第 28 卷第 2 期
2011 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 28 No. 2
Feb. 2011

文章编号: 1000−8152(2011)02−0242−05

# 不确定高次随机非线性系统的自适应控制

魏春玲[1], 王强德[1], 孔宪福[2]

(1. 曲阜师范大学 电气信息与自动化学院, 山东 日照 276826; 2. 曲阜师范大学 杏坛学院, 山东 曲阜 273165)

**摘要:** 针对一类含有噪声干扰和非线性参数的高次随机非线性系统, 研究了依概率全局自适应稳定问题. 在噪声的协方差未知的情况下, 利用自适应增加幂积分方法和参数分离技术, 提出了一种反馈占优设计方法并构造了一个光滑自适应控制器. 该控制器能保证闭环系统依概率全局稳定, 并且系统的状态几乎必然收敛到零. 仿真例子验证了控制方案的有效性.

**关键词:** 自适应控制; 随机非线性系统; 增加幂积分; 反馈占优设计

**中图分类号:** TP273　　**文献标识码:** A

# Adaptive control for high-order uncertain stochastic nonlinear systems

WEI Chun-ling[1], WANG Qiang-de[1], KONG Xian-fu[2]

(1. College of Electricity Information and Automation, Qufu Normal University, Rizhao Shandong 276826, China;
2. Xingtan College, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China)

**Abstract:** The adaptive global stabilization problem is studied for a class of high-order stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance and with nonlinear parameterization. Based on the method of adaptive adding a power integrator and using the technique of parameter separation, a feedback domination design approach is presented and a smooth adaptive controller is constructed which ensures for the closed-loop system the global stability in probability, and the states can be regulated to zero almost surely. A simulation example is given to illustrate the effectiveness of the control scheme.

**Key words:** adaptive control; stochastic nonlinear systems; adding a power integrator; feedback domination design

## 1 引言(Introduction)

近十几年来, 随机非线性系统的全局镇定问题被广泛而深入地研究, 大致形成了2类研究方法. 一类是Pan和Basar的工作[1,2], 他们采用加权二次幂的Lyapunov函数, 通过调节Lyapunov函数的权函数来改变系统的反馈能力. 另一类突破性的工作属于Krstic和Deng, 通过引入四次幂的Lyapunov函数, 在非线性函数和干扰在开环系统的原点为零的假设下, 文献[3∼6]运用反推设计方法给出了依概率全局渐近镇定控制, 其控制器设计要比Pan和Basar的较为简单并且方法更为系统化. 最近, Wu和Xie等通过引入随机小增益定理, 设计了自适应控制器解决了一类随机非线性系统的输出反馈控制问题[7]; Liu和Zhang对含有稳定零动态的具有观测器规范型的严格反馈形式的随机非线性系统, 研究了实用输出反馈控制问题[8]; Liu利用随机输入状态稳定(stochastic input-to-state stable, SISS)概念及小增益类条件, 通过构造输出反馈控制器研究了几类随机非线性系统的依概率全局稳定问题[9]. 以上这些文献所研究的系统都是具有严格反馈或部分反馈线性化的系统, 当系统是本质非线性时(系统是不可反馈线性化的, 其雅克比线性化是不可控的, Lin和Qian称这种系统为高次非线性系统[10∼12]), 目前研究成果还不太多.

Xie和Tian在文献[13]中, 针对一类含有随机逆动态的高次随机非线性系统, 研究了系统的状态反馈镇定问题. 最近, Wang和Wei等针对含有噪声方差未知的高次随机非线性系统, 研究了依概率全局稳定问题[14]. 本文将在此基础上, 针对一类含有噪声干扰和非线性参数的高次随机非线性系统, 研究其自适应依概率全局稳定问题. 本文主要贡献在于: 将文献[13,14]中的系统推广到含非线性参数的系统, 在噪声方差未知的情况下, 利用自适应增加幂积分方法设计状态反馈控制器, 保证闭环系统依概率全局渐近稳定. 并将控制方案推广到一类更广的随机非线性系统中. 理论分析和仿真算例均证实了该控制方案的有效性.

