

## 基于稀疏表示的系统辨识方法

郭金库<sup>1,2</sup>, 吴瑾颖<sup>2</sup>, 刘光斌<sup>2</sup>

(1. 清华大学自动化系信息所, 北京 100084; 2. 解放军第二炮兵工程学院303教研室, 陕西 西安 710025)

**摘要:** 基于信号的稀疏表示理论提出一种线性时不变系统辨识方法. 该方法利用线性调频信号作为线性时不变系统激励输入信号, 在利用传统方法进行系统辨识前利用稀疏分解算法对系统输出信号进行噪声处理. 线性调频信号具有较好的时频聚集特性, 线性时不变系统的输出也将具有很好的时频特征, 利用基于Gabor字典的稀疏分解将能有效地提取输出信号中的有效分量, 滤除其中的噪声成分, 提高系统辨识的精度. 仿真实验表明, 本文提出的方法在低信噪比情况下, 辨识效果好于传统方法.

**关键词:** 线性时不变系统; 系统辨识; 稀疏表示; 匹配追踪算法; Gabor字典

**中图分类号:** TP911.72      **文献标识码:** A

## System identification based on the sparse representation of signals

GUO Jin-ku<sup>1,2</sup>, WU Jin-ying<sup>2</sup>, LIU Guang-bin<sup>2</sup>

(1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Xi'an Research Institute of Hi-Tech Hongqing Town, Xi'an Shannxi 710025, China)

**Abstract:** On the basis of sparse representation of signals, a novel method is proposed to identify the linear time-invariant system in low signal-to-noise ratio environment. This method employs the chirp signals as the input to the identified system, and let the output be processed before identification by using the matching pursuit algorithm for noise-reduction. Because of the time-frequency localization property of the input and output signals, a large amount of additive white noise can be reduced and the performance of system identification is thus improved. Simulation results show that the proposed method outperforms the conventional methods significantly in very low signal-to-noise ratio environment.

**Key words:** linear time-invariant system; system identification; sparse representation; matching pursuit; Gabor dictionary

### 1 引言(Introduction)

在无线通讯领域, 通常利用系统辨识方法进行信道的估计, 很多研究者做了重要的研究工作<sup>[1~5]</sup>. 该问题通常可以描述为:

$$y[n] = \sum_k h[n-k]x[k] + v[n], \quad (1)$$

其中:  $x[k]$ 为输入激励信号;  $h[n]$ 为线性时不变(linear time invariant, LTI)系统(或通道)的脉冲响应;  $v[n]$ 为加性噪声;  $y[n]$ 为输出信号. 线性时不变系统的辨识就是利用输入信号 $x[k]$ 和输出信号 $y[n]$ 来估计系统的脉冲响应函数 $h[n]$ 或转移函数 $H(\omega)$ . 系统转移函数 $H(\omega)$ 可以用互谱的方法来求取

$$H(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}, \quad (2)$$

其中:  $S_{xy}(\omega)$ 为信号 $x[k]$ ,  $y[n]$ 的互功率谱,  $S_{xx}(\omega)$ 为

信号 $x[k]$ 的自功率谱. 这种互谱方法其实相当于传统的基于最小二乘的估计方法. 当加性噪声 $v[n]$ 为零均值的高斯白噪声时, 利用公式(2)系统的辨识结果为渐进无偏的. 公式(2)估计方差接近于Cramer-Rao下界<sup>[3]</sup>, 但是正比于噪声 $v[n]$ 的方差, 因而当输出信号的信噪比SNR较低时, 系统的辨识效果将显著降低.

