第 27 卷第 6 期
2010 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 27 No. 6
Jun. 2010

文章编号: 1000−8152(2010)06−0781−05

具时空白噪声1阶双曲系统的稳定性分析

戴喜生, 邓飞其, 彭云建

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 对具有时空白噪声的1阶双曲系统的稳定性进行了分析. 首先, 利用Fourier变换将系统转化成一般抽象形式的随机演化方程, 然后利用随机分析的方法给出了系统的均方指数稳定和几乎必然指数稳定的充分条件, 最后给出实例说明方法的有效性.

关键词: 1阶双曲系统; 时空白噪声; 指数稳定; Fourier变换

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Stability analysis for first-order hyperbolic systems with space-time white noise

DAI Xi-sheng, DENG Fei-qi, PENG Yun-jian

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The stability of first-order hyperbolic system with space-time white noise is discussed. The system is transformed into an abstract stochastic evolution equation using Fourier transformation; sufficient conditions are given for exponentially stable in mean-square and exponentially stable in almost sure. An example is provided to illustrate our theory.

Key words: first order hyperbolic system; space-time white noise; exponential stable; Fourier transformation

1 引言(Introduction)

在物理学中, 常用双曲随机系统来描述连续介质中带有随机扰动的波的传递[1]. 随机因素既与时间有关, 也和空间位置有关, 即随机场, 因此系统是随机偏微分方程[2]. 随机偏微分方程的稳定性作为对系统进行理论分析和实际控制应用首要的一步, 目前已经取得很大进展[3]. 但是, 与随机偏微分方程对应的是无穷维空间, 关于解的稳定性理论的分析比有限维系统要复杂得多. 众所周知, 在有限维情形下许多学者借助于Itô公式, 利用Lyapunov方法, 得到了很好的结果. 而在无穷维空间, Itô公式仅适用于强解, 对适度解(mild solution)不能直接应用. 但与有限维相对应的, Liu在文献[4]中利用强解逼近适度解的方法对一类抽象的随机发展系统的稳定性进行了分析, 建立了无穷维空间中基于Lyapunov泛函的稳定性理论. 文献[5]利用不动点方法对时滞偏微分随机系统进行了分析, 得到了矩指数稳定性的充分条件. 本文则利用文献[6]的思想对无界区域上的1阶双曲抛物方程的稳定性进行了分析, 得到了均方指数稳定和几乎必然指数稳定的充分条件.

2 系统描述及准备(System statement and preliminary)

记H为通常的L^2空间, 其范数和内积分别为$(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$, $\mathbb{H}=(H)^n$(这里上标为笛卡尔积). 对任意的$g,h\in\mathbb{H}$, 记$(g,h)=\sum\limits_{j=1}^{n}(g_j,h_j)$, $\|g\|^2=\sum\limits_{j=1}^{n}\|g_j\|^2$. 设$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$为满足通常条件的概率空间, $\{w_t^k\}$为一列独立同分布的Brown运动, $\mathcal{F}_t^w$为$\{w(s):0\leqslant s\leqslant t\}$生成的$\sigma$代数流. R为H上具有协方差函数$r(x,y)$的迹算子, 满足

$$\mathrm{tr}R=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k=\int r(x,x)\mathrm{d}x<\infty.$$

定义H值R–Wiener过程:

$$W(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\mu_k}w_t^k e_k(x),$$

这里: $\{e_k(x)\}$为H上的标准正交基, μ_k为R对应的特征值, 用$|\cdot|$表示矩阵范数, $\mathrm{E}\{\cdot\}$表示对某个随机变量取数学期望.

本文考虑无界区域上半线性1阶双曲随机系统:

收稿日期: 2009−05−06; 收修改稿日期: 2009−08−09.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60874114).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{d} a_{ij}^k \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} - \alpha u_i + f_i(u_1,\cdots,u_n,x,t) + \\ \qquad \dot{M}_i(u_1,\cdots,u_n,x,t),\ t>0, \\ u_i(x,0) = h_i(x),\ i=1,2,\cdots,n,\ x\in\mathbb{R}^d. \end{cases}$$

其中: $\alpha>0, a_{ij}^k$为常数,

$$\dot{M}_i(u_1,\cdots,u_n,x,t) = \sum_{i=1}^{m}\sigma_{ij}(u_1,\cdots,u_n,x,t)\dot{W}_j(x,t),$$

