

# 具有通信时延的离散时间二阶多个体网络的一致性问题的

刘德进<sup>1</sup>, 刘成林<sup>2</sup>

(1. 无锡商业职业技术学院 电子工程系, 江苏 无锡 214153; 2. 江南大学 自动化研究所, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 针对具有通信时延的离散时间二阶多个体系统的一致性问题的, 采用了具有静态领导者的一致性算法. 根据广义Nyquist判据和Gerschgorin圆盘定理, 得到了系统渐近收敛到领导者状态的充分条件. 在个体与领导者构成的连接拓扑满足一定连通性的前提下, 该充分条件是分散形式的, 与控制参数、邻居个体之间的连接权值相关, 而与通信时延大小无关. 仿真结果证明了结论的正确性.

**关键词:** 二阶多个体系统; 一致性问题; 通信时延

**中图分类号:** TP242      **文献标识码:** A

## Consensus problem of discrete-time second-order multi-agent network with communication delay

LIU De-jin<sup>1</sup>, LIU Cheng-lin<sup>2</sup>

(1. Electronic Engineering Department, Wuxi Institute of Commerce, Wuxi Jiangsu 214153, China;  
2. Institute of Automation, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

**Abstract:** The consensus algorithm with a static leader is proposed to solve the consensus problem of the discrete-time second-order multi-agent systems with communication delay. By the generalized Nyquist criterion and the Gerschgorin disc theorem, the sufficient conditions are obtained for the system to converge to the leader's states asymptotically. With the interconnection topology composed of the agents and the leader that satisfies certain connectivity conditions, the sufficient conditions are decentralized, dependent on the control parameters and the weights between the neighboring agents, and independent of the communication delay. Numerical examples are provided to illustrate the correctness of the results.

**Key words:** second-order multi-agent systems; consensus problem; communication delay

### 1 引言(Introduction)

目前, 动物群聚现象的建模与仿真引起了众多科学领域的广泛研究, 如生物、物理、计算机仿真等. 同时, 多个体系统协调控制由于其广阔的工程应用背景受到了许多工程应用领域的关注<sup>[1]</sup>, 如人工智能、自动控制等.

作为多个体系统协调控制中最基本和最重要的问题之一, 一致性问题是指空间分布的几个个体或者处理器, 在没有中央协调控制或者全局通信的情况下, 达到一个相同的输出<sup>[2]</sup>. 近几年, 个体动态为单积分的多个体系统, 即一阶多个体系统, 在固定连接拓扑或切换连接拓扑下渐近达到一致的连通条件得到了深入研究<sup>[3~5]</sup>. 对于个体动态为双积分的多个体系统, 即二阶多个体系统, Ren等<sup>[6,7]</sup>分别提出了一致性算法来解决系统的静态和动态一致性问题,

并得到了系统渐近达到一致的充分条件.

当个体之间存在不可忽略的通信时延时, 多个体系统的一致性研究变得非常困难. 利用不同的分析方法, 如频域分析法<sup>[8]</sup>、Lyapunov函数法<sup>[9,10]</sup>、时延图法<sup>[11,12]</sup>等, 一阶多个体系统在通信时延作用下的一致性收敛条件得到了广泛分析. 对于二阶多个体系统, Lin等<sup>[13~16]</sup>考察了具有相同通信时延的一致性问题, 并得到了系统渐近达到一致的充分条件. 由于在这些算法中个体自身引入了与通信时延大小相同的自时延, 所以一致性条件取决于通信时延以及连接拓扑的连通性. 当一致性算法中个体自身采用当前状态时, 通过选择合适的一致性协调控制算法和控制参数, 二阶多个体系统同样可实现静态一致性收敛与通信时延无关, 对任意通信时延具有鲁棒性<sup>[17,18]</sup>. Yang等<sup>[19]</sup>考察了具有不同通信时延的二阶

多个体系统在双一致算法作用下的一致性问题的, 算法采用个体当前状态与延时邻居状态比较. 根据小增益稳定性定理, 文[19]得到了系统在常数和变化时延作用下的频域一致性条件, 给出了通信时延的最大界限.

