第 27 卷第 11 期
2010 年 11 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 27 No. 11
Nov. 2010

文章编号: 1000−8152(2010)11−1537−06

含离散与分布时滞的不确定中立型系统鲁棒稳定性新判据

李 涛, 张合新, 孙 鹏
(第二炮兵工程学院 自动化系, 陕西 西安 710025)

摘要: 基于离散时滞分解思想, 通过构造一种新的Lyapunov-Krasovskii泛函并结合Jensen不等式技巧, 建立了线性矩阵不等式(LMI)形式的时滞相关鲁棒稳定性新判据. 该方法允许中立时滞项的系数矩阵存在时变不确定性, 增强了系统的鲁棒性能. 同时针对分布时滞项难于处理的问题, 构造了其分解计算泛函. 数值算例表明所得结论的有效性和更低的保守性.

关键词: Lyapunov-Krasovskii泛函; 时滞分解; 鲁棒稳定; 线性矩阵不等式; Jensen不等式
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

New robust stability criteria for uncertain neutral-type systems with discrete and distributed delay

LI Tao, ZHANG He-xin, SUN Peng
(Department of Automation, Second Artillery Engineering College, Xi'an Shaanxi 710025, China)

Abstract: Being inspired by the idea of discrete time-delay decomposition, we formulate a new delay-dependent robust stability criterion in terms of linear matrix inequalities (LMIs) for the uncertain neutral-type systems with discrete and distributed time-delay. It is derived by constructing a new kind of Lyapunov-Krasovskii functional and combining the Jensen inequality technology. Time-varying uncertainties are allowed in the coefficient matrix of the neutral time-delay system, which improves the robust performance of the system. To deal with the difficulties in handling the distributed time-delay, we develop a decomposed functional for its calculation. Numerical examples show the effectiveness and reduced conservatism of the proposed design method .

Key words: Lyapunov-Krasovskii functional; delay decomposition; robust stability; linear matrix inequality; Jensen inequality

1 引言(Introduction)

中立时滞广泛存在于人口生态学、无损传输线内的分布网络、热交换器、 刚性环境下的机器人等[1]. 近几年, 线性中立型时滞系统的时滞相关稳定与控制问题受到了广泛的关注和研究[2~11]. 众所周知, 最大允许时滞上界(MAUB)是衡量所获时滞相关稳定条件保守性的一个重要指标.

时滞相关稳定性研究一般首先在时域构造合适的Lyapunov-Krasovskii泛函, 并通过模型变换及交叉项界定技术得到系统稳定的充分条件. 但是模型变换一方面可能导致系统产生新的动态而与原系统不等价, 另一方面造成理论和计算上的复杂性, 而交叉项界定技术也是保守性的主要来源. Han[2~4]主要是利用不同的模型变换及交叉项界定技术, 对含离散时变或分布时滞的中立型系统进行了研究, 得到了系统稳定的充分条件. He等人[5]利用自由权矩阵方法对混合时滞中立型系统进行了研究, 获得了比以往文献更低保守性的结果. 文献[6,7]分别用描述模型变换结合积分不等式和自由权矩阵方法对同时含离散和分布时滞的中立系统进行了研究, 得到了目前保守性较小的稳定性判据. 严格的论证表明[8], 利用现有方法(如描述模型变换、自由权矩阵和积分不等式方法等)得出的结果, 其解空间是相同的, 在减少保守性方面难有突破性进展. 而Gu[9]提出的离散化Lyapunov泛函方法可得到接近解析时滞上界的理想结果, 但理论比较复杂且难应用于控制器综合. 最近, Han[10,11]在简单二次Lyapunov泛函基础上引入离散时滞分解的思想, 应用于滞后型系统及含离散时滞的中立系统, 显著减少了复杂性与保守性, 且适合于控制器综合. 但二次Lyapunov泛函中算子D的存在, 使得该方法不适用于中立时滞项的系数矩阵含时变不确定性的情况.

收稿日期: 2009−09−07; 收修改稿日期: 2010−03−07.

