

## 有向通讯网络下一类动态群体的整体动力学行为

余宏旺<sup>1</sup>, 郑毓蕃<sup>2,3</sup>, 张宝善<sup>1</sup>

(1. 南京审计学院 数学与统计学院, 江苏 南京 211815;

2. 华东师范大学 数学系, 上海 200062; 3. 上海大学 数学系, 上海 200436)

**摘要:** 本文运用图论、矩阵分析和现代控制理论的方法, 研究有向通讯网络下一类二维群体的全局动力学行为. 此类群体由众多具有相同动力学性质的个体组成, 每个个体在不与其他个体发生作用的情况下是李雅普诺夫稳定的, 与其他个体交流的信息是传感器测得的带有偏差的位置信息. 当每个个体采取分布式线性控制协议时, 整个群体的动力学行为, 不仅和个体的动力学方程有关, 而且和网络结构的代数特征有关. 本文具体给出了群体出现全局渐近聚集、周期振荡和发散3种不同行为的代数判据. 最后, 仿真例子验证了本文结果的有效性.

**关键词:** 群体; 分布式控制协议; 动力学行为; 赫尔维茨稳定

**中图分类号:** O231.2      **文献标识码:** A

## Global dynamic-behavior of a group of swarms in directed communication network

YU Hong-wang<sup>1</sup>, ZHENG Yu-fan<sup>2,3</sup>, ZHANG Bao-shan<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics and Statistic, Nanjing Audit University, Nanjing Jiangsu 211815, China;

2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China;

3. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, China)

**Abstract:** This paper investigates global dynamic-behavior of a group of swarms in directed network by means of graph theory, matrix analysis and control theory. The swarms consist of many identical dynamical agents and each agent is stable in the sense of Lyapunov when it is disconnected from other agents. Each agent communicates the biased position information with its neighbors. When each dynamical agent employs a linear distributed protocol in communication network, the global dynamic-behaviors of swarms not only depend on the dynamic equations of agents, but also on the algebraic characteristics associated with the network topology. Moreover, algebraic criteria are developed for the agents to achieve gradual aggregation, periodical stability or divergence in trajectories. Finally, the simulation example shows the desired result.

**Key words:** swarm; distributed control protocol; dynamical behavior; Hurwitz stable

### 1 引言(Introduction)

在一个大的群体中个体间的协调行为是自然界中常见的现象, 集体合作能够使生物群体在觅食生存、逃避天敌等方面形成集体的意向, 实现个体绝不可能实现的目标, 呈现出相对于个体更为有效的功能<sup>[1~4]</sup>. 近年来, 基于工程方面对自然群体行为中的组织能力及自我保护等功能的模仿和应用的需要, 如多移动机器人系统、无人驾驶飞机等的编队控制问题, 群体行为的建模、机理、模拟、及控制已成为系统科学领域的一个重要课题, 群体的自组织行为动力学和协调控制是当前国内外的一个热点问题<sup>[5~20]</sup>.

群体行为的研究内容涉及系统与控制、非线性

科学、统计物理、生物学等多个领域. 从20世纪80年代Reynolds<sup>[1]</sup>提出Boid模型之后, Vicsek等人<sup>[3]</sup>在此基础上采用统计力学的方法, 提出了一个多粒子群模型(即Vicsek模型). 近期, Jadbabaie A.和R. M. Murray等人<sup>[8~15]</sup>利用切换控制系统和矩阵理论对Vicsek模型进行了具体的解析研究, 用一阶的动力学方程来描述每个个体, 从理论上严格解析群体的动力学行为, 揭示了自然界中群体能达成同步、聚集、构成队形等行为的数学、物理机制. 基于实践, 众多文献(如文献[14,15]等)也研究了每个个体用二阶的动力学方程来建立模型的情形, 并进行了严格的解析分析. 结合当前迅速发展的群体系统的研究成果, 文献[20]给出了近年来国内外在群体动力学方

面研究领域的综述,指出群体系统的动力学是由个体动力学和系统关联结构共同决定的,并详细介绍了个体间的通信拓扑结构、通信时滞和外部作用等方面的研究成果.同时,个体模型中包含的不确定性对群体动力学的影响也引起了一定的关注<sup>[18]</sup>.

