配不确定完全抵消并使系统轨迹进入理想滑模; 附加的非线性控制用来抑制理想滑动模态上非匹配不确定对系统稳定性和性能的影响; 复合非线性反馈控制则保证闭环系统输出按性能要求渐近地跟踪参考输入信号. 最后通过算例说明所提算法的有效性.

**关键词:** 奇异系统; 匹配不确定; 非匹配不确定; 积分滑模; 复合非线性反馈控制

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Integral sliding mode control for singular systems with nonlinear uncertainties

GUO Bi-lei, SU Hong-ye, LIU Xiang-bin, LIU Zhi-tao

(National Key Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Cyber-System and Control, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

**Abstract:** A performance-oriented robust controller is proposed for a class of singular systems with matched and unmatched nonlinear uncertainties. The control scheme consists of 3 control terms: the integral sliding mode control (ISM), the additional nonlinear control and the composite nonlinear feedback control (CNF). The ISM control term rejects matched uncertainties completely and drives the system trajectory to the ideal sliding mode. The additional nonlinear control term attenuates the unmatched nonlinear uncertainties which exist in ideal sliding mode and may affect the performance of the sliding mode. The CNF control term guarantees the output tracking of reference input signal according to the prescribed specifications. Finally, numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

**Key words:** singular system; matched uncertainties; unmatched uncertainties; integral sliding mode; composite nonlinear feedback control

### 1 引言(Introduction)

奇异系统的模型广泛存在于受限机器人、电力系统、宇航系统等诸多领域, 定常线性奇异系统的基础理论已经基本完备<sup>[1,2]</sup>. 实际系统由于建模误差、系统摄动以及外部干扰等因素, 往往存在不确定性, 基于精确模型的控制器设计用于实际系统控制中, 结果往往不尽如人意.

滑模变结构控制方法对于处理含有模型不确定和外部干扰的系统有很好的效果<sup>[3,4]</sup>. 常规的滑模控制设计包括两个阶段. 首先是滑模面的设计, 使得系统在滑模面上满足一定的性能指标要求; 另外要设计一个不连续的控制律, 使得系统状态能到达设计的滑模面, 从而保证状态能够进入滑动模态. 系统状态一旦进入了滑动模态以后, 对满足匹配条件的参数摄动和外部干扰有完全的鲁棒性, 但是, 这种鲁棒

性只存在于滑动模态上, 在到达滑模面之前, 即趋近模态对不确定性不具有鲁棒性, 因此, 系统全程的鲁棒性并不能得到保证. 积分滑模控制<sup>[5~8]</sup>使系统初始状态就处在滑模之上, 消除了趋近模态, 从而保证了全程鲁棒性. 文献[6]针对不确定非线性系统, 设计了积分滑模面, 并通过对标称系统的控制器设计使系统达到指定的性能要求; 文献[7]研究了积分滑模控制的鲁棒性, 提出了一种确定滑模参数矩阵的方法, 该方法保证了非匹配不确定部分的Euclid范数最小, 减小非匹配项对理想滑模的影响.

滑模控制的一大优点是在滑动模态上对满足匹配条件的不确定的完全鲁棒性. 针对只含有匹配不确定的奇异系统, 文献[9]通过引入动态补偿器, 首次给出了奇异系统滑模变结构控制的综合设计方法, 但是文中的滑模设计相对复杂, 给滑动模态的动态

品质的研究以及控制器的选取带来一定的困难;文献[10]针对奇异系统构造了一种状态分解,并在此基础上提出了一种较为简单易实现的滑模控制方法.

然而滑模对非匹配不确定不具有鲁棒性,针对含有非匹配不确定系统的滑模控制是近些年来的研究热点.文献[11]针对含有非匹配不确定的MIMO系统,设计了终端滑模,保证系统状态在有限时间到达平衡点附近的一个邻域;文献[12]通过导数比例反馈将上述成果推广至奇异系统中;文献[13,14]通过静态输出反馈实现了含有非匹配不确定线性系统滑模控制.上面的结果大都是基于非匹配不确定项可以用形如线性增长界函数界定这一假设之上的.然而实际工程中,不确定项往往需要一个非线性的正函数才能界定.文献[15]采用非线性界函数界定不确定,并将其应用于控制器设计中,提高了鲁棒性减小了保守性.

针对不确定奇异系统,对不确定项运用非线性正函数来界定,在此基础上提出了积分滑模的综合设计方法,将其和复合非线性反馈控制策略<sup>[16,17]</sup>相结合,并引入一个含有非匹配项界函数信息的非线性控制器来抑制滑动模态上非匹配项的影响,使系统输出在跟踪一个输入信号时,具有很好的动态和稳态性能,最后对跟踪误差大小进行了分析:当只存在匹配不确定时,跟踪误差最终将指数收敛到零,当存在非匹配不确定时,可以通过调整控制器参数减小跟踪误差的大小.