$f_i(u_1,\cdots,u_n,x,t),\sigma_{ij}(u_1,\cdots,u_n,x,t)$为可料的随机场. $W_1(x,t),\cdots,W_m(x,t)$为H中独立同分布且有具有相同协方差函数$r(x,y)$的维纳随机场. $\dot{W}(x,t)$为维纳随机场的形式导数. 设q_{ij}为M_i和M_j的局部协方差算子$Q_{ij}(t)$的协方差函数(见文献[1]), 使得

$$q_{ij}(u_1,\cdots,u_n;x,y,t) = r(x,y)\times\sum_{k=1}^{m}\sigma_{ik}(u_1,\cdots,u_n,x,t)\cdot \sigma_{jk}(u_1,\cdots,u_n,y,t),$$

Q_t为算子矩阵$[Q_{ij}(t)]$. 那么

$$\mathrm{tr}Q_t = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}Q_{ii}(t) = \sum_{i=1}^{n}\int q_{ii}(u_1,\cdots,u_n,x,x,t)\mathrm{d}x.$$

这里$\int$及下文表示在全空间$\mathbb{R}^d$上积分. 用矩阵符号记上述系统为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sum\limits_{k=1}^{d} A^k\dfrac{\partial u}{\partial x_k} - \alpha u + f(u,x,t) + \\ \qquad \varSigma(u,x,t)\dot{W}(x,t),\ t>0, \\ u(x,0) = h(x),\ x\in\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1}$$

这里: $u=(u_1,\cdots,u_n)$, $h=(h_1,\cdots,h_n)$, $A^k=[a_{ij}]$为$n\times n$矩阵, $k=1,2,\cdots,d$, $\varSigma=[\sigma_{ij}]$为$n\times m$矩阵. 对系统(1)两边进行Fourier变换, 有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = [-iA(\xi)-\alpha I]\hat{u}(\xi,t) + \\ \qquad \hat{f}(u,\xi,t) + \dot{\hat{M}}(u,\xi,t),\ t>0, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{h}(\xi),\ \xi\in\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{2}$$

其中: $A(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{d}\xi_k A^k$, $\hat{M}(u,\xi,t)$为$M(u,x,t) = \varSigma(u,x,t)\dot{W}(x,t)$的Fourier变换, I为单位矩阵. 如果$A(\xi)$对$|\xi|=1$时有n个不同的实特征值, 则称系统(1)是强双曲的, 并设对应的特征向量为$\{\phi_1(\xi),\cdots,\phi_n(\xi)\}$. 因此系统(2)的适度解为

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{K}(\xi,t)\hat{h}(\xi) + \int_0^t\hat{K}(\xi,t-s)\hat{f}(u,\xi,s)\mathrm{d}s + \int_0^t\hat{K}(\xi,t-s)\dot{\hat{M}}(u,\xi,\mathrm{d}s), \tag{3}$$

其中:

$$\hat{K}(\xi,t) = \mathrm{e}^{-tB(\xi)},\ B=\{iA(\xi)+\alpha I\}.$$

由特征向量$\{\phi_1(\xi),\cdots,\phi_n(\xi)\}$, 得到

$$\hat{u}(\xi,t) = \sum_{j=1}^{n}\hat{v}(\xi,t)\phi_j(\xi), \tag{4}$$

$$\mathrm{e}^{-tB(\xi)} = \mathrm{e}^{-t[i\lambda_j(\xi)+\alpha]}\phi_j(\xi), \tag{5}$$

这里$\hat{v}(\xi,t) = (\hat{u}(\xi,t),\phi_j(\xi))$. 也即

$$\hat{v}(\xi,t) = \hat{h}_j(\xi)\mathrm{e}^{-\beta_j(\xi)t} + \int_0^t\mathrm{e}^{-\beta_j(\xi)(t-s)}\hat{f}_j(u,\xi,s)\mathrm{d}s + \int_0^t\mathrm{e}^{-\beta_j(\xi)(t-s)}\hat{N}_j(u,\xi,\mathrm{d}s), \tag{6}$$

其中:

$$-\beta_j(\xi) = i\lambda_j(\xi)+\alpha,\ \hat{h}_j(\xi) = (\hat{h}(\xi),\phi_j(\xi)), \tag{7}$$

$$\hat{f}_j(u,\xi,s) = (\hat{f}_j(u,\xi,s),\phi_j(\xi)), \tag{8}$$

$$\hat{N}_j(u,\xi,\mathrm{d}s) = (\hat{N}(u,\xi,\mathrm{d}s),\phi_j(\xi)). \tag{9}$$