总结以上文献的研究成果, 本文基于离散时滞分解的思想, 针对同时含离散和分布时滞的不确定中立系统, 构造了一种新的Lyapunov-Krasovskii泛函并结合Jensen不等式技巧, 建立了线性矩阵不等式形式的时滞相关鲁棒稳定性新判据. 主要有以下改进:

1) 利用增广矩阵项替换算子D, 允许中立时滞项的系数矩阵存在时变不确定性;

2) 构造了分布时滞的分解计算泛函, 现有文献中未见此类处理方法. 理论推导和计算结果表明该方法是有效的.

2 问题描述(Problem statement)

考虑同时含离散和分布时滞的不确定中立系统

$$\dot{x}(t)-C(t)\dot{x}(t-\tau)=A_0(t)x(t)+A_1(t)x(t-h)+A_2(t)\int_{t-r}^{t}x(s)\mathrm{d}s, \tag{1}$$

满足初始条件

$$x(t)=\phi(t),\ t\in[-d_{\mathrm{M}},0],$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$是系统状态; 时滞$h>0$, $\tau>0$和$r>0$均为已知标量, 且

$$d_{\mathrm{M}}=\max\{\tau,h,r\};$$

$\phi(t)$为$[0,d_{\mathrm{M}}]$上连续可微的初始向量函数; $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$和$C(t)$均为具有时变不确定性的矩阵函数, 即

$$A_i(t)=A_i+\Delta A_i(t),\ C(t)=C+\Delta C(t), \tag{2}$$

其中: $A_i(i=0,1,2)$, C为适当维数的已知定常矩阵; $\Delta A_i(t)$, $\Delta C(t)$为具有时变结构不确定性的未知矩阵, 可描述为如下形式:

$$[\Delta A_i(t)\ \ \Delta C(t)]=DF(t)[E_i\ \ E_c], \tag{3}$$

其中: D, E_i和E_c为适当维数的定常矩阵; $F(t)$是具有可测元的不确定矩阵, 且满足

$$F(t)^{\mathrm{T}}F(t)\leqslant I,\ \forall t. \tag{4}$$

其中I表示适当维数的单位矩阵. 当$F(t)=0$时, 系统变为标称线性中立系统.

文中定理证明将用到的引理如下:

引理 1[12] 任意定常矩阵$M\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $M=M^{\mathrm{T}}>0$, 标量$\gamma>0$, 向量函数$x:[0,\gamma]\to\mathbb{R}^n$的以下相关积分项有定义, 则有

$$(\int_0^{\gamma}x(s)\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}}M(\int_0^{\gamma}x(s)\mathrm{d}s)\leqslant \gamma\int_0^{\gamma}x^{\mathrm{T}}(s)Mx(s)\mathrm{d}s.$$

引理 2[13] 给定具有适当维数的矩阵$Q=Q^{\mathrm{T}}$, H, E, 则

$$Q+HF(t)E+E^{\mathrm{T}}F(t)^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}<0.$$

对任意满足

$$F(t)^{\mathrm{T}}F(t)\leqslant I$$

的$F(t)$成立的充要条件是存在$\varepsilon>0$, 使得

$$Q+\varepsilon^{-1}HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon E^{\mathrm{T}}E<0.$$

引理 3[14] 假设A, L, E和F为具有适当维数的实矩阵, 且

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I,$$

则对任意的对称正定矩阵P和正数ε, 如果有

$$P-\varepsilon LL^{\mathrm{T}}>0,$$

那么

$$(A+LFE)^{\mathrm{T}}P^{-1}(A+LFE)\leqslant A^{\mathrm{T}}\left(P-\varepsilon LL^{\mathrm{T}}\right)^{-1}A+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm{T}}E.$$

3 主要结果(Main results)

注 1 本文中矩阵$S>0$表示适当维数的正定矩阵, $*$表示对称矩阵中的对称项, 即

$$\begin{bmatrix}A&B\\ *&C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\ B^{\mathrm{T}}&C\end{bmatrix}.$$

首先考虑系统(1)的标称系统

$$\dot{x}(t)-C\dot{x}(t-\tau)=A_0x(t)+A_1x(t-h)+A_2\int_{t-r}^{t}x(s)\mathrm{d}s. \tag{5}$$