## 2 问题描述(Problem formulation)

考虑不确定线性奇异系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Bd_m(x, t) + \\ \quad D_u(x, t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  为系统的状态向量,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  为系统的控制输入向量,  $Bd_m(x, t) \in \mathbb{R}^n$  表示系统中满足匹配条件的不确定性,  $D_u(x, t) \in \mathbb{R}^n$  表示不满足匹配条件的不确定性,二者来自建模误差、系统摄动或者外部扰动等,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  为系统的输出向量;  $A, B, C, E$  为具有适当维数的常数实矩阵,同时有  $\text{rank}E = r \leq n$ .

**假设 1** 奇异系统(1)满足正则条件,由文献[1]可知,即满足

$$\det(sE - A) \neq 0.$$

**假设 2** 奇异系统(1)的标称系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2)$$

完全可控,由文献[1]可知,可以设计一个状态反馈

$u(t) = Kx(t)$ ,对于给定的一个正定矩阵  $W > 0$ ,总唯一存在一个可逆的矩阵  $P$  满足

$$\begin{aligned} (A + BK)^T P + P^T (A + BK) &= -W, \\ P^T E &= E^T P \geq 0. \end{aligned}$$

**假设 3** 控制矩阵  $B$  列满秩. 系统状态完全可测.

**假设 4** 假设存在已知的确定正函数  $\rho_1(x, t)$  和  $\rho_2(x, t)$ , 并且具有以下形式:

$$\begin{aligned} \|d_m(x, t)\| &\leq \rho_1(x, t), \\ \|D_u(x, t)\| &\leq \rho_2(x, t). \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $\|\cdot\|$  表示“ $\cdot$ ”的2范数,  $\rho_1(x, t)$  和  $\rho_2(x, t)$  对于  $t \in [0, \infty)$  连续,对于  $x$  满足局部Lipschitz条件.

**注 1** 由上述假设可见,具有非线性形式的匹配不确定和非匹配不确定是以相应的非线性函数来界定的. 现有的文献中,常常用足够大的  $a\|x\| + b$  形式的线性增长的函数来代替非线性函数来界定不确定项的大小<sup>[11~14]</sup>,这样处理往往会引入一定的保守性,特别是当非匹配项也是非线性函数时,用线性函数可能无法完全界定不确定项. 虽然不确定项的具体形式并不一定清楚,但是它们的界函数却往往可以知道,并能将其应用于控制器的设计当中.

控制目标为: 给定阶跃输入信号  $r$ , 设计控制器  $u(t)$ , 使得闭环系统输出对于任意的满足式(3)的不确定性,能跟踪输入信号  $r$ , 并且满足相应的性能指标.

## 3 不确定奇异系统的积分滑模控制(ISM control for uncertain singular systems)

### 3.1 奇异系统中匹配不确定的积分滑模控制(ISM control for matched uncertainties in singular systems)

当系统只含有匹配不确定时,即系统(1)中的不匹配不确定  $D_u(x, t) = 0$ , 系统方程变为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Bd_m(x, t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (4)$$

设计积分滑模面

$$s(x, t) = GEx(t) - GEx(t_0) - \int_{t_0}^t [GAx(\tau) + GBu_{\text{CNF}}(\tau)] d\tau, \quad (5)$$

其中:  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是要设计的矩阵,需保证  $GB$  可逆;  $u_{\text{CNF}}$  是针对标称系统设计的控制律,从而保证相应的性能要求,具体设计下面再详细说明;  $x(t_0)$  是系统状态的初始值. 由积分滑模的形式可见,从初始时刻  $t_0$  起,滑模就满足  $s[x(t_0), t_0] = 0$ ,从而消除了趋近模态. 因此系统实现了全程滑动模态,其扰动的鲁棒性要优于存在趋近模态的传统滑模.

选取控制律为

$$u = u_{\text{CNF}} + u_{\text{ISM}}, \quad (6)$$

其中: 不连续控制  $u_{\text{ISM}} = -M(x, t)\text{sgn}(s^T GB)$ , 增益  $M(x, t)$  根据匹配不确定的上界来确定, 其作用是保证系统状态能够到达滑模面.

根据文献[3,5], 令滑模面(4)的导数等于零, 可得等效控制  $u_{\text{eq}}$  (即  $u_{\text{ISM}}$  在滑模面上的等效控制律):

$$u_{\text{eq}} = -d_m(x, p, t), \quad (7)$$

根据文献[3,5], 将式(7)代入式(4)中, 可以得到理想滑动模态方程为

$$E\dot{x} = Ax + Bu_{\text{CNF}}. \quad (8)$$

可见, 匹配不确定项被滑模控制完全抵消, 系统性能完全由控制律  $u_{\text{CNF}}$  决定, 下面通过设计  $u_{\text{CNF}}$  使得系统满足相应的性能要求.