## 2 问题描述(Problem statement)

考虑如下形式的随机非线性系统:

收稿日期: 2009−09−24; 收修改稿日期: 2010−03−28.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60774010, 61074040); 山东省自然科学基金资助项目(ZR2009GL009); 曲阜师范大学博士科研启动基金资助项目; 曲阜师范大学自然科学基金资助项目(XJ200846).

$$\mathrm{d}x_i=(x_{i+1}^{p_i}+f_i(x,\theta))\mathrm{d}t+\varphi_i(\bar{x}_i)^{\mathrm{T}}\Sigma(t)\mathrm{d}\omega,\tag{1}$$

其中: $x_i(i=1,\cdots,n)$是系统的状态, $x_{n+1}=u$, $u\in\mathbb{R}$是控制输入, $\bar{x}_i=[x_1,\cdots,x_i]^{\mathrm{T}}$, $\theta\in\mathbb{R}^s$为未知的有界常向量, $\omega$是$m$维标准维纳过程, $p_i\geqslant 1(1\leqslant i\leqslant n)$是奇数, $\Sigma(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{m\times m}$是未知的非负定有界函数, $f_i(x,\theta)$和$\varphi_i(\bar{x}_i)$是Lipschitz连续函数, 且对任意的$\theta$, $f_i(0,\theta)=0$, $\varphi_i(0)=0$.

当$p_i=1$并且$f_i(x,\theta)\equiv 0(1\leqslant i\leqslant n)$时, 系统(1)即为一般的严格反馈形式的随机非线性系统. 在函数$\Sigma(t)$未知的情况下, 文献[6]利用自适应反推方法设计了光滑控制器得到了系统的自适应稳定. 当$p_i>1$时, 系统(1)的雅克比线性化不可控, 并且系统关于控制输入不是仿射的, 因此, 一般的反推(backstepping)方法不再适用.

本文将利用增加幂积分(adding a power integrator)方法解决系统(1)的自适应全局稳定问题. 增加幂积分方法是解决不确定高次非线性系统的全局镇定问题的非常有效的工具, 其基本原理与反推设计方法相似, 都是基于Lyapunov稳定性理论的递推设计方法, 可以说增加幂积分方法继承了反推方法的优点, 但又不是它的一般推广. 增加幂积分方法是利用反馈占优设计思想来设计控制器的, 也即充分利用系统的主要(或优势)非线性项通过反馈来控制或支配系统的一般不确定非线性项; 而反推设计的主要思想是在每一步递推设计中对系统进行“反馈线性化”, 通常是通过反馈来抵消系统的非线性项. 此外, 反推设计只能用于可反馈线性化或具有严格参数反馈的非线性系统; 而增加幂积分方法既能用于可反馈线性化或具有严格参数反馈的非线性系统, 还能处理不可反馈线性化的高次非线性系统的控制问题.

在设计控制器之前, 给出下列引理:

**引理 1**[6]　考虑系统(1), 假设存在一个$C^2$函数$V:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$和$K_\infty$类函数$\bar{\alpha}_1$ 和 $\bar{\alpha}_2$, 使得对所有的$x\in\mathbb{R}^n, t\geqslant 0$, 有

$$\begin{cases}\bar{\alpha}_1(\|x\|)\leqslant V(x)\leqslant\bar{\alpha}_2(\|x\|),\\ \mathcal{L}V(x)\leqslant -W(x),\end{cases}\tag{2}$$

其中$W(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是连续非负函数, 则对每一个$x(0)\in\mathbb{R}^n$, 系统(1)有唯一的强解, 系统的平衡点$x=0$是依概率全局稳定的, 并且有

$$P\{\lim_{t\to\infty}W(x)=0\}=1,\ \forall x(0)\in\mathbb{R}^n.\tag{3}$$

**引理 2**[8]　设$m,n$为正实数, $a(x)$, $b(x)$和$r(x)$是实值连续函数, 则对任意的连续函数$\tau(x)$, 存在一个光滑函数$\rho(x)\geqslant 0$, 使得

$$\begin{aligned}&r(x)\left|a(x)\right|^m\left|b(x)\right|^n\leqslant\\&\tau(x)\left|a(x)\right|^{n+m}+\left|b(x)\right|^{n+m}\rho(x).\end{aligned}\tag{4}$$

**假设 1**　$p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_n\geqslant 1$.

**假设 2**　对$1\leqslant i\leqslant n$, 存在非负光滑函数$f_{ij}(\bar{x}_i,\theta)$和$\psi_i(\bar{x}_i)$, 使得

$$|f_i(x,\theta)|\leqslant$$

$$\sum_{j=0}^{p_i-1}|x_{i+1}^j|(|x_1|^{p_i-j}+\cdots+|x_i|^{p_i-j})f_{ij}(\bar{x}_i,\theta),\tag{5}$$

$$\|\varphi_i(\bar{x}_i)\|\leqslant(|x_1|^{p_i}+\cdots+|x_i|^{p_i})\psi_i(\bar{x}_i).\tag{6}$$