定理 1 给定时滞区间$[0,h]$和$[0,r]$的分解数目N和M, 若存在适当维数的定常矩阵:

$$P=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}&P_{13}\\ *&P_{22}&P_{23}\\ *&*&P_{33}\end{bmatrix}>0,\ \ Q_i=Q_i^{\mathrm{T}}>0,$$

$$R_i=R_i^{\mathrm{T}}>0,\ \ G_i=G_i^{\mathrm{T}}>0,\ \ i=1,2,$$

$$W=\begin{bmatrix}W_{11}&W_{12}&\cdots&W_{1N}\\ *&W_{22}&\cdots&W_{2N}\\ *&*&\ddots&\vdots\\ *&*&*&W_{NN}\end{bmatrix}>0,$$

$$X=\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}&\cdots&X_{1M}\\ *&X_{22}&\cdots&X_{2M}\\ *&*&\ddots&\vdots\\ *&*&*&X_{MM}\end{bmatrix}>0,$$

$$Z=Z^{\mathrm{T}}>0,\ \ Y=Y^{\mathrm{T}}>0,$$

使得如下线性矩阵不等式:

$$
\Xi=
\begin{bmatrix}
\Xi_{11} & W_{12}+Z & W_{13} & \cdots & W_{1N} & \Xi_{1\ N+1} & \Xi_{1\ N+2} & \Xi_{1\ N+3} & \Xi_{1\ N+4} & -P_{13} & X_{12}+Y & X_{13} & \cdots & X_{1M}\\
* & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \cdots & \Xi_{2N} & -W_{1N} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
* & * & \Xi_{33} & \cdots & \Xi_{3N} & -W_{2N} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
* & * & * & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
* & * & * & * & \Xi_{NN} & -W_{N-1\ N} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
* & * & * & * & * & \Xi_{N+1\ N+1} & A_1^{\mathrm{T}}P_{12} & \Xi_{N+1\ N+3} & \Xi_{N+1\ N+4} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
* & * & * & * & * & * & -R_1 & \Xi_{N+2\ N+3} & P_{12}^{\mathrm{T}}A_2 & -P_{23} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & \Xi_{N+3\ N+3} & \Xi_{N+3\ N+4} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{N+4\ N+4} & -P_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{N+5\ N+5} & -X_{1\ M}^{\mathrm{T}} & -X_{2\ M}^{\mathrm{T}} & \cdots & -X_{M-1\ M}^{\mathrm{T}}\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{N+6\ N+6} & \Xi_{N+6\ N+7} & \cdots & \Xi_{N+6\ N+M+4}\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{N+7\ N+7} & \cdots & \Xi_{N+7\ N+M+4}\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \ddots & \vdots\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \Xi_{N+M+4\ N+M+4}
\end{bmatrix}<0 \tag{6}
$$

成立, 则标称系统(5)是渐近稳定的. 其中:

$\Xi_{11}=Q_1+R_1+G_1-Q_2-Z-Y+r^2G_2+P_{13}+P_{13}^{\mathrm{T}}+A_0^{\mathrm{T}}P_{11}+P_{11}A_0+A_0^{\mathrm{T}}\Theta A_0+W_{11}+X_{11}$,

$\Xi_{22}=W_{22}-W_{11}-Z$,

$\Xi_{23}=W_{23}-W_{12}$,

$\Xi_{2N}=W_{2N}-W_{1N-1}$

$\Xi_{33}=W_{33}-W_{22}$,

$\Xi_{3N}=W_{3N}-W_{2\ N-1},$,

$\Xi_{NN}=W_{NN}-W_{N-1\ N-1}$,

$\Xi_{N+1\ N+1}=-Q_1-Q_2+A_1^{\mathrm{T}}\Theta A_1-W_{NN}$,

$\Xi_{1\ N+1}=Q_2+P_{11}A_1+A_0^{\mathrm{T}}\Theta A_1$,

$\Xi_{1\ N+2}=A_0^{\mathrm{T}}P_{12}+P_{23}^{\mathrm{T}}$,

$\Xi_{1\ N+3}=P_{11}C+P_{12}+A_0^{\mathrm{T}}\Theta C$,

$\Xi_{N+1\ N+3}=A_1^{\mathrm{T}}\Theta C$,

$\Xi_{N+2\ N+3}=P_{12}^{\mathrm{T}}C+P_{22}$,

$\Xi_{N+3\ N+3}=-R_2+C^{\mathrm{T}}\Theta C$,

$\Xi_{1\ N+4}=A_0^{\mathrm{T}}P_{13}+P_{33}+P_{11}A_2+A_0^{\mathrm{T}}\Theta A_2$,