根据文献[16, 17], 设计非线性复合反馈控制, 使得系统(8)输出  $y$  跟踪期望输入  $r$ , 同时满足一定的性能指标. 控制器形式为

$$u_{\text{CNF}} = u_L + u_N, \quad (9)$$

其中:  $u_L$  表示线性控制器,  $u_N$  表示非线性控制器.  $u_L$  形式为

$$u_L = F_1 x + G_1 r, \quad (10)$$

$F_1$  为待定矩阵, 选择合适的  $F_1$  使闭环系统  $C(sE - A - BF_1)^{-1}B$  稳定无脉冲且有低阻尼比,  $G_1$  定义为

$$G_1 = -[C(A + BF_1)^{-1}B]^{-1}. \quad (11)$$

在期望输入  $r$  作用下, 系统的理想平衡状态

$$x_e = G_e r = -(A + BF_1)^{-1}BG_1 r. \quad (12)$$

定义状态误差  $\tilde{x} = x - x_e$ , 可得

$$u_L = F_1 \tilde{x} + Hr, \quad (13)$$

其中  $H = [I - F_1(A + BF_1)^{-1}B]G_1$ .

取非线性控制器为

$$u_N = \rho(r, y)F_2 \tilde{x}, \quad (14)$$

其中:  $F_2$  为待确定矩阵,  $\rho(r, y)$  为跟踪误差  $r - y$  的指数函数:

$$\rho(r, y) = \frac{1}{1 - e^{-1}} (e^{-|1 - (y - y_0)/(r - y_0)|} - e^{-1}), \quad (15)$$

$\rho(r, y)$  满足局部Lipschitz条件,  $y_0 = y(0)$  表示输出  $y$  的初始值.

对理想滑动模态(8), 当它满足假设1~4时, 存在形如(9)~(14)的控制, 使得系统输出  $y$  按预期性能要求渐近跟踪阶跃输入信号  $r$ .

**注 2** 由于引入了复合非线性控制律, 参数  $\rho(r, y)$  可

以改变闭环极点的位置, 当跟踪误差向零趋近过程中, 函数  $\rho(r, y)$  可以从0变为1. 在初始时刻,  $|1 - (y - y_0)/(r - y_0)|$  接近1,  $\rho(r, y)$  很小, 非线性控制部分对整个系统作用十分有限, 主要由  $u_L$  发挥作用, 它为系统提供了较小的阻尼比, 从而缩短了上升时间; 当输出  $y$  接近设定值时,  $|1 - (y - y_0)/(r - y_0)|$  接近0,  $\rho(r, y) \approx 1$ , 这样非线性控制部分的作用就十分显著了, 它使得闭环系统的阻尼比增大, 从而减小响应的超调量.

### 3.2 奇异系统中非匹配不确定的积分滑模控制 (ISM control for unmatched uncertainties in singular systems)

当系统同时存在匹配和非匹配不确定时, 改进原有的CNF控制算法, 所以将式(9)扩展为

$$u'_{\text{CNF}} = u_{\text{CNF}} + u', \quad (16)$$

其中:  $u_{\text{CNF}}$  具体形式及选取方法和上文提到的相同,  $u'$  具有如下形式:

$$u' = -\kappa \rho_2(x, t)K\tilde{x}, \quad (17)$$

其中:  $\kappa > 0$ , 参数  $K$  的选取后面介绍.

选取积分滑模面

$$s(x, t) = GEx(t) - GEx(t_0) - \int_{t_0}^t [GAx(\tau) + GBu'_{\text{CNF}}(\tau)]d\tau, \quad (18)$$

其中:  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是要设计的矩阵, 需保证  $GB$  可逆;  $x(t_0)$  是系统状态的初始值.

选取控制律为

$$u = u_{\text{CNF}} + u' + u_{\text{ISM}}, \quad (19)$$

其中不连续控制  $u_{\text{ISM}} = -M(x, t)\text{sgn}(s^T GB)$ , 增益  $M(x, t)$  根据扰动的上界确定.

**注 3** 控制器(19) 3部分的作用分别是:  $u_{\text{ISM}}$  保证滑模面可以到达, 完全抵消匹配项;  $u'$  用来抑制滑动模态上非匹配不确定的影响, 保证滑模上闭环系统稳定;  $u_{\text{CNF}}$  使系统在滑动模态上性能满足一定要求.