Xiang-Gen Xia<sup>[3,5]</sup>提出了一种基于时频滤波的线性时不变系统辨识方法. 利用线性调频信号作为输入激励信号, 在进行系统识别前利用时频滤波技术对输出信号进行滤波, 大大提高了辨识的精度. 线性调频信号具有较好的时频特性, 其能量在时频面上非常聚集. 线性调频信号通过线性时不变系统后, 系统的输出信号也将具有比较好的时频特性, 而系统中的加性噪声则平铺在时频面. 因此, 相对于时域或者频域的滤波, 基于时频域的滤波技术可以更

有效地滤除白噪声. 但是文献[3]中描述的基于离散Gabor变换和时变滤波的方法来实现时频域上滤除噪声也有很大的缺点: 1) 离散Gabor变换使得信号的能量弥散在Gabor原子组成的正交基上, 其时频分辨率比较低; 2) 基于离散Gabor变换的时变滤波需要设计时变滤波器(利用时频掩膜来实现)来提出反映输出信号时频特征的分量, 滤除噪声. 这种时频掩膜的设计通常不具有自适应特点, 需要根据特定信号设计不同的滤波器.

信号的稀疏表示<sup>[4]</sup>是将信号在一过完备的原子库中进行分解, 若原子库中的原子与信号的主要成分相似, 则仅需要少数原子的线性组合, 就能比较精确地表示信号, 分解结果也将是稀疏的. 信号的稀疏表示是线性时频表示, 但是不同于传统线性时频表示的是其采用的分解集是过完备原子库而非正交基. 如果字典中的原子具有较好的时频聚集性, 这种稀疏表示可以有效的揭示信号的内在时频结构<sup>[6]</sup>. 信号的稀疏表示理论在信号处理各领域得到了广泛的应用<sup>[6~8]</sup>. 本文提出一种基于信号稀疏表示的时不变系统系统辨识方法. 利用线性调频信号作为输入激励信号, 在进行系统识别前利用Gabor字典和Matching Pursuit算法对输出信号进行稀疏表示, 这种表示仅提取反映信号时频特征的分量而忽略噪声分量. 仿真实验表明, 这种方法不需要设计时变滤波器, 却能够有效滤除噪声, 提高系统辨识的精度. 文章分为4个部分: 第2部分介绍基于Gabor字典的Matching Pursuit算法; 第3部分利用稀疏表示进行系统辨识, 并通过仿真实验和传统方法进行对比; 第4部分为文章总结.

## 2 基于Gabor字典的匹配追踪算法(Matching pursuit algorithm with Gabor dictionary)

Gabor字典定义为Gabor原子的一种过完备集合. 由于Gabor具有最好的时频的聚集性, 利用Gabor字典分解信号, 更能够揭示信号的时频特征, 因此这种字典在信号的稀疏分解中得到了广泛的应用. Gabor原子为一调制的高斯函数, 其数学表示为

$$g_\gamma = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{i\xi t + \varphi}, \quad (3)$$

其中 $g(t)e^{-\pi t^2}$ 为高斯窗函数. 并且从公式(3)可以看出每个Gabor原子可以用参数 $\gamma(s, u, \xi)$ 来描述(其中 $s$ 称为Gabor原子的时间尺度,  $u$ 为时间中心,  $\xi$ 为中心频率,  $\varphi$ 为相位). 文献[6]中给出了一个离散化的Gabor字典 $D_\alpha (D_\alpha = \{g_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Gamma_\alpha})$ , 其中参数集合 $\Gamma_\alpha$ 定义为 $\gamma = (a^j, pa^j u, ka^{-j} \xi)$ , 且 $a = 2$ ,  $u = 1/2$ ,  $\xi = \pi$ ,  $0 \leq j \leq \log_2 N$ ,  $0 \leq p \leq N2^{-j+1}$ ,  $0 \leq k \leq 2^{j+1}$ .

Matching pursuit(MP)算法是实现信号在过完备字典上稀疏表示的算法之一. 它是由Mallat在1993年提出的一种在局部寻找次最优解的贪婪算法<sup>[6]</sup>. MP算法的基本过程可以描述如下:

设 $H$ 为Hilbert空间,  $D = \{g_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Gamma}$ 为 $H$ 中一过完备字典. 原子 $g_\gamma(t)$ 由参数 $\gamma$ 描述, 并且 $\gamma \in \Gamma_\alpha$ . 原子 $g_\gamma(t)$ 经过归一化处理, 有 $\|g_\gamma(t)\| = 1$ . 假设待分析信号为 $f$ , 且 $f \in H$ , 则 $f$ 可以被分解为:

$$f = \sum_{n=0}^{m-1} \langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle g_{\gamma_n} + R^m f, \quad (4)$$