在二阶动力学方程建立的模型中,大多数的文献都集中讨论两个状态(位置和速度)是一维的情形,对于高维情形,一般都假设能精确知道个体间的状态信息,将其化为多个一维情形讨论.但群体中个体间进行通信的状态信息普遍都存在一定的误差.而且从系统理论的角度考虑,高维状态间一般的也都具有耦合性.基于此,本文主要探讨每个个体的模型用一个二阶的动力学方程描述的一类二维群体.个体间在有向通讯网络拓扑结构下进行信息交流,其信息来源是传感器测得的带有偏差的部分状态(位置信息),也即每个个体的输出含有一定偏差的位置状态.在此情况下,个体间采用分布式输出线性控制协议,则整个群体所呈现出来的全局动力学行为不仅和个体的动力学性质有关,而且和状态偏差的大小、网络结构的代数特征有关.进一步,笔者将给出具体的代数判据来刻画它们之间的联系.

## 2 问题描述(Problem description)

考虑由 $M$ 个二维动力学个体组成的一类动态群体,个体与个体间交流的有向通讯网络拓扑用一个有向图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 来表示.有向图 $\mathcal{G}$ 中顶点 $p_i (i \in \underline{M} = \{1, 2, \dots, M\})$ 代表群体中的第 $i$ 个个体.群体成员间的信息交流规定为:如果有向图 $\mathcal{G}$ 中的边 $e_{ij} \in \mathcal{E}$ ,则说明群体的个体成员 $p_i$ 接收到个体 $p_j$ 的信息.反之,如果 $e_{ij} \notin \mathcal{E}$ 则意味着群体的个体 $p_i$ 没有接收到个体 $p_j$ 的信息.如果有向图 $\mathcal{G}$ 中的任意两个不同的顶点之间都存在一条有向路,则称有向图 $\mathcal{G}$ 是强连通的.

**引理 1**<sup>[21]</sup> 如果图 $\mathcal{G}$ 是一个具有 $M$ 个顶点的有向强连通图,则该图的Laplacian矩阵 $L$ 的特征值除了一个零之外,其余的均具有正实部. $\mathbf{1}_M = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ 是其零特征根所对应的右特征向量,即 $L \cdot \mathbf{1}_M = 0$ .

记 $x_i = (x_{i1}, x_{i2})^T \in \mathbb{R}^2$ 表示群体中个体 $p_i (i \in \underline{M})$ 的位置状态,其动力学模型为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ m_i \dot{v}_i = K v_i + u_i, \\ y_i = F \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $v_i = (v_{i1}, v_{i2})^T \in \mathbb{R}^2$ 表示个体 $p_i$ 的速度, $m_i$ 代表其质量, $K = \begin{bmatrix} -k_i & 0 \\ 0 & -k_i \end{bmatrix}$ 是其反馈增益矩阵,

$u_i \in \mathbb{R}^2$ 的取值由信息通讯网络的控制协议确定, $y_i \in \mathbb{R}^2$ 是个体 $p_i$ 的输出状态,输出矩阵 $F = [C \ \mathbf{0}_{2 \times 2}]$ ,其中 $C = \begin{bmatrix} 1 & \delta_i \\ -\delta_i & 1 \end{bmatrix}$ 表示位置状态的观测矩阵,其中 $\delta_i$ 表示个体 $p_i$ 被传感器测得的位置状态和实际状态之间存在一定的角度差.

不失一般性,假设 $m_i = 1, i \in \underline{M}$ ,即所有个体成员的质量为单位量, $\delta_i = \delta, i \in \underline{M}$ .在反馈增益矩阵中假设 $k_i = k > 0 (i \in \underline{M})$ 表示每个个体成员的动力学特征相同,并且在不与外界发生任何作用的情况下,对于任意初始速度,作为一个自治的动态个体都将经过有限时间运动后静止下来.