**引理 3**　如果假设1和2成立, 则存在未知正常数$\Theta$和非负光滑函数$\hat{f}_i(\bar{x}_i)$, 使得

$$|f_i(x,\theta)|\leqslant\frac{1}{2}|x_{i+1}^{p_i}|+\hat{f}_i(\bar{x}_i)\Theta\sum_{j=1}^{i}|x_j|^{p_i}.\tag{7}$$

## 3　控制器设计(Controller design)

为方便设计, 首先引入下面的坐标变换:

$$z_i=x_i-\alpha_{i-1}(\bar{x}_{i-1},\hat{\Theta}),\ i=1,2,\cdots,n,\tag{8}$$

其中: $\alpha_{i-1}(\bar{x}_{i-1},\hat{\Theta})$是待设计的虚拟光滑控制律, 并且$\alpha_0(x_1,\hat{\Theta})=0$, $\alpha_i(\bar{x}_i,\hat{\Theta})=-z_i\beta_i(\bar{x}_i,\hat{\Theta})$, $\beta_i(\bar{x}_i,\hat{\Theta})>0$为待定的光滑函数, $\hat{\Theta}$是$\Theta$的估计. 由Itô's微分公式得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z_i=&(x_{i+1}^{p_i}+f_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}(x_{j+1}^{p_j}+f_j)-\\&\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{i-1}\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial x_p\partial x_q}\varphi_p^{\mathrm{T}}\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}\varphi_q-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\Theta}}\dot{\hat{\Theta}})\mathrm{d}t+\\&(\varphi_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\varphi_j)^{\mathrm{T}}\Sigma\mathrm{d}\omega,\end{aligned}\tag{9}$$

其中$x_{n+1}=u$, 记:

$$\begin{aligned}F_i=&f_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}(x_{j+1}^{p_j}+f_j)-\\&\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{i-1}\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial x_p\partial x_q}\varphi_p^{\mathrm{T}}\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}\varphi_q,\\G_i=&\varphi_i-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\varphi_j,\end{aligned}$$

则式(9)可写为

$$\mathrm{d}z_i=(x_{i+1}^{p_i}+F_i-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\Theta}}\dot{\hat{\Theta}})\mathrm{d}t+G_i^{\mathrm{T}}\Sigma\mathrm{d}\omega.\tag{10}$$

下面给出具体的设计步骤.

**Step 1**　选择Lyapunov正定函数

$$V_1=\frac{1}{p-p_1+4}z_1^{p-p_1+4}+\frac{1}{2}\tilde{\Theta}^2,$$

其中$p=\max\{p_1,\cdots,p_n\}$, 显然这里有$p=p_1$, $\tilde{\Theta}=\Theta-\hat{\Theta}$. 根据Itô's 微分公式和引理3, 易得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V_1\leqslant& z_1^{p-p_1+3}x_2^{p_1}+\frac{1}{2}|z_1^{p-p_1+3}||x_2^{p_1}|-\tilde{\Theta}\dot{\hat{\Theta}}+\\&|z_1|^3(z_1^{p_1}\hat{f}_1(x_1)+z_1^{2p_1-1}\frac{3}{2}\psi_1^2(x_1))(\tilde{\Theta}+\hat{\Theta}).\end{aligned}\tag{11}$$

选取光滑虚拟控制律

$$\begin{aligned}\alpha_1=&-z_1(2n+2(\hat{f}_1+z_1^{p_1-1}\frac{3}{2}\psi_1^2(x_1))\hat{\Theta})^{\frac{1}{p_1}}\triangleq\\&-z_1\beta_1(x_1,\hat{\Theta}),\end{aligned}\tag{12}$$

其中$\beta_1(\cdot)>0$, 从而有

$$\mathcal{L}V_1\leqslant -nz_1^{p+3}+z_1^{p-p_1+3}x_2^{p_1}+\frac{1}{2}|z_1^{p-p_1+3}||x_2^{p_1}|-\frac{1}{2}z_1^{p-p_1+3}\alpha_1^{p_1}-(\tilde{\Theta}+\eta_1)(\dot{\hat{\Theta}}-\tau_1),\tag{13}$$