对式(3)取Fourier逆变换, 得到系统(1)的适度解为

$$u(x,t) = (G_th)(x) + \int_0^t(G_{t-s}f)(u,x,s)\mathrm{d}s + \int_0^t(G_{t-s}\varSigma)(u,x,\mathrm{d}s), \tag{10}$$

这里G_t为如下定义的格林算子:

$$(G_tg)(x) = (\frac{1}{2\pi})^{d/2}\int K(x-y,t)g(y)\mathrm{d}y,$$

$$K(x,t) = (\frac{1}{2\pi})^{d/2}\int\mathrm{e}^{ix\xi-B(\xi)t}\mathrm{d}\xi.$$

3 稳定性分析(Stability analysis)

本文主要讨论适度解的稳定性, 关于解的存在性见文献[1].

3.1 均方指数稳定(Exponentially stable in mean square)

定义 1 设$u^h(x,t)$为系统(1)在给定初值为$h(x)$时的解, 若存在$a>0, L>1$, 对系统(1)的任意另外一个解$u^{h'}(x,t)$(对应于初值$u(x,0)=h'(x)$)满足下面的不等式:

$$\mathrm{E}\|u_t^h - u_t^{h'}\|^2 \leqslant L\mathrm{e}^{-at}\|h-h'\|^2, t\geqslant 0,$$

那么称$u^h(x,t)$均方指数稳定.

定理 1 设下面的条件满足:

1) $f_i(u_1,u_2,\cdots,x,t)$, $\sigma_{ij}(u_1,u_2,\cdots,x,t)$为可料的$H$值过程, 并且存在大于0的常数$b_1,b_2$使得

$$|f(u,x,t)-f(u',x,t)|^2 = \sum_{i=1}^n |f_i(u,x,t)-f_i(u',x,t)|^2 \leqslant b_1|u-u'|^2,$$
$$|\Sigma(u,x,t)-\Sigma(u',x,t)|^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m |\sigma_{ij}(u,x,t)-\sigma_{ij}(u',x,t)|^2 \leqslant b_2|u-u'|^2, \text{a.s..}$$

2) 系统(1)是强双曲的, 并且对$W_j(x,t)$, $j=1,2,\cdots,m$, 有同一协方差函数$r(x,y), r(x,y)\leqslant r_0$. 那么下面的不等式成立:

$$\mathrm{E}\|u_t^h-u_t^{h'}\|\leqslant 3\mathrm{e}^{-\rho t}\|h-h'\|^2.$$

这里$\rho=2\alpha-\dfrac{3b_1}{\alpha}-3b_2r_0$. 进一步, 如果$2\alpha^2>3b_1+3\alpha b_2r_0$, 那么$u^h(x,t)$是均方指数稳定的.

证　设$u^h(x,t), u^{h'}(x,t)$为系统(1)的2个适度解(以下简记为$u(x,t), u'(x,t)$), 则

$$u^h(x,t)=(G_th)(x)+\int_0^t(G_{t-s}f)(u,x,s)\mathrm{d}s+\int_0^t(G_{t-s}\Sigma)(u,x,\mathrm{d}s),$$
$$u^{h'}(x,t)=(G_th')(x)+\int_0^t(G_{t-s}f)(u',x,s)\mathrm{d}s+\int_0^t(G_{t-s}\Sigma)(u',x,\mathrm{d}s),$$

那么

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\|u_t-u_t'\|^2\leqslant\\&3\mathrm{E}\|G_th-G_th'\|^2+\\&3\mathrm{E}\|\int_0^t G_{t-s}(f_s(u)-f_s(u'))\mathrm{d}s\|^2+\\&3\mathrm{E}\|\int_0^t G_{t-s}(\sigma_s(u)-\sigma_s(u'))\mathrm{d}W_s\|^2=\\&I_1+I_2+I_3.\end{aligned}\tag{11}$$

注意到$|\hat{K}(\xi,t)|\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}$, 利用Plancheral定理和Parseval等式(向量形式也成立), 有

$$\|G_th\|^2=\|\hat{K}(\xi,t)\hat{h}\|^2\leqslant \mathrm{e}^{-2\alpha t}\|h\|^2,\tag{12}$$