且

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{m-1} |\langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle|^2 + \|R^m f\|^2, \quad (5)$$

其中 $R^m f (R^0 f = f)$ 称为第 $m$ 次迭代后的残留信号,  $g_{\gamma_n}$ 为第 $n$ 次迭代中原子字典内与残留信号 $R^n f$ 匹配的原子, 且 $g_{\gamma_n}$ 满足

$$|\langle R^n f, g_{\gamma_n} \rangle| \geq \alpha \sup_{\gamma \in \Gamma} |\langle R^n f, g_\gamma \rangle|, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (6)$$

MP算法在每次迭代中从原子字典中选取与残留信号匹配的原子, 然后从残留信号中减去该原子所占分量得到新的残留信号, 当残留信号的能量低于一定阈值或者满足其他停机条件, 该迭代过程结束. Mallat和Zhang证明当每次匹配中的原子满足式(6)时, 残留信号的能量 $\|R^m f\|^2$ 在有限维空间中按指数规律收敛. 为了减少MP算法的计算复杂度, 在传统MP的基础上, 研究者提出了各种改进的快速算法<sup>[7,8]</sup>.

在本文算法中, 作者采用了文献[7]中介绍的针对Gabor原子字典设计的快速算法. 传统MP方法将信号在一事先选定的固定不变的字典中分解. 而文献[7]中描述的算法利用Gabor原子最好的时频聚集性, 将信号在随残留信号自适应变化的子字典中进行分解, 显著减少了算法计算量和内存需求. 而且该方法保持了和传统方法相近的分解性能和精度.

MP算法不但可以实现信号的稀疏分解, 还可以有效的抑制信号中的白色噪声<sup>[6]</sup>. 特别是当使用的Gabor原子具有好的时频特性时, 灵活选择MP算法的停机条件可以有效的提取信号的时频特征而忽略信号中的白色噪声. 进一步, 如果本文对于信号中可能存在的有色噪声具有先验知识, 就可以筛选掉那些被认定为有色噪声的Gabor原子. 根据具体的应用, 我们可以制定和采用具体的原子筛选标准. 本文定义RSR(residu-to-signal ratio)为 $10 \log_{10} (\|R^m f\|/\|f\|)$ , 其中 $R^m f$ 为第 $m$ 次迭代后得到的残留信号. 在本文中, 作者通过限定RSR的大小来作为MP算法的迭代停机条件.

### 3 基于稀疏分解的系统辨识(System identification based on sparse representation)

类似于文献[3,5], 本文选用线性调频信号 $x[n]$ 作为线性时不变系统的输入激励

$$x[n] = \cos\left(\left[\frac{n+15}{150}\right]^4\right), \quad n = 0, 1, \dots, 499. \quad (7)$$

在仿真实验中, 令含噪声的通道模型为

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k] + v[n], \quad (8)$$

其中:  $h[n]$ 为线性时不变系统(或通道)的脉冲响应,  $N$ 随机的选为20,  $v[n]$ 为独立于输入信号 $x[n]$ 加性高斯白噪声. 令

$$s[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k], \quad (9)$$

则, 对于输出信号 $y[n]$ , 可定义信噪比SNR为

$$10 \log_{10} \left( \frac{\sum_{n=0}^{499} |s[n]|^2}{\sum_{n=0}^{499} |v[n]|^2} \right). \quad (10)$$

图1显示了一随机产生的 $h[n]$ 、系统转移函数 $H(\omega)$ 以及在输入为给定线性调频信号时系统的输出和输出的傅里叶谱.