其中:

$$\tau_1=z_1^{p_1+3}\hat{f}_1(x_1)+\frac{3}{2}z_1^{2p_1+2}\psi_1^2(x_1),\ \eta_1=0.$$

由于$-z_1^3\alpha_1^{p_1}\geqslant 0$, 从而式(13)变为

$$\mathcal{L}V_1\leqslant -nz_1^{p+3}+\frac{3}{2}|z_1^{p-p_1+3}||x_2^{p_1}-\alpha_1^{p_1}|-(\tilde{\Theta}+\eta_1)(\dot{\hat{\Theta}}-\tau_1).\tag{14}$$

**Step $i(2\leqslant i\leqslant n-1)$** 由于

$$\mathrm{d}z_i=(x_{i+1}^{p_i}+F_i-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\Theta}}\dot{\hat{\Theta}})\mathrm{d}t+G_i^{\mathrm{T}}\Sigma\mathrm{d}\omega,\tag{15}$$

由假设2和引理3及$F_i$和$G_i$的表达式得:

$$|F_i|=|f_i|+|\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}(x_{j+1}^{p_j}+f_j)|+|\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{i-1}\frac{\partial^2\alpha_{i-1}}{\partial x_p\partial x_q}\varphi_p^{\mathrm{T}}\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}\varphi_q|\leqslant \frac{1}{2}|x_{i+1}^{p_i}|+\sum_{j=1}^{i}|z_j|^{p_i}\bar{F}_i(\bar{x}_i,\hat{\Theta})\Theta,\tag{16}$$

$$|G_i|\leqslant|\varphi_i|+|\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial x_j}\varphi_j|\leqslant\sum_{j=1}^{i}|z_j|^{p_i}\bar{G}_i(\bar{x}_i,\hat{\Theta}),\tag{17}$$

其中$\bar{F}_i(\bar{x}_i,\hat{\Theta})$和$\bar{G}_i(\bar{x}_i,\hat{\Theta})$是非负光滑函数. 考虑Lyapunov函数$V_i=\sum\limits_{j=1}^{i}\frac{1}{p-p_j+4}z_j^{p-p_j+4}$, 根据Step 1的推导, 可知存在光滑函数$\alpha_j(\bar{x}_j,\hat{\Theta})(j=2,\cdots,i-1)$使得

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}V_i\leqslant\\&-(n-i+2)\sum_{j=1}^{i-1}z_j^{p+3}+\frac{3}{2}|z_{i-1}^{p-p_{i-1}+3}(x_i^{p_{i-1}}-\alpha_{i-1}^{p_{i-1}})|-(\tilde{\Theta}+\eta_{i-1})(\dot{\hat{\Theta}}-\tau_{i-1})+\\&z_i^{p-p_i+3}(x_{i+1}^{p_i}+F_i-\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\Theta}}\dot{\hat{\Theta}})+\\&\frac{p-p_i+3}{2}z_i^{p-p_i+2}G_i^{\mathrm{T}}\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}G_i.\end{aligned}\tag{18}$$

由引理3及引理2和式(16)(17)知, 存在非负光滑函数$\rho_{i1}(\bar{x}_i,\hat{\Theta}),\rho_{i2}(\bar{x}_i,\hat{\Theta}),\rho_{i3}(\bar{x}_i,\hat{\Theta})$, 使得

$$\begin{aligned}&|z_i^{p-p_i+3}F_i|\leqslant\\&(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{z_j^{p+3}}{6(1+\hat{\Theta}^2)(1+\eta_{i-1}^2)}+z_i^{p+3}\rho_{i1}(\bar{x}_i,\hat{\Theta}))\tilde{\Theta}+\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{i-1}z_j^{p+3}+\\&z_i^{p+3}\rho_{i1}(\bar{x}_i,\hat{\Theta})\hat{\Theta}+\frac{1}{2}|z_i^{p-p_i+3}||x_{i+1}^{p_i}|,\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}&|\frac{p-p_i+3}{2}z_i^{p-p_i+2}G_i^{\mathrm{T}}\Sigma\Sigma^T G_i|\leqslant\\&\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{i-1}z_j^{p+3}+z_i^{p+3}\rho_{i2}(\bar{x}_i,\hat{\Theta})\hat{\Theta}+\\&(\sum_{j=1}^{i-1}\frac{z_j^{p+3}}{6(1+\hat{\Theta}^2)(1+\eta_{i-1}^2)}+z_i^{p+3}\rho_{i2}(\bar{x}_i,\hat{\Theta}))\tilde{\Theta},\end{aligned}\tag{20}$$

$$|z_{i-1}^{p-p_{i-1}+3}(x_i^{p_{i-1}}-\alpha_{i-1}^{p_{i-1}})|\leqslant\frac{1}{6}z_{i-1}^{p+3}+z_i^{p+3}\rho_{i3}(\bar{x}_i,\hat{\Theta}).\tag{21}$$