**定理 1** 当不确定奇异系统(1)的不确定项满足式(3)时, 存在形如式(19)的控制, 其中

$$M(x, t) > \rho_1(x, t) + \|(GB)^{-1}G\|\rho_2(x, t),$$

则滑模面  $s(x, t)$  能够到达.

**证** 由式(1)(18)和(19)可得

$$\dot{s} = GBu_{\text{ISM}} + GBd_m(x, t) + GD_u(x, t),$$

故

$$\begin{aligned} s^T \dot{s} &= \\ s^T [GBu_{\text{ISM}} + GBd_m(x, t) + GD_u(x, t)] &= \\ -(s^T GB)M(x, t)\text{sgn}(s^T GB) + & \\ (s^T GB)d_m(x, t) + s^T GD_u(x, t) &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\|s^T GB\|M(x, t) + \|s^T GB\|\|d_m(x, t)\| + \\ & \|s^T GB\|\|(GB)^{-1}G\|\|D_u(x, t)\| \leq \\ & -\|s^T GB\|[M(x, t) - \rho_1(x, t) - \\ & \|(GB)^{-1}G\|\rho_2(x, t)] < 0, \end{aligned}$$

即满足滑模到达条件  $s^T \dot{s} < 0$ .

令滑模面(18)的导数等于零, 可得等效控制为

$$u_{eq} = -(GB)^{-1}[GBd_m(x, t) + GD_u(x, t)]. \quad (20)$$

将式(20)代入式(1)可以得到误差信号系统的理想滑动模态方程为

$$E\dot{\tilde{x}} = [A + BF_1 + \rho(r, y)BF_2]\tilde{x} + Bu' + LD_u(x, t), \quad (21)$$

其中  $L = [I - B(GB)^{-1}G]$ .

**注4** 对比式(6)和式(8)中  $u_{ISM}$  的增益  $M(x, t)$ , 由于非匹配不确定的存在, 这个增益要相应的增大才能保证系统状态进入滑模面; 另外, 由于滑模只对匹配不确定有完全抵消作用(非匹配项的本质是非控制通道中的不确定项, 滑模控制只能处理控制通道中的匹配不确定), 滑动模态上仍然有非匹配项存在, 如式(21)所示, 而原有的控制器  $u_{CNF}$  只是针对标称系统(2)设计的, 没有考虑不确定的因素, 当系统中非匹配扰动足够大或者引入了非线性项时, 之前设计的控制律难以保证此时滑模的稳定性, 所以引入一个和非匹配不确定项界函数  $\rho_2(x, t)$  相关的控制作用  $u'$  来消除它对系统性能的影响.

下面分析滑动模态上的系统的鲁棒性.

**定理2** 在理想滑动模态(19)上, 通过积分滑模结合扩展CNF的综合控制算法, 可使  $\tilde{x}$  满足

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq k_0 e^{-\beta t} \|\tilde{x}(0)\| + \eta \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \rho_2(x, t) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

其中:

$$\begin{aligned} k_0 &= \sqrt{\lambda_{\max}(P^T E) / \lambda_{\min}(P^T E)}, \\ \beta &= \lambda_{\min}(W) / 2\lambda_{\max}(P^T E), \end{aligned}$$

$\lambda_{\min}(\cdot)$  和  $\lambda_{\max}(\cdot)$  分别表示矩阵 “.” 的最小和最大特征值,  $W$  表示标称系统在  $u_{CNF}$  作用下, 满足假设2的正定矩阵,  $\sup_{0 \leq \tau \leq t} \rho_2(x, t)$  表示  $\rho_2(x, t)$  在  $0 \leq \tau \leq t$  上的上确界,  $K$  选取满足  $P^T BK > 0$ , 另外  $\eta$  为

$$\eta = \frac{\|P\|\|L\|}{2\sqrt{\kappa\beta\lambda_{\min}(P^T BK)\lambda_{\min}(P^T E)}}. \quad (23)$$

**证** 选取Lyapunov函数为  $V = \tilde{x}^T P^T E \tilde{x} \geq 0$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \\ & -\tilde{x}^T W \tilde{x} - \kappa \rho_2(x, t) \tilde{x}^T (P^T BK + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (BK)^T P) \tilde{x} + \tilde{x}^T (P^T L + L^T P) D_u(x, t) \leq \\ & -\lambda_{\min}(W) \|\tilde{x}\|^2 - 2\kappa \rho_2(x, t) \lambda_{\min}(P^T BK) \|\tilde{x}\|^2 + \\ & 2\|\tilde{x}\|\|P\|\|L\|\rho_2(x, t) \leq \\ & -2\beta V + \frac{\|P\|^2\|L\|^2}{2\kappa\lambda_{\min}(P^T BK)} \rho_2(x, t), \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \\ & e^{-2\beta t} V(0) + \frac{(1 - e^{-2\beta t})\|P\|^2\|L\|^2}{4\kappa\beta\lambda_{\min}(P^T E)} \times \\ & \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \rho_2(x, t) \right) \leq \\ & e^{-2\beta t} V(0) + \frac{\|P\|^2\|L\|^2}{4\kappa\beta\lambda_{\min}(P^T BK)} \times \\ & \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \rho_2(x, t) \right), \end{aligned}$$