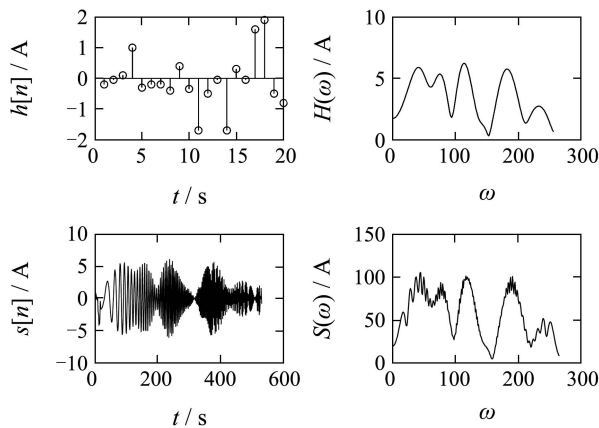


图1 随机产生的 $h[n]$ 、系统转移函数 $H(\omega)$ 以及在输入为给定线性调频信号时系统的输出和输出的谱

Fig. 1 Randomly chosen example of LTI channel  $h[n]$ , output signal  $y[n]$  and their Fourier spectrum.

如前所述, 如果采用时频聚集性好的原子组成的字典对信号进行稀疏表示, 表示的结果将能够充分反映信号的时频特征. 相对的, 信号中的噪声和字典中的原子不匹配使得经过稀疏分解后还原的信号中噪声分量大大减少. 这里采用第2部分介绍的基于Gabor字典的Matching Pursuit算法对于输出信号 $y[n]$ 进行稀疏分解, 假设分解得到 $M$ 个Gabor原

子(MP分解的停机准则设定为RSR等于输出信号信噪比SNR). 则令

$$\tilde{y}[n] = \sum_{j=0}^{M-1} \langle R^j y, g_{\gamma_j} \rangle g_{\gamma_j}, \quad (11)$$

$\tilde{y}[n]$ 即为滤除了白噪声的输出信号. 利用互谱可以估计得到系统传递函数为

$$\tilde{H}_{mp}(\omega) = \frac{S_{\tilde{y}x}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}, \quad (12)$$

其中:  $x[n]$ 为式(7)定义的线性调频信号. 对应的, 本文将没有经过输出信号去噪处理得到的系统脉冲响应表示为

$$\tilde{H}_{old}(\omega) = \frac{S_{yx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)}, \quad (13)$$

其中 $x[n]$ 也为线性调频信号.

图2给出了当输出信号信噪比为-5 dB时, 分别利用本文方法及传统方法对图1所示系统估计出来的系统传递函数.

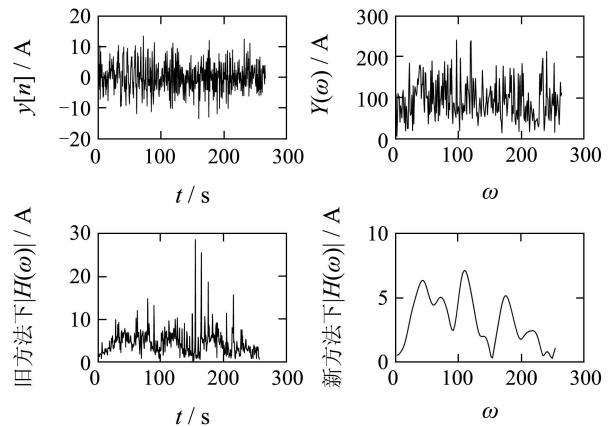


图2 信噪比为-5dB下利用文中方法及传统方法分别对图1系统进行辨识的结果

Fig. 2 System identification results with additive noise of SNR = -5 dB for LTI channel shown in Fig. 1.

为了对比本文方法和传统方法的估计效果, 在输出信号不同信噪比下, 分别利用式(12)和式(13)对随机产生的线性时不变系统 $h[n]$ ( $N$ 选为20)进行200次Monte-Carlo试验. 本文定义辨识传递函数SNR为

$$10 \log_{10} \left( \frac{H(\omega)}{H(\omega) - \tilde{H}(\omega)} \right), \quad (14)$$

其中:  $H(\omega)$ 为系统的传递函数,  $\tilde{H}(\omega)$ 为估计的系统传递函数.