在工程应用中, 多个体系统通常利用传感器或通信网络在个体之间传输采样信息, 并基于离散采样信息对系统进行协调控制来达到整体目标. 目前, 具有通信时延的离散时间一阶多个体系统的一致性问题得到了广泛关注和研究, 而具有通信时延的离散时间二阶多个体系统一致性问题并没有受到更广泛地关注.

本文考察了具有不同通信时延的离散时间二阶多个体系统的一致性问题, 并采用了具有静态领导者的一致性算法. 利用频域分析法, 得到了二阶多个体系统渐近收敛到领导者状态的分散形式的充分条件. 当系统个体和领导者构成的连接拓扑以领导者为全局可达节点时, 该条件与个体自身的控制参数、以及个体和领导者、邻居个体的连接权值有关, 而与通信时延大小无关. 同时, 给出了系统不能渐近收敛到领导者状态的充分条件, 该条件仍然是分散形式的, 且与通信时延无关. 此外, 结论被分别推广到无领导者的离散时间二阶多个体系统的静态一致性问题中.

## 2 图论(Graph theory)

$n$ 阶加权有向图  $G = (V, E, A)$  由节点集  $V = \{\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n\}$ , 边集  $E \subseteq V \times V$  和加权邻接矩阵  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n} (a_{ij} \geq 0)$  组成. 节点指标集  $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$ . 在加权有向图  $G$  中, 从节点  $\mathcal{V}_i$  到节点  $\mathcal{V}_j$  的有向边表示为:  $e_{ij} = (\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) \in E$ . 假定邻接矩阵  $A$  中对应  $G$  的有向边  $e_{ij}$  的邻接元素  $a_{ij}$  是正的, 即  $a_{ij} > 0 \leftrightarrow e_{ij} \in E$ , 且假定  $a_{ii} = 0, \forall i \in \mathcal{I}$ . 节点  $\mathcal{V}_i$  的邻居节点集表示为:  $N_i = \{\mathcal{V}_j \in V : (\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) \in E\}$ . 节点  $\mathcal{V}_i$  的输出度定义为:  $\text{deg}_{\text{out}}(\mathcal{V}_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ .  $D$  为对角阵, 且其对角元素为图  $G$  中对应节点的输出度. 加权有向图  $G$  的Laplacian矩阵定义为:  $L = D - A$ .

如果图  $G$  中从节点  $\mathcal{V}_i$  到节点  $\mathcal{V}_j$  之间有一条路径, 那么  $\mathcal{V}_j$  称为从节点  $\mathcal{V}_i$  可达的; 否则,  $\mathcal{V}_j$  称为从节点  $\mathcal{V}_i$  不可达的. 如果一个节点从有向图中任意其他节点都是可达的, 那么称该节点为全局可达的.

在由  $n$  个体组成的多个体系统中, 个体  $i$  可视为有向图  $G$  中节点  $\mathcal{V}_i$ , 个体之间的信息流可以看作有向图中节点之间的有向边, 所以多个体系统中的连接拓扑可以描述为有向图  $G = (V, E, A)$ .

## 3 具有通信时延的二阶多个体系统一致性 (Consensus of second-order multi-agent systems with communication delay)

考察个体动态为双积分的多个体系统

$$\begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) + v_i(k), \\ v_i(k+1) = v_i(k) + u_i(k), i \in \mathcal{I}, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $v_i \in \mathbb{R}$  和  $u_i \in \mathbb{R}$  分别表示个体  $i$  的位置、速度和加速度. 目前, 关于离散时间二阶多个体系统(1)的一致性的研究结果比较少, Zhang和Tian<sup>[20]</sup>分析了网络通信存在随机丢包情况下系统(1)渐近达到一致的条件. 尽管如此, 离散时间二阶多个体系统在通信时延作用下的一致性分析并没有受到广泛关注.