因此误差满足

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t)\| &\leq \\ & \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P^T E)}{\lambda_{\min}(P^T E)}} e^{-\beta t} \|\tilde{x}(0)\| + \\ & \frac{\|P\|\|L\|}{2\sqrt{\kappa\beta\lambda_{\min}(P^T BK)\lambda_{\min}(P^T E)}} \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \rho_2(x, t) \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

即式(20)的形式. 证毕.

**注5** 由上面的定理可知, 如果把  $\rho_2(x, t)$  视为闭环系统输入, 最终的跟踪误差  $\tilde{x}$  满足输入状态稳定(ISS)<sup>[18]</sup>, 而且这个结果形式能够更清晰地描述出跟踪误差  $\tilde{x}$  的动态性能, 对控制器参数的选取也很有意义: 可通过设计  $\beta, \kappa$  和  $L$  来减小  $\|\tilde{x}(t)\|$ . 首先, 对于指数收敛项  $k_0 e^{-\beta t} \|\tilde{x}(0)\|$ , 可以通过设计控制器  $u_{CNF}$  中的参数  $F_1$  和  $F_2$  来增大参数  $\beta$ , 从而加快指数收敛速度; 通过调整参数  $\kappa$  和  $\beta$ , 可以使稳态误差项满足性能指标; 关于参数  $L$ , 可通过下面的方法选取滑模参数  $G$  使得  $L$  的范数最小: 考虑下面关于未知变量  $\phi$  的不相容矩阵方程:

$$I - B\phi = 0,$$

当  $\phi$  取值为方程的最小二乘解, 即

$$\phi^* = B^+, G^* = B^+. \quad (24)$$

其中  $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$ , 这和文献[7]的结论一致, 积分滑模参数  $G$  选取满足上述条件还有以下优点:

1) 简化积分滑模的不连续控制律为

$$u_{ISM} = -M(x, t) \frac{s}{\|s\|}, \quad (25)$$

2) 减小了不连续增益  $M(x, t)$ , 从而减小了抖振.

**注6** 扩展式(17)为

$$u' = -\kappa h(\rho_2(x, t)) B^M E \tilde{x}, \quad (26)$$

其中 $h(\rho_2(x, t))$ 满足

$$h(\rho_2(x, t)) = \begin{cases} \rho_2(x, t), & D_u(x, t) \neq 0, \\ 0, & D_u(x, t) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

若系统中的非匹配不确定项不存在, 根据定理2可以得到

$$\|\tilde{x}\| \leq k e^{-\beta t} \|\tilde{x}(0)\|,$$

即 $D_u(x, t) = 0$ 时, 误差将会指数渐近收敛到零点, 实现了输出 $y$ 对输入 $r$ 的渐近跟踪, 这和2.1节的结论相吻合.

#### 4 数值算例(Numerical examples)

这部分主要通过3个数值仿真例子, 分别验证了针对确定奇异系统的CNF控制, 含有匹配不确定的奇异系统的积分滑模结合CNF控制以及含有非匹配不确定的奇异系统的积分滑模结合CNF控制的效果.