$\Xi_{N+1\ N+4}=A_1^{\mathrm{T}}\Theta A_2+A_1^{\mathrm{T}}P_{13}$,

$\Xi_{N+3\ N+4}=C^{\mathrm{T}}P_{13}+P_{23}+C^{\mathrm{T}}\Theta A_2$,

$\Xi_{N+4\ N+4}=A_2^{\mathrm{T}}P_{13}+P_{13}^{\mathrm{T}}A_2+A_2^{\mathrm{T}}\Theta A_2-G_2$,

$\Xi_{N+5\ N+5}=-G_1-X_{MM}$,

$\Xi_{N+6\ N+6}=X_{22}-X_{11}-Y$,

$\Xi_{N+6\ N+7}=X_{23}-X_{12}$,

$\Xi_{N+6\ N+M+4}=X_{2M}-X_{1\ M-1}$,

$\Xi_{N+7\ N+7}=X_{33}-X_{22}$,

$\Xi_{N+7\ N+M+4}=X_{3M}-X_{2\ M-1}$,

$\Xi_{N+M+4\ N+M+4}=X_{MM}-X_{M-1\ M-1}$,

$\Theta=h^2Q_2+R_2+(\dfrac{h}{N})^2Z+(\dfrac{r}{M})^2Y$.

证　构造如下形式的Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4+V_5+V_6, \tag{7}$$

其中:

$V_1=\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta$,

$\zeta^{\mathrm{T}}=[x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\tau)\ \ \int_{t-r}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s]$,

$V_2=\int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Q_1x(s)\mathrm{d}s+h\int_{t-h}^{t}(h-t+s)\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Q_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s$,

$V_3=\int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)R_1x(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)R_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s$,

$V_4=\int_{t-r}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)G_1x(s)\mathrm{d}s+r\int_{t-r}^{t}(r-t+s)x^{\mathrm{T}}(s)G_2x(s)\mathrm{d}s$,

$V_5=\int_{t-\frac{h}{N}}^{t}y^{\mathrm{T}}(s)Wy(s)\mathrm{d}s+\dfrac{h}{N}\int_{t-\frac{h}{N}}^{t}(\dfrac{h}{N}-t+s)\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s$,

$V_6=\int_{t-\frac{r}{M}}^{t}z^{\mathrm{T}}(s)Xz(s)\mathrm{d}s+\dfrac{r}{M}\int_{t-\frac{r}{M}}^{t}(\dfrac{r}{M}-t+s)\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Y\dot{x}(s)\mathrm{d}s$,

其中:

$y^{\mathrm{T}}(t)=[x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\dfrac{h}{N})\ \cdots\ x^{\mathrm{T}}(t-\dfrac{(N-1)h}{N})]$,

$z^{\mathrm{T}}(t)=[x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\dfrac{r}{M})\ \cdots\ x^{\mathrm{T}}(t-\dfrac{(M-1)r}{M})]$.

取Lyapunov泛函$V(t)$对时间求导, 有:

$\dot{V}_1=\dot{\zeta}^{\mathrm{T}}P\zeta+\zeta^{\mathrm{T}}P\dot{\zeta}$,

$\dot{V}_2=x^{\mathrm{T}}(t)Q_1x(t)-x^{\mathrm{T}}(t-h)Q_1x(t-h)+h^2\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Q_2\dot{x}(t)-h\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Q_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s$,

$\dot{V}_3=x(t)^{\mathrm{T}}R_1x(t)-x(t-\tau)^{\mathrm{T}}R_1x(t-\tau)+$

$$\dot{x}(t)^{\mathrm{T}}R_2\dot{x}(t) - \dot{x}(t-\tau)^{\mathrm{T}}R_2\dot{x}(t-\tau),$$

$$\dot{V}_4 = x(t)^{\mathrm{T}}G_1x(t) - x(t-r)^{\mathrm{T}}G_1x(t-r) + r^2x^{\mathrm{T}}(t)G_2x(t) - r\int_{t-r}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)G_2x(s)\mathrm{d}s,$$

$$\dot{V}_5 = y^{\mathrm{T}}(t)W\cdot y(t) - y^{\mathrm{T}}(t-\frac{h}{N})W\cdot y(t-\frac{h}{N}) + (\frac{h}{N})^2\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Z\dot{x}(t) - \frac{h}{N}\int_{t-\frac{h}{N}}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\dot{V}_6 = z^{\mathrm{T}}(t)Xz(t) - z^{\mathrm{T}}(t-\frac{r}{M})Xz(t-\frac{r}{M}) + (\frac{r}{M})^2\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)Y\dot{x}(t) - \frac{r}{M}\int_{t-\frac{r}{M}}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Y\dot{x}(s)\mathrm{d}s.$$