群体中个体间的信息通讯网络采用线性分布式控制协议

$$u_i = \sum_{p_j \in N_i} a_{ij} (y_j - y_i), \quad (2)$$

其中: $N_i$ 表示个体 $p_i$ 的全体邻居的集合, $a_{ij}$ 是邻接矩阵 $\mathcal{A}$ 的元素.

记 $\xi = (\xi_1^T \ \xi_2^T \ \dots \ \xi_M^T)^T$ ,其中 $\xi_i = (x_i^T \ v_i^T)^T = (x_{i1} \ x_{i2} \ v_{i1} \ v_{i2})^T (i \in \underline{M})$ 表示第 $i$ 个个体的状态(包括位置和速度),那么整个群体系统的动力学模型可以解析为

$$\dot{\xi} = \Psi \xi, \quad (3)$$

其中: $\Psi = I_M \otimes A - L \otimes B$ ,

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & K \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ C & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$L$ 是有向通讯网络 $\mathcal{G}$ 的Laplacian矩阵.

**注 1** 如果 $\delta = 0$ ,即 $C = I_{2 \times 2}$ ,则个体的二维动力学(1)特征在控制协议(2)下就可以完全解耦为两个独立的一维动力学特征<sup>[14]</sup>.

## 3 群体全局行为的分析(Analysis for the globally behaviors of swarms)

考虑到群体通讯网络的拓扑结构是一个强连通有向图 $\mathcal{G}$ ,根据引理1,矩阵 $\Psi$ 具有下面性质.

**定理 1** 假设群体的个体间信息通讯网络 $\mathcal{G}$ 具有有向强连通的拓扑结构,那么矩阵 $\Psi$ 的零特征根所对应的特征向量有两个.进一步,如果记矩阵 $\Psi$ 的零特征根所对应的左右特征向量矩阵分别为 $v_r, v_l$ ,则有:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{k \sqrt{\sum_{i=1}^M \pi_i}} \mathbf{1}_M \otimes \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \\ v_l &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^M \pi_i}} \Pi_M \otimes [-K \ I_{2 \times 2}]. \end{aligned} \quad (5)$$

并且  $v_1 v_r = I_{2 \times 2}$ , 其中  $\Pi_M = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_M)$ ,  $\mathbf{1}_M = (1, 1, \dots, 1)^T$  分别是图  $\mathcal{G}$  的 Laplacian 矩阵  $L$  零特征根所对应的左、右特征向量, 即  $\Pi_M L = L \mathbf{1}_M = 0$ .

证 由于

$$\Psi = I_M \otimes A - L \otimes B = I_M \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & I_2 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & K \end{bmatrix} - L \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ C & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix},$$

根据 Kronecker 积性质和  $v_r, v_1$  的表达式, 可以直接验证得知它们就是矩阵  $\Psi$  对应于零特征根的特征向量矩阵, 并且满足  $v_1 v_r = I_2$ . 证毕.

为了简化后面主要结论的证明, 笔者先给出如下两个重要引理.

**引理 2** 对于任意给定的正常数  $\mu$ , 矩阵  $A - \mu B$  是赫尔维茨(Hurwitz)稳定的充分必要条件是常数  $k > 0$  和  $\delta$  满足

$$k > |\delta| \sqrt{\mu}, \quad (6)$$

其中矩阵  $A, B$  由式(4)定义.

证 根据式(4)中矩阵  $A, B$  的定义, 得

$$A - \mu B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & I_2 \\ -\mu C & K \end{bmatrix}.$$

既然  $|\mu C| = \mu^2 + \mu^2 \delta^2 > 0$ , 所以  $\text{rank}(A - \mu B) = 4$ . 下面考察矩阵  $A - \mu B$  的特征多项式

$$\begin{aligned} \pi_{A-\mu B}(s) &= \det(sI - (A - \mu B)) = \\ &= \begin{vmatrix} s & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1 \\ \mu & \delta\mu & s+k & 0 \\ -\delta\mu & \mu & 0 & s+k \end{vmatrix} = \\ &= s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4, \end{aligned}$$

其中:

$$a_1 = 2k, \quad a_2 = k^2 + 2\mu, \quad a_3 = 2k\mu, \quad a_4 = \mu^2(1 + \delta^2).$$