##### 4.1 确定奇异系统的CNF控制(CNF control for singular systems)

选取奇异系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (28)$$

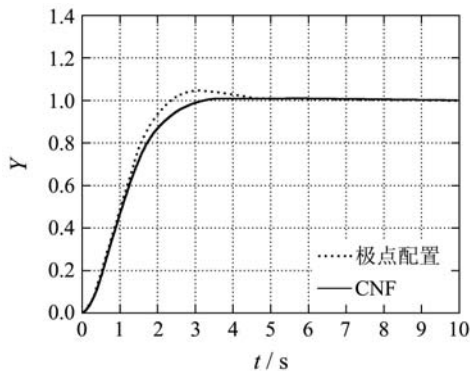


图 1 极点配置算法与CNF 算法

Fig. 1 Comparing pole assignment with CNF

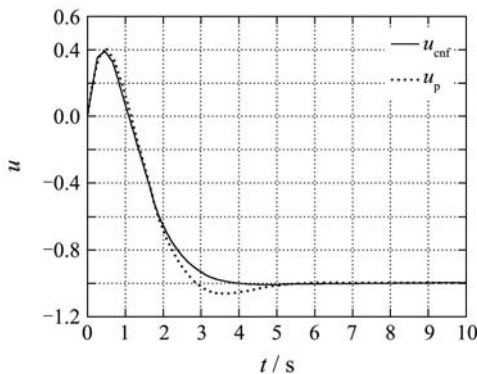


图 2 控制输入

Fig. 2 Input of control

奇异系统的初始状态是 $x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ , 可检验系统满足完全可控条件. 控制目标是系统输出 $y$ 跟踪单位阶跃信号, 并且满足相应的性能指标. 利用极点配置算法将原系统极点配置为 $s_{1,2} = -1 \pm i$ , 图1中虚线为系统输出, 可见系统存在一定的超调量; 根据CNF控制的设计思路结合奇异系统极点配置方法, 设计相关参数为 $F_1 = [-5 \ 1 \ 2]$ ,  $F_2 = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $G_1 = 2$ . 图1中实线即为CNF控制策略下的系统输出: 初始阶段, 非线性控制部分 $u_N$ 作用很小, 通过 $u_L$ 可将系统极点配置为 $s_{1,2} = -1 \pm i$ , 从而保证闭环系统具有较小的阻尼比, 能快速上升至跟踪目标值; 在接近跟踪目标值时, 非线性控制部分 $u_N$ 作用显著, 通过 $u_N$ 作用配置系统极点接近 $s_{1,2} = -1$ (两重根), 从而增大了系统阻尼, 减小了超调量. 图2是控制输入.

##### 4.2 匹配不确定奇异系统的ISM+CNF控制 (ISM+CNF control for singular systems with matched uncertainties)

当系统(28)存在匹配扰动 $d_m = 0.5 \sin(2\pi t)$ , 即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.5 \sin(2\pi t) \\ 0 \\ 0.5 \sin(2\pi t) \end{bmatrix}, \\ y = x_1. \end{cases}$$

选取和4.1节中相同的CNF控制器, 积分滑模参数 $G$ 选取

$$G = B^+ = [0.5 \ 0 \ 0.5],$$

$u_{ISM}$ 中的增益 $M(x, t)$ 选取为

$$M(x, t) = 0.6 > \|0.5 \sin(2\pi t)\|,$$

因为只存在匹配不确定, 积分滑模控制可以将其完全抵消, 所以此处只要选取合适的 $M(x, t)$ 保证到达滑模(此时的滑动模态是稳定的)即可, 此处 $M(x, t)$ 的选取不失一般性. 另外, 使用符号函数会导致抖振, 选取饱和函数替代符号函数消除抖振, 即

$$u_{ISM} = -0.6 \frac{s}{\|s\| + \epsilon},$$

其中取 $\epsilon = 0.001$ . 由图3可知, 存在匹配不确定时, 传统的CNF控制存在一定的跟踪误差; CNF控制和积分滑模相结合, 积分滑模对匹配不确定具有完全的鲁棒性, 跟踪误差渐近收敛至零, 图4是控制输入.

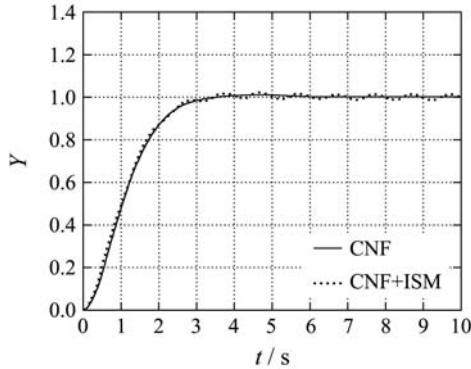


图3 CNF 算法与CNF + ISM 算法(含有匹配不确定)

Fig. 3 Sliding mode function

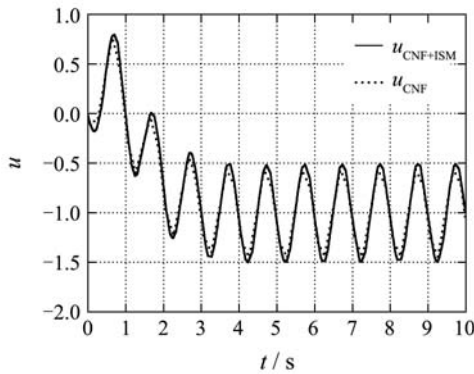


图4 控制输入

Fig. 4 Input of control

**4.3 非匹配不确定奇异系统的ISM+CNF控制 (ISM+CNF control for singular systems with unmatched uncertainties)**

当系统(28)存在匹配扰动 $d_m = 0.5 \sin(2\pi t)$ 和非匹配扰动 $D_u = [0.3x_1^2 \ 0 \ 0]^T$ , 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.5 \sin(2\pi t) \\ 0 \\ 0.5 \sin(2\pi t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3x_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$y = x_1.$