由引理1可得:

$$-h\int_{t-h}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Q_2\dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant -(\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}}Q_2(\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s), \tag{8}$$

$$-r\int_{t-r}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)G_2x(s)\mathrm{d}s \leqslant -(\int_{t-r}^{t}x(s)\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}}G_2(\int_{t-r}^{t}x(s)\mathrm{d}s), \tag{9}$$

$$-\frac{h}{N}\int_{t-\frac{h}{N}}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant -(\int_{t-\frac{h}{N}}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}}Z(\int_{t-\frac{h}{N}}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s), \tag{10}$$

$$-\frac{r}{M}\int_{t-\frac{r}{M}}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)Y\dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant -(\int_{t-\frac{r}{M}}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}}Y(\int_{t-\frac{r}{M}}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s). \tag{11}$$

将式(5)(8)(9)(10)和(11)代入$\dot{V}(t)$可得

$$\dot{V}(t) \leqslant \eta^{\mathrm{T}}(t)\varXi\eta(t),$$

其中

$$\eta^{\mathrm{T}}(t) = [x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\frac{h}{N})\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\frac{2h}{N})\cdots x^{\mathrm{T}}(t-\frac{(N-1)h}{N})\ \ x^{\mathrm{T}}(t-h))\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\tau)\ \ \dot{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)(\int_{t-r}^{t}x(s)\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}}\ \ x^{\mathrm{T}}(t-r)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\frac{r}{M})\ \ x^{\mathrm{T}}(t-\frac{2r}{M})\cdots x^{\mathrm{T}}(t-\frac{(M-1)r}{M})].$$

因此当$\varXi<0$时, 标称系统(5)渐近稳定. 证毕

注 2 线性矩阵不等式(6)的解的存在性即为其可行性, 显然其可行性与离散时滞h和分布时滞r相关. 固定其一, 即可利用LMI工具箱迭代求得另一时滞对应的上界值.

注 3 时滞区间分解数N和M可取任意正整数满足$N,M\geqslant 2$. 一般情况下, 当取2或3等很小的值时, 就能获得保守性较小的结果. 随着N和M取值的增大, 保守性将逐渐降低, 最终稳定于某一上界附近. 数值例子部分将会体现. 当$N,M=1$时, 退化为无时滞分解情况.

注 4 文献[10,11]中算子$\mathrm{D}x_t = x(t) - Cx(t-\tau)$的定义, 使得当中立时滞项系数矩阵$C$存在不确定性时, Lyapunov-Krasovskii泛函无法求导, 因而不能处理此情况. 本文中以增广矩阵项$\zeta^{\mathrm{T}}P\zeta$代替算子D, 在充分保证系统稳定的基础上, 增强了处理不确定性的能力.

注 5 从现有文献看, 对分布时滞的处理, 除技巧性构造相关外, 未见更有效的处理方法. 这里基于时滞分解思想, 构造了分布时滞的分解计算泛函, 理论推导和数值计算表明该方法是有效的.

下面考虑不确定系统(1)的鲁棒稳定性问题.

定理 2 若存在适当维数的定常矩阵P, Q_i, R_i, $G_i(i=1,2)$, W, X, Y和Z如定理1中所定义, 及标量$\varepsilon_1>0$和$\varepsilon_2>0$, 使得如下线性矩阵不等式:

$$\psi = \begin{bmatrix} \varXi_\psi & HD & U^{\mathrm{T}}\varTheta & 0 \\ * & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & -\varTheta & \varTheta D \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \varTheta & \varTheta D \\ * & \varepsilon_2 I \end{bmatrix} > 0 \tag{13}$$