对于系统(1), 采用类似于文[7]中具有静态领导者的协调控制算法:

$$u_i(k) = -\kappa_i v_i(k) + b_i(x_0 - x_i(k)) + \sum_{\mathcal{V}_j \in N_i} a_{ij}(x_j(k) - x_i(k)), \quad (2)$$

其中:  $\kappa_i > 0$ ,  $N_i$  表示个体  $i$  邻居个体集,  $a_{ij} > 0, \mathcal{V}_j \in N_i$  为连接有向图  $G = (V, E, A)$  的邻接矩阵  $A$  的邻接元素,  $x_0$  为一常数, 表示静态领导者,  $b_i \geq 0$  表示个体  $i$  与领导者  $x_0$  的连接权值:

$$\begin{cases} b_i > 0, \text{ 个体 } i \text{ 与领导者相连;} \\ b_i = 0, \text{ 其他.} \end{cases}$$

在接下来内容中,  $B = \text{diag}\{b_i, i \in \mathcal{I}\}$ .

当个体之间的信息传输存在通信时延时, 算法(2)变为

$$u_i(k) = -\kappa_i v_i(k) + b_i(x_0 - x_i(k)) + \sum_{\mathcal{V}_j \in N_i} a_{ij}(x_j(k - D_{ij}) - x_i(k)), \quad (3)$$

其中:  $D_{ij} > 0$  为通信时延, 对应于个体  $j$  到个体  $i$  的信息流.

在算法(3)的作用下, 系统(1)的闭环形式为

$$\begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) + v_i(k), \\ v_i(k+1) = \\ v_i(k) - \kappa_i v_i(k) + b_i(x_0 - x_i(k)) + \\ \sum_{\mathcal{V}_j \in N_i} a_{ij}(x_j(k - D_{ij}) - x_i(k)). \end{cases} \quad (4)$$

**定理 1** 考察  $n$  个个体与一个静态领导者组成的多个体系统(4), 其个体与领导者构成的有向连接拓扑为静态的, 且领导者是该连接拓扑的一个全局可达节点.

1) 当  $0 < \kappa_i \leq 2, \forall i \in \mathcal{I}$  时, 如果

$$2 \sum_{\nu_j \in N_i} a_{ij} + b_i < \frac{2\kappa_i^2}{2 + \kappa_i} \tag{5}$$

成立, 则系统(4)的个体位置渐近收敛到领导者状态  $x_0$ , 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = x_0, \forall i \in \mathcal{I}$ .

2) 当  $\max_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i > 2, i \in \mathcal{I}$  时, 对于  $0 < \kappa_i \leq 2$ , 式(5)成立; 对于  $\kappa_i > 2$ ,

$$2 \sum_{\nu_j \in N_i} a_{ij} + b_i < 2\kappa_i - 4 \tag{6}$$

成立, 则系统(4)状态发散, 不能收敛到领导者状态.

在证明定理1之前, 先给出两个有用的引理.

**引理 1**<sup>[18]</sup> 考察  $n$  个个体与一个静态领导者组成的多个体系统(4), 其个体与领导者构成的连接拓扑为静态的, 且领导者是该连接拓扑的一个全局可达节点, 则  $\det(L + B) \neq 0$ , 其中  $L$  为除领导者之外的所有个体构成连接拓扑的Laplacian矩阵.

**引理 2** 函数  $f(y) = \frac{1 - \gamma + 2y}{1 + \gamma^2 - 2\gamma y}, y \in [-1, 1]$ . 当  $\gamma \in [-1, 1)$  时,  $f(y) \leq \frac{3 - \gamma}{(1 - \gamma)^2}$ ; 当  $\gamma < -1$  时,  $f(y) \leq -\frac{1}{1 + \gamma}$ .

**证** 通过判断  $f(y)$  关于  $y$  的导数的定号性, 即可证明引理2成立. 证毕.

接下来, 证明定理1. 记  $\bar{x}_i = x_i - x_0$ , 则关于  $\bar{x}_i$  和  $v_i$  动态方程为

$$\begin{cases} \bar{x}_i(k+1) = \bar{x}_i(k) + v_i(k), \\ v_i(k+1) = v_i(k) - \kappa_i v_i(k) - b_i \bar{x}_i(k) + \sum_{\nu_j \in N_i} a_{ij} (\bar{x}_j(k - D_{ij}) - \bar{x}_i(k)). \end{cases} \tag{7}$$