滑模参数选取为 $G = B^+ = [0.5 \ 0 \ 0.5]$ ,  $u_{ISM}$ 中的增益 $M(x, t)$ 选取为

$$M(x, t) = 0.6 + x_1^2 > \|d_m\| + \|(GB)^{-1}G\| \|D_u\|.$$

同样选取饱和函数替代符号函数消除抖振. 若采用传统的CNF结合积分滑模控制, 由于不匹配不确定的存在, 根据注4可知滑动模态上是不稳定的,

会出现有限时间逃逸问题. 根据定理2, 在原有的控制器基础上引入 $u'_{CNF}$ . 由定理2和注5的分析, 主要可以通过参数 $K$ 的选取来减小跟踪误差. 图5中的 $u'$ 的参数选分别选为 $K = 3$ 和 $K = 5$ , 易见, 增大参数 $K$ 可以相应的减小跟踪误差, 图6是控制输入.

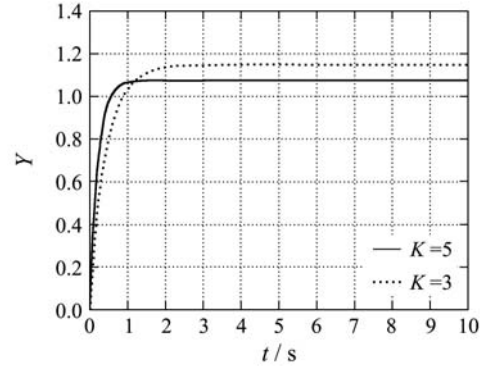


图5 CNF 算法与CNF + ISM 算法(含有非匹配不确定)

Fig. 5 Comparing CNF with CNF + ISM(with unmatched uncertainties)

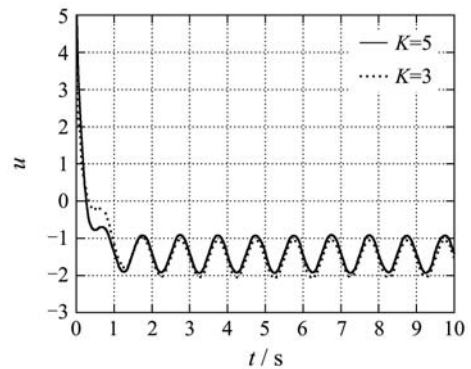


图6 控制输入

Fig. 6 Input of control

针对上面的含有非匹配不确定的奇异系统, 图7为本算法和经典PID控制算法的比较. 经典的PID控制器对于具有强非线性、时变、结构及参数不确定的系统的控制效果不理想, 由于其没有理论分析结果保证其稳定性, 只是凭借经验和试凑离线整定参数, 一旦系统的结构或参数变化时, 控制品质就无法保证了. 具体来说, 首先, 文中所提出的控制器中包含了一个非线性阻尼项, 提供了一个快速响应和抑制超调的折中, 而PID参数一旦确定, 只能保证二者之一; 其次, 文中所提出的控制器中包含不连续的滑模控制器, 当存在匹配扰动时, 滑模控制部分可以完全抑制, 而传统PID无法做到这一点, 仿真图中, PID整定到达稳态后, 仍然存在波动, 正是由于存在匹配的正弦扰动信号的影响. 总之, 文中提出的控制算法是面向性能的, 并且控制律的选取及参数调整有一定的规律可循, 其控制效果是优于经典PID控制的. 图8是控制输入.