所以

$$I_1\leqslant 3\mathrm{e}^{-2\alpha t}\|h-h'\|^2.\tag{13}$$

对I_2, 记$\mu(u,x,t)=\int_0^t G_{t-s}f(u,x,s)\mathrm{d}s$, 则

$$\hat{\mu}(u,\xi,t)=\sum_{j=1}^n\hat{\mu}_j(u,\xi,t)\phi_j(\xi),\tag{14}$$

其中

$$\hat{\mu}_j(u,\xi,t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta_j(\xi)(t-s)}\hat{f}_j(u,\xi,s)\mathrm{d}s.\tag{15}$$

利用Hölder不等式有

$$\begin{aligned}&\|\hat{\mu}_j(u,\cdot,t)\|^2=\\&\int|\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta_j(\xi)(t-s)}\hat{f}_j(u,\xi,s)\mathrm{d}s|^2\mathrm{d}\xi\leqslant\\&\int|\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\hat{f}_j(u,\xi,s)\mathrm{d}s|^2\mathrm{d}\xi=\\&\int|\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}\mathrm{e}^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}\hat{f}_j(u,\xi,s)\mathrm{d}s|^2\mathrm{d}\xi\leqslant\\&\int(\int_0^t\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\mathrm{d}s\int_0^t(\mathrm{e}^{\frac{-\alpha}{2}(t-s)}\hat{f}_j(u,\xi,s))^2\mathrm{d}s)\mathrm{d}\xi\leqslant\\&\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|\hat{f}_j(u,\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s=\\&\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|f_j(u,\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s,\end{aligned}\tag{16}$$

所以, 由定理条件1)得

$$\begin{aligned}&I_2=3\mathrm{E}\|\mu(u,\cdot,t)-\mu(u',\cdot,t)\|^2=\\&3\mathrm{E}\sum_{j=1}^n\|\mu_j(u,\cdot,t)-\mu_j(u',\cdot,t)\|^2=\\&3\mathrm{E}\sum_{j=1}^n\|\hat{\mu}_j(u,\cdot,t)-\hat{\mu}_j(u',\cdot,t)\|^2\leqslant\\&\frac{3}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{E}\sum_{j=1}^n\|f_j(u,\cdot,s)-f_j(u',\cdot,s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{3b_1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{E}\|u(s)-u'(s)\|^2\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{17}$$

类似地, 对I_3, 记

$$\eta(u,x,t)=\int_0^t G_{t-s}\Sigma(u,x,\mathrm{d}s)=\int_0^t G_{t-s}\Sigma(u,x,s)\mathrm{d}W_s,$$

则

$$\hat{\eta}_j(u,\xi,t)=\int_0^t\mathrm{e}^{-\beta_j(\xi)(t-s)}\hat{N}_j(u,\xi,\mathrm{d}s),\tag{18}$$

且

$$\hat{N}_j(u,\xi,\mathrm{d}s)=(\hat{M}(u,\xi,\mathrm{d}s),\phi_j(x))\tag{19}$$

为鞅. 因此

$$\begin{aligned}&\|\hat{\eta}_j(u,\cdot,t)\|^2=\\&\int|\int_0^t\mathrm{e}^{-\beta_j(\xi)(t-s)}\hat{N}_j(u,\xi,\mathrm{d}s)|^2\mathrm{d}\xi\leqslant\\&\int|\int_0^t\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\hat{N}_j(u,\xi,\mathrm{d}s)|^2\mathrm{d}\xi.\end{aligned}\tag{20}$$

再由下面的不等式(文献[2], pp194, 引理7.7):

$$\mathrm{E}\|\int_0^t\Phi(s)\mathrm{d}W_s\|^p\leqslant c_{\mathrm{p}}(\int_0^t(\mathrm{E}\|\Phi(s)\|^p)^{2/p})\mathrm{d}s)^{p/2},$$

取$p=2$, 那么$c_{\mathrm{p}}=1$, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\|\hat{\eta}_j(u,\cdot,t)\|^2\leqslant\\&\int_0^t\mathrm{e}^{-2\alpha(t-s)}(\int(\hat{q}(u;\xi,\xi;s)\phi_j(\xi),\phi_j(\xi))\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