将式(19)~(21)代入式(18), 可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}V_i\leqslant\\&-(n-i+\frac{3}{2})\sum_{j=1}^{i-1}z_j^{p+3}-(\tilde{\Theta}+\eta_i)(\dot{\hat{\Theta}}-\tau_i)+\\&z_i^{p-p_i+3}x_{i+1}^{p_i}+\frac{1}{2}\left|z_i^{p-p_i+3}x_{i+1}^{p_i}\right|-z_i^{p-p_i+3}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\Theta}}\tau_i-\\&(\frac{1}{3(1+\hat{\Theta}^2)(1+\eta_{i-1}^2)}\sum_{j=1}^{i-1}z_j^{p+3}+\\&z_i^{p+3}(\rho_{i1}+\rho_{i2}))\eta_{i-1}+\\&z_i^{p+3}((\rho_{i1}+\rho_{i2})\hat{\Theta}+\rho_{i3}),\end{aligned}\tag{22}$$

其中:

$$\tau_i=\tau_{i-1}+\frac{1}{3(1+\hat{\Theta}^2)(1+\eta_{i-1}^2)}\sum_{j=1}^{i-1}z_j^{p+3}+z_i^{p+3}(\rho_{i1}+\rho_{i2}),$$

$$\eta_i=\eta_{i-1}+z_i^{p-p_i+3}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\Theta}}.$$

易知存在非负光滑函数$\rho_{i4}(\bar{x}_i,\hat{\Theta})$满足

$$\begin{aligned}&|-z_i^{p-p_i+3}\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial\hat{\Theta}}\tau_i+z_i^{p+3}(\rho_{i1}+\rho_{i2})\eta_{i-1}-\\&\frac{\eta_{i-1}}{3(1+\hat{\Theta}^2)(1+\eta_{i-1}^2)}\sum_{j=1}^{i-1}z_j^{p+3}|\leqslant\\&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}z_j^{p+3}+z_i^{p+3}\rho_{i4}(\bar{x}_i,\hat{\Theta}).\end{aligned}\tag{23}$$

将式(23)代入式(22)并取光滑虚拟控制律

$$\alpha_i=-z_i(2(n-i+1+(\rho_{i1}+\rho_{i2})\hat{\Theta}+\rho_{i3}+\rho_{i4}))^{\frac{1}{p_i}}\triangleq-z_i\beta_i(\bar{x}_i,\hat{\Theta}).\tag{24}$$

且由于$-z_i^{p-p_i+3}\alpha_i^{p_i}\geqslant 0$, 则有

$$\mathcal{L}V_i\leqslant-(n-i+1)\sum_{j=1}^{i-1}z_j^{p+3}-(\tilde{\Theta}+\eta_i)(\dot{\hat{\Theta}}-\tau_i)+\frac{3}{2}\left|z_i^{p-p_i+3}(x_{i+1}^{p_i}-\alpha_i^{p_i})\right|.\tag{25}$$

当$i=n$时, 选择Lyapunov函数

$$V_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p-p_i+4}z_i^{p-p_i+4}+\frac{1}{2}\tilde{\theta}^2.$$

由前面的推导和$\alpha_i$的选取可得

$$\mathcal{L}V_n \leqslant -(z_1^{p+3}+z_2^{p+3}+\cdots+z_n^{p+3}) - (\tilde{\Theta}+\eta_n)(\dot{\hat{\Theta}}-\tau_n)+z_n^{p-p_n+3}(u^{p_n}-\alpha_n^{p_n}). \quad (26)$$

取光滑自适应控制律

$$u=\alpha_n, \quad (27)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}=\tau_n, \quad (28)$$