对系统(7)进行  $Z$  变换, 得到系统(7)关于  $\bar{x} = [\bar{x}_1(k), \dots, \bar{x}_n(k)]^T$  的特征方程为:

$$\det(\text{diag}\{(z - 1)(z - 1 + \kappa_i), i \in \mathcal{I}\} + (L(z) + B)) = 0,$$

其中  $L(z) = \{l_{ij}(z)\}$  是  $n \times n$  矩阵

$$l_{ij}(z) = \begin{cases} -a_{ij} z^{-D_{ij}}, & \nu_j \in N_i; \\ \sum_{\nu_j \in N_i} a_{ij}, & j = i; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

且  $L(1) = L$ .

记  $M(z) = \det(\text{diag}\{(z - 1)(z - 1 + \kappa_i), i \in \mathcal{I}\} + (L(z) + B))$ . 当  $z = 1$  时, 由引理1得:  $M(1) = \det(L + B) \neq 0$ , 所以  $M(z)$  在  $z = 1$  处没有零点.

当  $z \neq 1$  时, 考察  $f(z) = \det(I_{n \times n} + G(z))$  的零点, 其中  $G(z) = \text{diag}\{\frac{1}{(z - 1)(z - 1 + \kappa_i)}, i \in$

$\mathcal{I}\}(L(z) + B)$ . 与文献[22]相似, 根据Gerschgorin圆盘定理, 得

$$\lambda(G(e^{j\omega})) \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} G_i,$$

其中  $G_i = \{\varsigma, \varsigma \in C, |\varsigma - \frac{K_i + b_i}{(e^{j\omega} - 1)(e^{j\omega} - 1 + \kappa_i)}| \leq |\frac{K_i}{(e^{j\omega} - 1)(e^{j\omega} - 1 + \kappa_i)}|\}$  为圆盘, 其中  $K_i = \sum_{\nu_j \in N_i} a_{ij}$ .

要证明  $\lambda(G(e^{j\omega}))$  不包围  $(-1, j0)$  点, 只要证明: 对于所有的  $\omega \in [-\pi, \pi]$  和  $i \in \mathcal{I}, (-a, j0) (a \geq 1)$  不在圆盘  $G_i$  内. 通过计算, 得

$$\begin{aligned} & \left| -a + j0 - \frac{K_i + b_i}{(e^{j\omega} - 1)(e^{j\omega} - 1 + \kappa_i)} \right|^2 - \\ & \left| \frac{K_i}{(e^{j\omega} - 1)(e^{j\omega} - 1 + \kappa_i)} \right|^2 \geq \\ & \left( a - \frac{b_i(2 \cos \omega - \gamma_i + 1)}{2(1 - 2\gamma_i \cos \omega + \gamma_i^2)} \right) \times \\ & \left( a - \frac{(2K_i + b_i)(2 \cos \omega - \gamma_i + 1)}{2(1 - 2\gamma_i \cos \omega + \gamma_i^2)} \right), \end{aligned}$$

其中  $\gamma_i = 1 - \kappa_i$ , 则  $\gamma_i < 1$ .

接下来, 分两种情况讨论.

1)  $0 < \kappa_i \leq 2, i \in \mathcal{I}$ , 即  $-1 \leq \gamma_i < 1, i \in \mathcal{I}$ . 根据引理2和条件(5), 得

$$\begin{aligned} & \left| -a + j0 - \frac{K_i + b_i}{(e^{j\omega} - 1)(e^{j\omega} - 1 + \kappa_i)} \right| > \\ & \left| \frac{K_i}{(e^{j\omega} - 1)(e^{j\omega} - 1 + \kappa_i)} \right|, \end{aligned} \tag{8}$$

对于所有  $\omega \in [-\pi, \pi]$  和  $a \geq 1$  成立, 即  $(-a, j0) (a \geq 1)$  不在圆盘  $G_i$  内, 所以  $\lambda(G(e^{j\omega}))$  不包围点  $(-1, j0)$ .