成立, 则不确定系统(1)是渐近稳定的. 其中:

$$\varXi_\psi = \begin{bmatrix} \varXi_{11}^{\psi} & \varXi_{12}^{\psi} & \cdots & \varXi_{1\,M+N+4}^{\psi} \\ * & \varXi_{22}^{\psi} & \cdots & \varXi_{2\,M+N+4}^{\psi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \varXi_{M+N+4\ M+N+4}^{\psi} \end{bmatrix},$$

$$H = [P_{11}\ 0\ \cdots 0\ 0\ P_{12}\ 0\ P_{13}\ 0\ \cdots 0]^{\mathrm{T}},$$

$$U = [A_0\ 0\ \cdots 0\ A_1\ 0\ C\ A_2\ 0\ \cdots 0],$$

其中: $\varXi_\psi$为定理1中矩阵$\varXi$的含$\varTheta$项$A_i^{\mathrm{T}}\varTheta A_j$, $A_i^{\mathrm{T}}\varTheta C$, $C^{\mathrm{T}}\varTheta C$和$C^{\mathrm{T}}\varTheta A_i(i,j=0,1,2)$分别替换为$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E_i^{\mathrm{T}}E_j$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E_i^{\mathrm{T}}E_c$, $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E_c^{\mathrm{T}}E_c$和$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E_c^{\mathrm{T}}E_i$后而获得的矩阵; H和U均具有适当维数.

证 为了研究不确定中立系统(1)的鲁棒稳定性准则, 分别以$A_i+\Delta A_i$, $C+\Delta C$代替式(6)中的A_i和C, 则式(6)等价于如下的不等式:

$$\varXi_0 + HDF(t)E + E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)D^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} + S^{\mathrm{T}}\varTheta S < 0, \tag{14}$$

其中:

$$\varXi_0=\begin{bmatrix}\varXi_{11}^0 & \varXi_{12}^0 & \cdots & \varXi_{1\,M+N+4}^0\\ * & \varXi_{22}^0 & \cdots & \varXi_{2\,M+N+4}^0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ * & * & * & \varXi_{M+N+4\,M+N+4}^0\end{bmatrix},$$

$$E=[E_0\ 0\ \cdots 0\ E_1\ 0\ E_c\ E_2\ 0\ \cdots 0],$$

$$S=[A_0(t)\ 0\cdots 0\ A_1(t)\ 0\ C(t)\ A_2(t)\ 0\ \cdots 0],$$

这里: $\varXi_0$为定理1中矩阵$\varXi$去掉含$\varTheta$项$A_i^{\mathrm T}\varTheta A_j$, $A_i^{\mathrm T}\varTheta C$, $C^{\mathrm T}\varTheta C$和$C^{\mathrm T}\varTheta A_i$后而得到的矩阵; E和S均具有适当维数.

由引理2和引理3可知, 若存在正数$\varepsilon_1, \varepsilon_2$满足引理条件, 则由不等式(14)得

$$\varXi_0+\varepsilon_1^{-1}HDD^{\mathrm T}H^{\mathrm T}+U^{\mathrm T}(\varTheta^{-1}-\varepsilon_2^{-1}DD^{\mathrm T})^{-1}U+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E^{\mathrm T}E<0. \tag{15}$$

应用Schur补, 并将所得矩阵两边分别左乘和右乘相同维数的对角阵$\mathrm{diag}\{I,\cdots,I,I,\varTheta,I\}$可得$\psi<0$. 又由引理3需满足条件, 并应用Schur补

$$\varTheta^{-1}-\varepsilon_2^{-1}DD^{\mathrm T}>0\Rightarrow\begin{bmatrix}\varTheta & \varTheta D\\ * & \varepsilon_2 I\end{bmatrix}>0. \tag{16}$$

证毕.

4 数值例子(Numerical examples)

考虑同时含离散和分布时滞的不确定中立系统(1), 引用文献[7]数值例子中的参数值:

$$A_0=\begin{bmatrix}-0.9 & 0.2\\ 0.1 & -0.9\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}-1.1 & -0.2\\ -0.1 & -1.1\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-0.12 & -0.12\\ -0.12 & 0.12\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ 0.2 & -0.1\end{bmatrix},$$

$$D=I,\ E_i=E_c=0.1I.$$

1) 当$h=0.1$时, 保证系统鲁棒稳定的分布时滞上界$r_{\max}$如表1所示.