其中:

$$\alpha_n=-z_n(1+(\rho_{n1}+\rho_{n2})\hat{\Theta}+\rho_{n3}+\rho_{n4})^{1/p_n},$$

$$\tau_n=\tau_{n-1}+\frac{1}{3(1+\hat{\Theta}^2)(1+\eta_{n-1}^2)}\sum_{j=1}^{n-1}z_j^{p+3}+ z_n^{p+3}(\rho_{n1}+\rho_{n2}),$$

$\rho_{nj}(x,\hat{\Theta})\geqslant 0(j=1,2,3,4)$为光滑函数. 于是有

$$\mathcal{L}V_n \leqslant -(z_1^{p+3}+z_2^{p+3}+\cdots+z_n^{p+3}). \quad (29)$$

至此递推过程完成. 根据式(29), 可得结论:

**定理 1**　如果假设1和2成立, 将自适应控制器(27)(28)应用于随机系统(1), 则闭环系统在$[0,\infty)$上几乎必然有唯一解, 闭环系统依概率全局稳定且

$$\begin{cases} P\{\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0\}=1,\\ P\{\lim\limits_{t\to\infty}\hat{\Theta}(t)\text{ 存在且有限}\}=1. \end{cases} \quad (30)$$

**证**　记$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm T}$, 将引理1应用于点对$(z,\tilde{\Theta})$, 可得在此坐标下, 平衡点$(0,0)$是依概率全局稳定的, 并且

$$P\{\lim_{t\to\infty}z(t)=0\}=1,\ \forall(z_0,\tilde{\Theta}_0)\in\mathbb{R}^{n+1}. \quad (31)$$

由于$\alpha_i(0,\hat{\Theta})=0$, $x_i=z_i+\alpha_{i-1}(\bar{x}_{i-1},\hat{\Theta})$, 可得

$$P\{\lim_{t\to\infty}x(t)=0\}=1,\ \forall(z_0,\tilde{\Theta}_0)\in\mathbb{R}^{n+1}. \quad (32)$$

此外, 对任意的$(z_0,\tilde{\Theta}_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, 由于$\mathcal{L}V_n(z,\tilde{\Theta},t)\leqslant 0$且$V_n(z,\tilde{\Theta})\geqslant 0$, 因此$V_n(z,\tilde{\Theta})$是非负上鞅且当$t\to\infty$时, 它几乎必然收敛. 考虑到式(29)及$V_n(z,\tilde{\Theta})$的定义, 可知当$t\to\infty$时, $\tilde{\Theta}(t)$几乎必然收敛于一个有限的极限$\tilde{\Theta}_\infty$. 因此, 当$t\to\infty$时, $\hat{\Theta}(t)$几乎必然收敛于一个有限的极限$\Theta-\tilde{\Theta}_\infty$, 即

$$P\{\lim_{t\to\infty}\hat{\Theta}(t)\text{ 存在且有限}\}=1.$$

证毕.

结合定理1和文献[9]的定理4.3, 不难将定理1的结论推广到更一般的系统.

考虑如下非线性系统:

$$\mathrm{d}x_i=(d_i(x,u,\theta)x_{i+1}^{p_i}+f_i(x,\theta))\mathrm{d}t+ \varphi_i(\bar{x}_i)^{\mathrm T}\varSigma(t)\mathrm{d}\omega, \quad (33)$$

其中$x_{n+1}=u$, $d_i(x,u,\theta)(i=1,\cdots,n)$是连续函数, 其他符号定义同前.

**假设 3**　对$1\leqslant i\leqslant n$, 存在非负光滑函数$\underline{\lambda}_i(\bar{x}_i)>0$和$\bar{\lambda}_i(\bar{x}_{i+1},\theta)>0$, 满足

$$\underline{\lambda}_i(\bar{x}_i)\leqslant d_i(x)\leqslant\bar{\lambda}_i(\bar{x}_{i+1},\theta). \quad (34)$$

**推论 1**　如果假设1, 2和3成立, 则存在形如式(2)(3)的自适应控制器, 使得系统(33)的依概率全局稳定问题可解, 且

$$\begin{cases} P\{\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0\}=1,\\ P\{\lim\limits_{t\to\infty}\hat{\Theta}(t)\text{ 存在且有限}\}=1. \end{cases} \quad (35)$$

**证**　略.

## 4　仿真例子(Simulation example)

考虑如下二阶非线性系统:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1=(x_2^3+x_2^2\,|x_1|^{\theta})\mathrm{d}t+x_1^3\sigma(t)\mathrm{d}\omega,\\ \mathrm{d}x_2=u\mathrm{d}t, \end{cases} \quad (36)$$

其中: $x_i(i=1,2)$是系统的状态, $u\in\mathbb{R}$是控制输入, $\theta\in\mathbb{R}$为未知有界参数, $\omega$是标准维纳过程, $\sigma(t)$是非负定且未知的有界函数.