根据广义Nyquist判据<sup>[23]</sup>, 因为对于所有的  $\omega \in [-\pi, \pi], \lambda(G(e^{j\omega}))$  不包围  $(-1, j0)$  点, 则  $M(z)$  的所有零点的模都小于1, 因此,  $\bar{x} = 0$  渐近稳定, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = x_0, \forall i \in \mathcal{I}.$$

2)  $\max_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i > 2$ , 即  $\min_{i \in \mathcal{I}} \gamma_i < -1$ .

对于  $0 < \kappa_i \leq 2$ , 条件(5)成立, 则  $(-a, j0) (a \geq 1)$  不在对应的圆盘  $G_i$  内; 对于  $\kappa_i > 2$ , 根据引理2和条件(6), 不等式(8)对所有  $\omega \in [-\pi, \pi]$  和  $a \geq 1$  成立, 即  $(-a, j0) (a \geq 1)$  不在圆盘  $G_i$  内, 所以  $\lambda(G(e^{j\omega}))$  不包围点  $(-1, j0)$ .

当  $\max_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i > 2$  时,  $G(z)$  存在单位圆外的极点. 根据广义Nyquist判据<sup>[23]</sup>, 由于  $\lambda(G(e^{j\omega}))$  在  $\omega \in [-\pi, \pi]$  上不包围  $(-1, j0)$  点, 则  $M(z)$  有单位圆外零点, 所以系统(4)的状态发散. 证毕.

**注 1** 定理1没有给出系统渐近达到领导者状态的充要条件. 然而, 定理1得到了系统渐近达到领导者状态的分散形式的充分条件, 给出了具体的参数设计依据; 同时, 也给出了系统在一定参数设计下, 系统不能达到一致的参数设计规则.

**注 2** 定理1可以推广到无领导者的一致性协调控制中, 即算法(3)变为

$$u_i(k) = -\kappa_i v_i(k) + \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} (x_j(k - D_{ij}) - x_i(k)), \quad (9)$$

其中:  $\kappa_i > 0, a_{ij} > 0$ .

在算法(9)作用下, 系统(1)的闭环形式为

$$\begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) + v_i(k), \\ v_i(k+1) = v_i(k) - \kappa_i v_i(k) + \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} (x_j(k - D_{ij}) - x_i(k)). \end{cases} \quad (10)$$

**推论 1** 考察  $n$  个个体组成的多个体系统(10), 其有向连接拓含有一个全局可达节点.

1) 当  $0 < \kappa_i \leq 2, \forall i \in \mathcal{I}$  时, 如果

$$2 \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} < \frac{2\kappa_i^2}{2 + \kappa_i} \quad (11)$$

成立, 则系统(10)的个体位置渐近达到静态一致, 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i(k) = c, \forall i \in \mathcal{I}$ , 其中  $c$  为一常数.

2) 当  $\max_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i > 2, i \in \mathcal{I}$  时, 对于  $0 < \kappa_i \leq 2$ , 式(11)成立; 对于  $\kappa_i > 2$ ,

$$2 \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} < 2\kappa_i - 4 \quad (12)$$

成立, 则系统(10)状态发散.

### 4 仿真研究(Simulation)

**例 1** 考察具有静态领导者的离散时间多个体系统(4). 系统由5个个体与一个静态领导者组成, 其连接拓扑如图1所示. 显然, 领导者为个体与领导者构成的连接拓扑的全局可达节点.

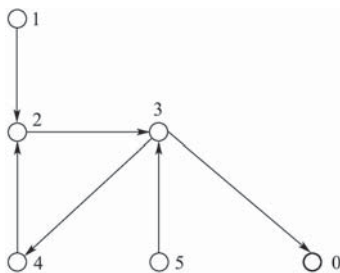


图 1 连接拓扑

Fig. 1 Interconnection topology

1) 选择控制参数:  $0 < \kappa_i \leq 2, \forall i \in \mathcal{I}$ , 如  $\kappa_1 = 1.2, \kappa_2 = 1, \kappa_3 = 1.5, \kappa_4 = 1.1, \kappa_5 = 2$ , 根据定理1,

由条件(5)得:

$$a_{12} < 0.45, a_{23} < 0.33, a_{34} + 0.5b_3 < 0.64, a_{42} < 0.39, a_{53} < 1.33.$$

选择个体之间的连接权值为:

$$a_{12} = 0.4, a_{23} = 0.3, a_{34} = 0.4, a_{42} = 0.5, a_{53} = 1.1, b_3 = 0.2.$$

静态领导者的位置为:  $x_0 = 2.0$ , 且个体的初始状态随机产生, 则在所选择的参数下, 系统(4)的个体位置渐近收敛领导者状态, 个体速度渐近收敛到0, 且系统收敛与通信时延的大小无关, 如图2.