注意到$\alpha>0$, 就有

$$\mathrm{E}\|\eta(u,\cdot,t)\|^2=$$

$$\mathrm{E}\|\hat{\eta}(u,\cdot,t)\|^2=\sum_{j=1}^{n}\|\hat{\eta}_j(u,\cdot,t)\|^2\leqslant$$
$$\int_0^t\mathrm{e}^{-2\alpha(t-s)}\sum_{j=1}^{n}(\int\hat{q}(u;\xi,\xi;s)\phi_j(\xi),\phi_j(\xi))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\int\mathrm{e}^{\alpha s}\sum_{j=1}^{n}(\hat{q}(u;\xi,\xi;s)\phi_j(\xi),\phi_j(\xi))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s=$$
$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{tr}Q_s(u)\mathrm{d}s. \tag{21}$$

故由定理条件(1), 并注意到$r(x,y)<r_0$,

$$I_3=3\mathrm{E}\|\eta(u,\cdot,t)-\eta(u',\cdot,t)\|^2\leqslant$$
$$3\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}(\mathrm{tr}\,Q_s(u)-\mathrm{tr}\,Q_s(u'))\mathrm{d}s=$$
$$3e^{-\alpha t}\int_0^t\int\mathrm{e}^{\alpha s}r(x,x)|\Sigma(u,x,s)-$$
$$\Sigma(u',x,s)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant$$
$$3b_2r_0\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|u_s-u'_s\|^2\mathrm{d}s. \tag{22}$$

根据不等式(11)(13)(17)(22)有

$$\mathrm{E}\|u(t)-u'(t)\|^2\leqslant$$
$$3\mathrm{e}^{-2\alpha t}\|h-h'\|^2+\frac{b_1}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{E}\|u_s-u'_s\|^2\mathrm{d}s+$$
$$3b_2r_0\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\mathrm{E}\|u_s-u'_s\|^2\mathrm{d}s. \tag{23}$$

即

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{E}\|u(t)-u'(t)\|^2\leqslant$$
$$3\mathrm{e}^{-\alpha t}\|h-h'\|^2+(\frac{3b_1}{\alpha}+3b_2r_0)\cdot$$
$$\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\|u_s-u'_s\|^2\mathrm{d}s. \tag{24}$$

由Gronwall不等式就有

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{E}\|u(t)-u'(t)\|^2\leqslant3\mathrm{e}^{-(\alpha-\frac{3b_1}{\alpha}-3b_2r_0)t}\|h-h'\|^2,$$

所以

$$\mathrm{E}\|u(t)-u'(t)\|^2\leqslant3\mathrm{e}^{-(2\alpha-\frac{3b_1}{\alpha}-3b_2r_0)t}\|h-h'\|^2.$$

证毕.

3.2 几乎必然指数稳定(Almost surely exponential stable)

定理 2 假设定理1的条件成立, 有(沿用定理1的记号)

$$\|u(t)-u'(t)\|^2\leqslant\delta\|h-h'\|^2\mathrm{e}^{-\rho t/2},$$

这里$\delta=\mathrm{e}^{\rho/2}$. 且当$\rho>0$时, $u(x,t)$是几乎必然指数稳定的.

证 设$N_0>0$, 对任意自然数$N\geqslant N_0$, 记I_N为区间$[N,N+1]$, 并沿用定理1的记号, 那么对$t\in I_N$有

$$u(x,t)=G_{t-N}u(N)+\int_N^tG_{t-N}f(u_s,x,s)\mathrm{d}s+$$
$$\int_N^tG_{t-N}\Sigma(u_s,x,s)\mathrm{d}W_s,$$
$$u'(x,t)=G_{t-N}u'(N)+\int_N^tG_{t-N}f(u'_s,x,s)\mathrm{d}s+$$
$$\int_N^tG_{t-N}\Sigma(u'_s,x,s)\mathrm{d}W_s,$$

所以

$$\|u(t)-u'(t)\|\leqslant$$
$$\|G_{t-N}(u(N)-u'(N))\|+$$
$$\|\int_N^tG_{t-N}(f(u_s,x,s)-f(u'_s,x,s))\mathrm{d}s\|+$$
$$\|\int_N^tG_{t-N}(\Sigma(u_s,x,s)-\Sigma(u'_s,x,s))\mathrm{d}W_s\|. \tag{25}$$