控制目标: 设计状态反馈自适应控制器解决系统(36)的依概率全局稳定问题.

根据本文控制器设计过程, 可得如下控制器:

$$\alpha_1=-z_1(4+(\frac{32}{27}\mathrm{e}^{\frac18}\ln^2(1+z_1^2)+3z_1^2)\hat{\Theta}))^{\frac13}=-z_1\beta_1,$$

$$u=-z_2(1+\rho_{21}+\rho_{25}+\rho_{26}+(\rho_{22}+\rho_{23}+\rho_{24})\hat{\Theta})),$$

$$\dot{\hat{\Theta}}=\tau_2=z_1^6(\frac{16}{27}\mathrm{e}^{\frac18}\ln^2(1+z_1^2)+\frac32 z_1^2)+\frac{2z_1^6}{3(1+\hat{\theta}^2)}+ z_2^6(\rho_{22}+\rho_{23}+\rho_{24}),$$

其中:

$$z_1=x_1,\ z_2=x_2-\alpha_1,$$

$$\rho_{21}=\frac32|\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|(z_2^2+3z_2\alpha_1+3\alpha_1^2)+\frac56(\frac{3\partial\alpha_1}{2\partial x_1}x_1^2\beta_1^3)^{\frac65},$$

$$\rho_{22}=\frac56(\frac{16\partial\alpha_1}{27\partial x_1}x_1^2\mathrm{e}^{\frac18}\ln^2(1+z_1^2))^{\frac65}(1+\hat{\Theta}^2)^{\frac15},$$

$$\rho_{23}=\frac56 0.5^{\frac65}z_1^6(\frac12+(\frac{\partial^2\alpha_1}{\partial x_1^2})^2)^{\frac35}(1+\hat{\Theta}^2)^{\frac15},$$

$$\rho_{24}=\frac23 x_1^6 2.5^{\frac32}|\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|^3(1+\hat{\Theta}^2)^{\frac12},$$

$$\rho_{25}=\frac14+\frac1{12}\beta_1^{12},\ \rho_{26}=\frac56(\frac{\partial\beta_1}{\partial\hat{\Theta}}\tau_2)^{\frac65}.$$

因为

$$|\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|= \beta_1+\beta_1^{-2}x_1^2(\frac{16\mathrm{e}^{\frac18}\ln^2(1+x_1^2)\ln(1+x_1^2)}{81(1+x_1^2)}+2)>0,$$

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial\hat{\Theta}}=\beta_1^{-2}(\frac{32}{81}\mathrm{e}^{\frac18}\ln^2(1+x_1^2)+x_1^2)>0,$$

所以$\rho_{21}$, $\rho_{22}$,$\rho_{24}$和$\rho_{26}$是光滑的, 即控制律是光滑的.

仿真结果见图1~3, 其中初始条件选为$x(0)=(1,-2.1)^{\mathrm T}$, $\hat{\Theta}(0)=1$, $\sigma(t)=4$.