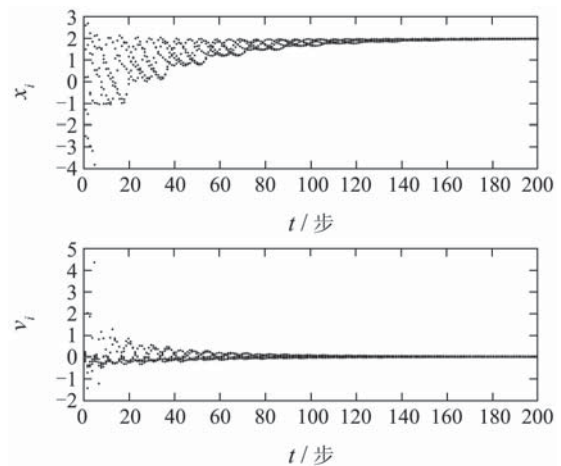


图 2 个体的位置与速度

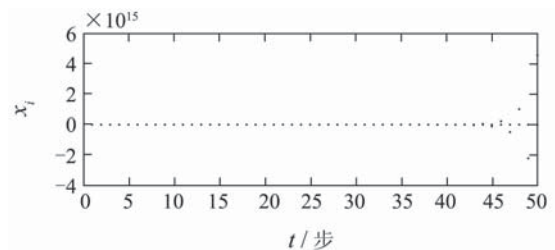
Fig. 2 Positions and velocities of the agents

2)  $\max_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i > 2$ , 假定  $\kappa_i \leq 2, i = 1, 2, 3, 4, \kappa_5 > 2$ . 选择控制参数  $\kappa_i \leq 2, i = 1, 2, 3, 4$  与1)中相同:  $\kappa_1 = 1.2, \kappa_2 = 1, \kappa_3 = 1.5, \kappa_4 = 1.1$ , 控制参数  $\kappa_5 = 3.5$ . 根据定理1, 对于  $\kappa_i \leq 2, i = 1, 2, 3, 4$ , 由条件(5)得:

$a_{12} < 0.45, a_{23} < 0.33, a_{34} + 0.5b_3 < 0.64, a_{42} < 0.39$ ; 对于  $\kappa_5 = 3.5$ , 由条件(6)得:  $a_{53} < 1.5$ . 选择个体之间的连接权值为:

$$a_{12} = 0.2, a_{23} = 0.3, a_{34} = 0.3, a_{42} = 0.2, a_{53} = 1.2, b_3 = 0.4.$$

在所选择的参数下, 系统(4)状态发散, 个体无法达到一致, 如图3.



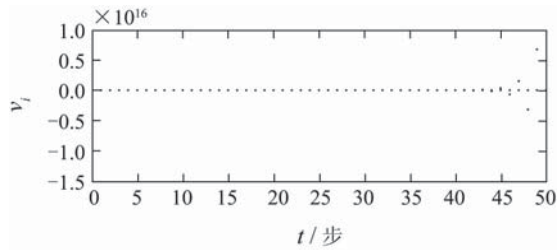


图3 个体状态发散

Fig. 3 Divergence of the agents' states

## 5 结语(Conclusion)

本文考察了具有不同通信时延的离散时间二阶多个体系统的领导-跟随一致性问题. 根据广义Nyquist判据和Gerschgorin圆盘定理, 得到了离散时间二阶多个体系统渐近收敛到领导者状态的充分条件. 当系统个体和领导者构成有向连接拓扑以领导者为全局可达节点时, 一致性收敛条件仅与个体自身的控制参数, 以及个体和领导者、邻居个体的连接权值有关, 而与通信时延大小无关. 同时, 也给出了系统不能渐近收敛到领导者状态的充分条件, 该条件仍然是分散形式的, 且与通信时延无关. 此外, 结论被推广到无领导者的二阶多个体系统在不同通信时延和一般有向连接拓扑结构作用下的静态一致性问题中, 并得到了相应的一致性收敛条件.