图3显示了两种方法辨识效果的对比. 从图中可以看出, 本文的方法明显好于传统估计方法. 特别是当信噪比较低时, 对比更加明显.

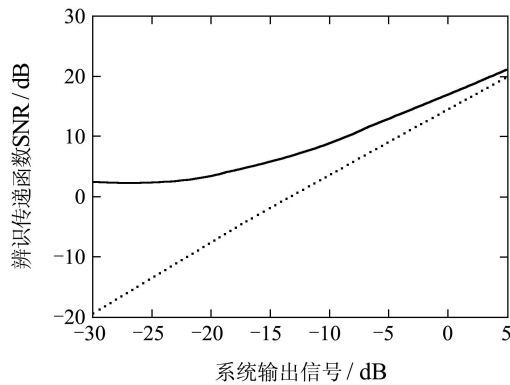


图3 不同信噪比下,本文方法(实线)和传统方法(虚线)系统辨识效果比较

Fig. 3 Comparison of system identification between the proposed method (solid line) and conventional method (dashed line)

#### 4 结论(Conclusion)

基于Gabor原子字典的Matching Pursuit算法可以有效地提取信号中的时频分量而有效地抑制白色噪声. 线性调频信号具有较好的时频聚集特性, 线性时不变系统的输出也将具有很好的时频特征. 本文利用线性调频信号作为线性时不变系统激励输入信号, 在利用传统方法进行系统辨识前利用稀疏分解算法对系统输出信号进行噪声处理.

仿真实验表明, 本文提出的方法在低信噪比情况下, 明显好于传统方法. 文中的方法也可应用于系统输出中存在有色噪声的情况. 因为基于Gabor原子字典的Matching Pursuit对信号稀疏表示的结果为一些Gabor原子的线性组合, 如果本文对于信号中可能存在的有色噪声具有先验知识, 就可以利用类似时频滤波的方法筛选掉那些被认定为有色噪声的Gabor原子<sup>[9]</sup>, 将能有效实现有色噪声下系统辨识的精度.

#### 参考文献(References):

- [1] SODERSTROM T, STOICA P. *System Identification*[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [2] SHALVI O, WEINSTEIN E. System identification using nonstationary signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(8): 2055 – 2063.
- [3] XIA X G. System identification using chirp signals and time-variant filters in the joint time-frequency domain[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, 45(8): 2072 – 2084.
- [4] YEKUTIEL AVARGEL, ISRAEL COHEN. Adaptive system identification in the short-time fourier transform domain using cross-multiplicative transfer function approximation[J]. *IEEE Transactions on Audio, Speech, And Language Processing*, 2008, 16(1): 162 – 172.
- [5] XIANG-GEN XIA. Channel identification with doppler and time shifts using mixedtraining signals[C] // *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Seattle, WA: IEEE, 1998, 4: 2081 – 2084.
- [6] MALLAT S G, ZHANG Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3397 – 3415.
- [7] GUO JINKU, LIU GUANGBIN, YANG XIAO JUN. A novel matching pursuit algorithm with adaptive subdictionary[C] // *The 9th International Conference on Signal Processing*. Beijing, China: IEEE, 2008, 1: 207 – 210.
- [8] KRSTULOVIC S, GRIBONVAL R. MPTK: matching pursuit made tractable[C] // *2006 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Toulouse: IEEE, 2006, 3: 496 – 499.
- [9] HLAWATSCH F, COSTA A H, KRATTENTHALER W. Time-frequency signal synthesis with time-frequency extrapolation and don't-care regions[J]. *IEEE Transactions on Audio, Speech, And Language Processing*, 1994, 42(9): 2513 – 2520.

#### 作者简介:

郭金库 (1980—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为时频分布、稀疏表示, E-mail: gjk05@mails.tsinghua.edu.cn;

吴瑾颖 (1982—), 女, 讲师, 目前研究方向为模式识别与智能系统、控制理论与应用;

刘光斌 (1963—), 男, 教授、博士生导师, 目前研究方向为模式识别与智能系统.