固定$\varepsilon>0$, 则

$$\mathrm{P}[\sup_{t\in I_N}\|u(t)-u'(t)\|>\varepsilon]\leqslant$$
$$\mathrm{P}[\sup_{t\in I_N}\|G_{t-N}(u(N)-u'(N))\|>\frac{\varepsilon}{3}]+$$
$$\mathrm{P}[\sup_{t\in I_N}\|\int_N^tG_{t-N}(f(u_s,x,s)-f(u'_s,x,s))\mathrm{d}s\|>\frac{\varepsilon}{3}]+$$
$$\mathrm{P}[\sup_{t\in I_N}\|\int_N^tG_{t-N}(\Sigma(u_s,x,s)-$$
$$\Sigma(u'_s,x,s))\mathrm{d}W_s\|>\frac{\varepsilon}{3}]\leqslant$$
$$(\frac{3}{\varepsilon})^2\mathrm{E}[G_{t-N}\sup_{t\in I_N}\|u(N)-u'(N)\|^2]+$$
$$(\frac{3}{\varepsilon})^2\mathrm{E}[\sup_{t\in I_N}\|\int_N^tG_{t-s}(f(u_s,x,s)-$$
$$f(u'_s,x,s))\mathrm{d}s\|^2]+$$
$$(\frac{3}{\varepsilon})^2\mathrm{E}[\sup_{t\in I_N}\|\int_N^tG_{t-s}(\Sigma(u_s,x,s)-$$
$$\Sigma(u'_s,x,s))\mathrm{d}W_s\|^2]=J_1+J_2+J_3, \tag{26}$$

那么, 由定理1有

$$J_1=(\frac{3}{\varepsilon})^2\mathrm{E}[\sup_{t\in I_N}\|G_{t-N}(u(N)-u'(N)\|^2]\leqslant$$
$$(\frac{3}{\varepsilon})^2\mathrm{E}[\sup_{t\in I_N}\mathrm{e}^{-2\alpha(t-N)}\|(u(N)-u'(N)\|^2]\leqslant$$
$$(\frac{3}{\varepsilon})^2\mathrm{E}\|(u(N)-u'(N)\|^2\leqslant$$
$$3(\frac{3}{\varepsilon})^2\mathrm{e}^{-\rho N}\|h-h'\|^2. \tag{27}$$

类似于I_2的估计, 注意到

$$\|\hat{\mu}_j(u,\cdot,t)-\hat{\mu}_j(u',\cdot,t)\|^2=$$
$$\int|\int_N^t\mathrm{e}^{-\beta_j(\xi)(t-s)}(\hat{f}_j(u',\xi,s)-\hat{f}_j(u,\xi,s))\mathrm{d}s|^2\mathrm{d}\xi\leqslant$$
$$\int|\int_N^t\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}(\hat{f}_j(u,\xi,s)-\hat{f}_j(u,\xi,s))\mathrm{d}s|^2\mathrm{d}\xi\leqslant$$

$$\int_N^t \|\hat{f}_j(u,\xi,s)-\hat{f}_j(u,\xi,s)\|^2\mathrm{d}s, \tag{28}$$

所以

$$J_2 = (\frac{3}{\varepsilon})^2\mathrm{E}[\sup_{t\in I_N}\|\int_N^t G_{t-s}(f(u_s,x,s)-f(u'_s,x,s))\mathrm{d}s\|^2] \leqslant (\frac{3}{\varepsilon})^2\mathrm{E}[\sup_{t\in I_N}\int_N^t\|f(u_s,x,s)-f(u'_s,x,s)\|^2\mathrm{d}s] \leqslant b_1(\frac{3}{\varepsilon})^2\| \int_N^{N+1}\|f(u_s,x,s)-f(u'_s,x,s)\|^2\mathrm{d}s] \leqslant 3b_1(\frac{3}{\varepsilon})^2\int_N^{N+1}\|u-u'\|^2\mathrm{d}s \leqslant 3b_1(\frac{3}{\varepsilon})^2\|h-h'\|^2\int_N^{N+1}\mathrm{e}^{-\rho s}\mathrm{d}s \leqslant \frac{27b_1}{\rho\varepsilon^2}\mathrm{e}^{-\rho N}\|h-h'\|^2. \tag{29}$$

类似于对I_3的估计, 注意到式(20), 有

$$J_3 = (\frac{3}{\varepsilon})^2\mathrm{E}[\sup_{t\in I_N}\|\int_N^t G_{t-s}(\varSigma(u_s,x,s)-\varSigma(u'_s,x,s))\mathrm{d}W_s\|^2] \leqslant r_0b_2(\frac{3}{\varepsilon})^2\int_N^{N+1}\mathrm{E}\|u-u'\|^2\mathrm{d}s \leqslant \frac{27b_2r_0}{\rho\varepsilon^2}\mathrm{e}^{-\rho N}\|h-h'\|^2, \tag{30}$$