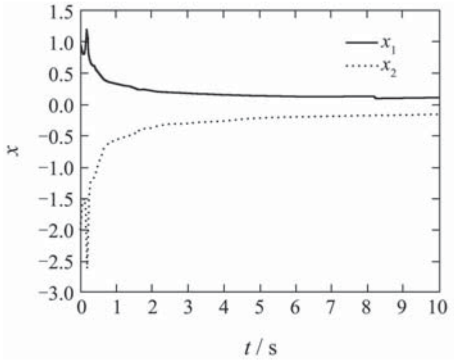


图 1 状态变量曲线

Fig. 1 State variables curves

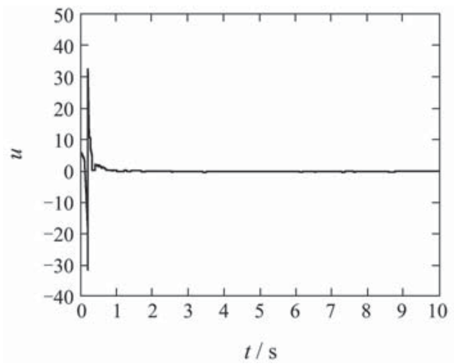


图 2 控制信号曲线$u$

Fig. 2 Control signal curve $u$

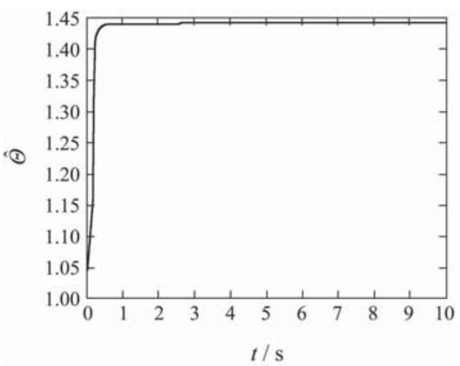


图 3 参数估计曲线$\hat{\Theta}$

Fig. 3 Parameter estimation curve of $\hat{\Theta}$

由图1～3可看出, 本文所设计的控制器是有效的, 即能保证系统的依概率全局稳定问题可解, 并且系统状态依概率渐近收敛到零.

## 5 结论(Conclusions)

本文研究了一类含有噪声干扰和非线性参数的高次随机非线性系统的依概率全局自适应稳定问题. 由于这类系统的雅克比线性化不可控, 很难利用一般的反推(backstepping)设计方法解决系统的全局稳定问题. 在噪声的协方差未知的情况下, 提出了一种反馈占优设计方法并构造了光滑自适应控制器. 该控制器能保证闭环系统依概率全局稳定, 并且系统的状态几乎必然收敛到零. 最后将控制方案推广到一类更广的随机非线性系统的依概率全局自适应稳定问题中.

## 参考文献(References):

[1] PAN Z G, BASAR T. Adaptive controller design for tracking and disturbance attenuation in parametric-feedback nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(8): 1066 – 1083.

[2] PAN Z G, BASAR T. Backstepping controller design for nonlinear stochastic systems under a risk-sensitive cost criterion[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1999, 37(3): 957 – 995.

[3] DENG H, KRSTIC M. Stochastic nonlinear stabilization-part I: a backstepping design[J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 32(3): 143 – 150.

[4] DENG H, KRSTIC M. Stochastic nonlinear stabilization-part II: inverse optimality[J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 32(3): 151 – 159.

[5] DENG H, KRSTIC M. Output-feedback stochastic nonlinear stabilization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(2): 328 – 333.

[6] KRSTIC M, DENG H. *Stability of Nonlinear Uncertain Systems*[M]. New York: Springer, 1998.

[7] WU Z J, XIE X J, ZHANG S Y. Adaptive backstepping controller design using stochastic small-gain theorem[J]. *Automatica*, 2007, 43(4): 608 – 620.

[8] LIU Y G, ZHANG J F. Practical output-feedback risk-sensitive control for stochastic nonlinear systems with stable zero dynamics[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2006, 45(3): 885 – 926.

[9] 刘淑君. 随机非线性系统的控制器设计和闭环性能分析[D]. 北京: 中国科学院数学与系统科学研究所, 2007.
(LIU Shujun. *Controller design and closed-systems analysis for stochastic nonlinear systems*[D]. Beijing: Institute of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, 2007.)

[10] LIN W, QIAN C J. Adaptive regulation of high-order lower-triangular systems: an adding a power integrator technique[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 39(5): 353 – 364.

[11] LIN W, QIAN C J. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: a nonsmooth feedback framework[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(5): 757 – 774.

[12] LIN W, QIAN C J. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: the smooth feedback case[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1249 – 1265.

[13] XIE X J, TIAN J. State-feedback stabilization for high-order stochastic nonlinear systems with stochastic nonlinear systems with stochastic inverse dynamics[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(14): 1343 – 1362.

[14] WANG Q D, WEI C L, WU Y Q. Adaptive control of stochastic nonlinear systems with uncontrollable linearization[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2009, 23(7): 667 – 678.

作者简介:

**魏春玲** (1970—), 女, 博士, 副教授, 目前研究方向为非线性系统自适应控制, E-mail: weichunling@eyou.com;

**王强德** (1971—), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为随机非线性系统控制, E-mail: wqdwchl@sohu.com;

**孔宪福** (1970—), 男, 副教授, 目前研究方向为非线性系统理论, E-mail: qdwang70@126.com.