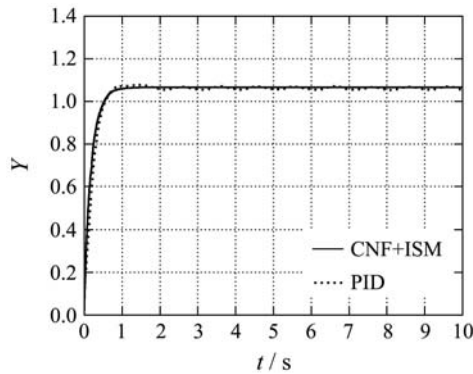


图7 PID算法与CNF+ISM 算法

Fig. 7 Comparing PID with CNF+ISM

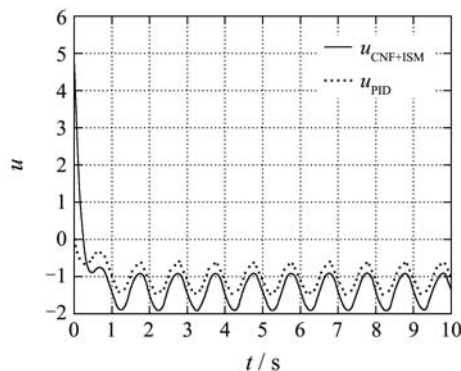


图8 控制输入

Fig. 8 Input of control

## 5 结论(Conclusions)

针对一类不确定的奇异系统,给出了积分滑模控制与复合非线性反馈控制相结合的综合设计方法,设计控制器保证闭环系统能够按性能要求跟踪给定的阶跃信号.特别地,对于存在非匹配不确定时,闭环系统跟踪误差的大小取决于非匹配不确定的范数大小;当系统只存在匹配不确定时,闭环系统跟踪误差能指数收敛到零.最后通过算例验证了算法的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] DAI L. *Singular Control Systems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [2] 杨冬梅,张庆灵,姚波. 广义系统[M]. 北京: 科学出版社, 2004. (YANG Dongmei, ZHANG Qingling, YAO Bo. *Generalized Systems*[M]. Beijing: Science Press, 2004.)
- [3] UTKIN V I. *Sliding Mode in Control and Optimation*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [4] GAO W B. Variable structure control of nonlinear systems, a new approach[J]. *IEEE Transactions on Industrial electronics*, 1993, 40(1): 45 – 55.
- [5] UTKIN V I, SHI J. Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions[C] // *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*. Korea, Japan: IEEE, 1996, 12: 4591 – 4596.

- [6] CAO W, XU J. Nonlinear integral-type sliding surface for both matched and unmatched uncertain system[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(8): 627 – 1360.
- [7] CASTANOS F, FRIDMAN L. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(5): 853 – 858.
- [8] BANDYOPADHAY B, DEEPAK F, PARK Y J. A robust algorithm against actuator saturation using integral sliding mode and composite nonlinear feedback[C] // *The 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea: IFAC, 2008: 14174 – 14179.
- [9] 胡跃明,周其节,刘永清. 广义系统的变结构控制[J]. *控制理论与应用*, 1993, 10(5): 567 – 571. (HU Yueming, ZHOU Qijie, LIU Yongqing. Variable structure control of generalized system[J]. *Control Theory & Applications*, 1993, 10(5): 567 – 571.)
- [10] 温香彩,刘永清. 广义不确定线性系统的稳定化控制器设计[J]. *自动化学报*, 1996, 22(3): 263 – 269. (WEN Xiangcai, LIU Yongqing. Controller design of stabilization for singular uncertain linear systems[J]. *Acta Automatic Sinica*, 1996, 22(3): 263 – 269.)
- [11] 鲍晟,冯勇,郑雪梅. 非匹配不确定MIMO线性系统的终端滑模控制[J]. *控制与决策*, 2003, 18(5): 531 – 535. (BAO Sheng, FENG Yong, ZHENG Xuemei. Terminal sliding mode control of MIMO linear systems with unmatched uncertainties[J]. *Control and Decision*, 2003, 18(5): 531 – 535.)
- [12] WANG C, ZHANG K, YANG C. Terminal sliding mode control for singular systems with unmatched uncertainties[C] // *IEEE International Conference on Control and Automation*. Guangzhou, China: IEEE, 2007: 2929 – 2933.
- [13] PARK P, CHOI D J, KONG S G. Output feedback variable structure control for linear systems with uncertainties and disturbances[J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 72 – 79.
- [14] CHOI H H. Variable structure output feedback control design for a class of uncertain dynamic systems[J]. *Automatica*, 2002, 38(1): 335 – 341.
- [15] YAN X G, SPURGEON S K, EDWARDS C. On discontinuous static output feedback control for linear systems with nonlinear disturbances[J]. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(1): 314 – 319.
- [16] LIN Z, PACHER M, BANDA S. Towards improvement of tracking performance-nonlinear feedback for linear systems[J]. *International Journal of Control*, 1998, 70(1): 1 – 11.
- [17] CHEN B, LEE T, PENG K, et al. Composite nonlinear feedback control for linear systems with input saturation: theory and an application[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(3): 427 – 439.
- [18] SONTAG E D, WANG Y. On characterizations of the input-to-state stability property[J]. *Systems & Control Letters*, 1995, 24(1): 351 – 359.

## 作者简介:

**郭壁垒** (1984—), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为滑模变结构控制、自适应控制, E-mail: blguo@iipc.zju.edu.cn;

**苏宏业** (1969—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、非线性控制, E-mail: suhy@supcon.com;

**柳向斌** (1971—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性控制、自适应控制, E-mail: xbnliu@yahoo.cn;

**刘之涛** (1982—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性控制、无源控制, E-mail: ztliu@iipc.zju.edu.cn.