## 参考文献(References):

- [1] PETERSEN K Y, GRAVDAHL J T, NIJMEIJER H. *Group Coordination and Cooperative Control*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [2] VICSEK T, CZIROK A, JACOB E B, et al. Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226 – 1229.
- [3] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [4] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [5] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [6] REN W, ATKINS E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(10/11): 1002 – 1033.
- [7] HONG Y G, GAO L X, CHENG D Z, et al. Lyapunov-based approach to multiagent systems with switching jointly connected interconnection[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 943 – 948.
- [8] WANG J, ELIA N. Consensus over network with dynamic channels[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Seattle, WA, United states: IEEE, 2008: 2637 – 2642.
- [9] MUNZ U, PAPACHRISTODOULOU A, ALLGOWER F. Nonlinear multi-agent system consensus with time-varying delays[C] // *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, Korea: Elsevier Science Press, 2008: 1522 – 1527.
- [10] WANG W, SLOTINE J J E. Contraction analysis of time-delayed communications and group cooperation[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(4): 712 – 717.
- [11] CAO M, MORSE A S, ANDERSON B D O. Reaching an agreement using delayed information[C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, United states: IEEE, 2006: 3375 – 3380.
- [12] WANG L, XIAO F. A new approach to consensus problems for discrete-time multiagent systems with time-delays[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Minneapolis, MN, United states: IEEE, 2006: 2118 – 2123.
- [13] LIN P, JIA Y, DU J, et al. Distributed consensus control for second-order agents with fixed topology and time-delay[C] // *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*. Zhangjiajie, China: IEEE, 2007: 577 – 581.
- [14] HU J, HONG Y. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays[J]. *Physica A*, 2007, 374(2): 853 – 863.
- [15] SU H, WANG X. Second-order consensus of multiple agents with coupling delay[C] // *Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Chongqing, China: IEEE Press, 2008: 7181 – 7186.
- [16] LIN P, JIA Y, DU J, et al. Distributed leaderless coordination for networks of second-order agents with time-delay on switching topology[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Seattle, WA, United states: IEEE, 2008: 1564-1569.
- [17] LEE D J, SPONG M K. Agreement with non-uniform information delays[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Minneapolis, MN, United states: IEEE, 2006: 756-761.
- [18] KAWAMURA S, SVININ M. *Advances in Robot Control: From Everyday Physics to Human-Like Movements*[M]. New York: Springer Berlin Heidelberg, 2006: 107 – 134.
- [19] YANG W, BERTOZZI A L, WANG X F. Stability of a second order consensus algorithm with time delay[C] // *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico: IEEE, 2008: 2926 – 2931.
- [20] ZHANG Y, TIAN Y-P. Consentability and protocol design of multi-agent systems with stochastic switching topology[J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1195 – 1201.
- [21] TIAN Y-P, LIU C-L. Robust consensus of multi-agent systems with diverse input delays and nonsymmetric interconnection perturbations[J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1374 – 1353.
- [22] 刘成林, 田玉平. 具有不同通信时延的多个体系统的一致性[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2008, 38(1): 170-174. (LIU Chenglin, TIAN Yuping. Consensus of multi-agent system with diverse communication delays[J]. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2008, 38(1): 170 – 174.)
- [23] DESOER C A, WANG Y T. On the generalized Nyquist stability criterion[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980, 25(2): 187 – 196.

## 作者简介:

刘德进 (1958—), 男, 实验师, 目前研究方向为电子信息(通讯)、应用电子、智能信息网络等, E-mail: liudejin@jscpu.com;  
刘成林 (1981—), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为群体协调控制、混沌耦合同步等, E-mail: liucl@jiangnan.edu.cn.