表 1　$h=0.1$时, 分布时滞上界$r_{\max}$的值

Table 1　The upper bound $r_{\max}$ of the distributed delay when $h=0.1$

方法	文献[4]	文献[6]	文献[7]	本文(N,M)						
				(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,6)	(2,8)	(2,9)	(2,10)
$r_{\max}$	6.2	6.4	6.6	6.8541	6.9473	7.0756	7.0985	7.1021	7.1063	7.1096

2) 当$r=0.1$时, 保证系统鲁棒稳定的离散时滞上界$h_{\max}$列于表2.

表 2　$r=0.1$时, 离散时滞上界$h_{\max}$的值

Table 2　The upper bound $h_{\max}$of the discrete delay when $r=0.1$

方法	文献[4]	文献[6]	文献[7]	本文(N,M)						
				(2,2)	(3,2)	(4,2)	(6,2)	(8,2)	(9,2)	(10,2)
$h_{\max}$	1.1	1.2	1.3	1.4933	1.5879	1.6542	1.6798	1.6935	1.7021	1.7036

注 6　限于篇幅问题, 这里仅列出部分计算结果. 从计算数据来看, 当N, M取2或3等很小的值时, 就能获得保守性较小的结果. 随着取值的增大, 保守性将逐渐减小, 但减小的幅度也随着降低, 最终稳定于某一上界附近. 如数值例子中分布时滞上界稳定于7.1附近, 离散时滞上界稳定于1.7附近.

5 结论(Conclusion)

本文研究了同时含离散和分布时滞的不确定中立系统的鲁棒稳定性问题. 基于离散时滞分解思想, 构造了新的Lyapunov-Krasovskii泛函并结合Jensen不等式, 建立了线性矩阵不等式(LMI)形式的时滞相关鲁棒稳定性新判据. 其中构造了分布时滞的分解计算泛函, 现有文献中未见此类处理方法. 数值算例表明随着分解数目的增加, 保守性逐渐减小, 但减小的幅度也随之降低, 最终稳定于某一上界附近. 该上界与另一固定时滞的大小及具体的参数矩阵有关.

参考文献(References):

[1] NICULESCU S I. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*[M]. Berlin: Springer, 2001.

[2] HAN Q L. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type[J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 719 – 723.

[3] HAN Q L. On robust stability of neutral systems with time-varying discrete delay and norm-bounded uncertainty[J]. *Automatica*, 2004, 40(6): 1087 – 1092.

[4] HAN Q L. A descriptor system approach to robust stability of uncertain neutral systems with discrete and distributed delays[J]. *Automatica*, 2004, 40(10): 1791 – 1796.

[5] HE Y, WU M, SHE J H, et al. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays[J]. *Systems &*

Control Letters, 2004, 51(1): 57 – 65.

[6] CHEN W H, ZHENG W X. Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays[J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 95 – 104.

[7] LI X G, ZHU X J. Stability analysis of neutral systems with distributed delays[J]. *Automatica*, 2008, 44(8): 2197 – 2201.

[8] XU S Y, I AM J. On equivalence and efficiency of certain stability criteria for time-delay systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(1): 95 – 101.

[9] GU K. A generalized discretization scheme of Lyapunov functional in the stability problem of linear uncertain time-delay systems[J]. *International Journal on Robust and Nonlinear Control*, 1999, 9(1): 1 – 14.

[10] HAN Q L. A delay decomposition approach to stability of linear neutral systems[C] //*Proceedings of the 17th IFAC World Congress (IFAC'08)*. [S.l]: [s.n], 2008: 2607 – 2612.

[11] HAN Q L. A discrete delay decomposition approach to stability of linear retarded and neutral systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(2): 517 – 524.

[12] GU K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C] //*Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2000: 2805 – 2810.

[13] PETERSEN I R, HOLLOT C V. A riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. *Automatica*, 1986, 22(4): 397 – 412.

[14] WANG Y Y, XIE L, DE SOUZA E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(2): 139 – 149.

作者简介:

李 涛 (1982—), 男, 博士研究生, 主要从事时滞系统鲁棒稳定性与鲁棒镇定方面的研究, E-mail: yingying4539893@sohu.com;

张合新 (1965—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事导弹制导与控制方面的研究, E-mail: bluesky6542@sina.com.cn;

孙 鹏 (1973—), 男, 博士, 讲师, 主要从事非线性控制系统方面的研究, E-mail: litao4702@sohu.com.