因此

$$\mathrm{P}[\sup_{t\in I_N}\|u(t)-u'(t)\|>\varepsilon] \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\|h-h'\|^2. \tag{31}$$

其中$C = 27(1+b_1+b_2r_0)/\rho$. 对每个$N \geqslant N_0$, 令$\varepsilon_N = \mathrm{e}^{-\rho N/4}\|h-h'\|$, 则

$$\mathrm{P}\{\sup_{t\in I_N}\|u(t)-u'(t)\|>\mathrm{e}^{-\rho N/4}\|h-h'\|\}\leqslant C\mathrm{e}^{-\rho N/2}.$$

由Borel-Cantelli引理知存在$T(\omega)>0$, 使得对任意$t>T(\omega)$, 有

$$\|u(t)-u'(t)\|^2 \leqslant \delta\mathrm{e}^{-\rho t/2}\|h-h'\|^2.$$

证毕.

4 例子(Example)

考虑下面的系统(文献[1], pp136):

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v_0\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\alpha v+f_1(v,p,x,t)+\dot{M}_1(v,p,x,t),$$
$$\frac{\partial p}{\partial t}+v_0\frac{\partial p}{\partial x}+\kappa^2\rho\frac{\partial p}{\partial x} = -\alpha p+f_2(v,p,x,t)+\dot{M}_2(v,p,x,t),$$
$$v(x,0)=h_1(x),\ p(x,0)=h_2(x),\ x\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0.$$

其中

$$\dot{M}_i(v,p,x,t)=\sum_{j=1}^{2}\sigma_{ij}(v,p,x,t)\dot{W}_j(x,t),\ i=1,2.$$

如果令$u_1=v,\ u_2=p$, 则对应于系统(1)中的$d=1$, $n=2$的情形:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=A\dfrac{\partial u}{\partial x}+f(u,x,t)+\Sigma(u,x,t)\dot{W}(x,t),\\ u(x,0)=h(x),\ x\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0.\end{cases} \tag{32}$$

这里

$$A=-\begin{bmatrix}v_0 & 1/\rho\\ \kappa^2\rho & v_0\end{bmatrix},$$

有2个不相同的实特征值: $\lambda_{1,2}=v_0\pm\kappa$, 因此系统(32)是强双曲的; 进一步如果$f,\varSigma$的Lipshitz常数满足定理1的条件, 则其适度解是均方指数稳定和几乎必然指数稳定的.

5 结论(Conclusions)

本文讨论了无界区域上1阶半线性双曲随机系统的稳定性. 当系统是强双曲时, 且漂移系数和扩算系数满足通常的Lipschitz条件时, 利用Fourier变换及随机分析方法得到了解的均方指数稳定和几乎必然指数稳定的充分条件. 并举例说明了应用.

参考文献(References):

[1] CHOW P L. *Stochastic Partial Differential Equations*[M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007.

[2] DAPRATO G, ZABCZYK J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*[M] //*Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992, Vol. 44.

[3] KAI L. *Stability of Infinite Dimensional Stochastic Differential Equations with Applications*[M] //*Monographs and Surveys in pure and applied mathematics*, Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2006, Vol. 135.

[4] KAI L. Lyapunov functional and asyptotic stability of stochastic delay evolution equations[J]. *Stochastics and Stochastics reports*, 1998, 63(1/2): 1 – 26.

[5] JIAO W L. Fixed points and exponential stability of mild solutions of stochastic partial differential equations with delays[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 342(2): 753 – 760.

[6] CARABALLO T, KAI L. Exponential stability of mild solution of stochastic partial differential equations with delays[J]. *Stochastic analysis and applications*, 1999, 17(5): 743 – 763.

作者简介:

戴喜生　(1976—), 男, 博士研究生, 目前感兴趣的研究方向为无穷维随机系统控制理论及其应用, E-mail: mathdxs@163.com;

邓飞其　(1962—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 研究领域为复杂系统的控制及其应用, E-mail: aufqdeng@scut.edu.cn;

彭云建　(1974—), 男, 讲师, 感兴趣的研究方向是随机非线性动态系统建模与应用, E-mail: pengyj@scut.edu.cn.