构造多项式  $\pi_{A-\lambda_m B}(s)$  的劳斯(Routh)阵列

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & a_2 & a_4 \\ s^3 & a_1 & a_3 & 0 \\ \hline s^2 & b_1 & b_2 & 0 \\ s^1 & c_1 & 0 & \\ \hline s^0 & d_1 & & \end{array},$$

其中:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}, \quad b_2 = d_1 = a_4 = \mu^2(1 + \delta^2), \\ c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} = \frac{a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4}{a_1 b_1}. \end{aligned}$$

那么, 多项式  $\pi_{A-\lambda_m B}(s)$  稳定的充分必要条件是  $a_1 >$

$0, b_1 > 0, c_1 > 0, d_1 > 0$ . 根据  $\mu > 0, k > 0$ , 那么前面4个不等式成立当且仅当不等式  $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$  成立, 而此不等式成立的充分必要条件是  $k^2 > \mu \delta^2$ . 所以, 多项式  $\pi_{A-\lambda_m B}(s)$  稳定的充分必要条件是  $k > |\delta| \sqrt{\mu}$ . 证毕.

**引理 3** 对于任意的正参数  $\alpha, \beta$ , 矩阵  $I_2 \otimes A - V \otimes B$  是赫尔维茨稳定当且仅当常数  $k > 0$  和  $\delta$  同时满足

$$|\delta| < \frac{\alpha}{\beta}, \quad (7)$$

和

$$k > \frac{\beta + \alpha |\delta|}{\sqrt{\alpha - \beta |\delta|}}, \quad (8)$$

其中  $V = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ , 矩阵  $A, B$  由式(4)定义.

证 考察矩阵  $I_{2 \times 2} \otimes A - V \otimes B$  的特征多项式

$$\begin{aligned} \pi(s) &= \det(sI_8 - (I_{2 \times 2} \otimes A - V \otimes B)) = \\ &= \begin{vmatrix} sI_4 - (A - \alpha B) & \beta B \\ -\beta B & sI_4 - (A - \alpha B) \end{vmatrix} = \\ &= [s^4 + 2ks^3 + (k^2 + 2\theta_1)s^2 + 2k\theta_1 \cdot s + \theta_0] \cdot \\ &= [s^4 + 2ks^3 + (k^2 + 2\theta_2)s^2 + 2k\theta_2 \cdot s + \theta_0], \end{aligned}$$

其中:

$$\theta_0 = (\alpha^2 + \beta^2)(1 + \delta^2), \quad \theta_1 = \alpha + \beta\delta, \quad \theta_2 = \alpha - \beta\delta.$$

类似于引理2的证明, 根据劳斯-赫尔维茨判别定理, 构造多项式  $\pi(s)$  的劳斯阵列, 从而可以证明矩阵  $I_{2 \times 2} \otimes A - V_n \otimes B$  是赫尔维茨稳定的当且仅当不等式  $\alpha - \beta \cdot |\delta| > 0$  和  $k > \frac{\alpha |\delta| + \beta}{\sqrt{\alpha - \beta |\delta|}}$  同时成立. 所以该引理得证. 证毕.

基于上述引理, 笔者探讨在通讯网络控制协议(2)下, 群体系统(3)的全局动力学行为.

**定理 2** 在有向强连通的信息通讯网络  $\mathcal{G}$  上, 群体中每个个体根据控制协议(2)进行信息交流.

I) 如果位置状态的观测矩阵  $C$  中的参数  $\delta$  满足

$$|\delta| \geq \min_{i \in \underline{r}} \frac{\alpha_i}{\beta_i}, \quad (9)$$

其中  $\alpha_i \pm \beta_i iI, i \in \underline{r}, \alpha_i > 0, \beta_i > 0$  是 Laplacian 矩阵  $L$  的  $2r$  个不同的复特征根, 那么群体系统(3)的动力学行为将呈现发散现象.

II) 如果位置状态的观测矩阵  $C$  中参数  $\delta$  满足

$$|\delta| < \min_{i \in \underline{r}} \frac{\alpha_i}{\beta_i}, \quad (10)$$

那么群体模型(3)的动力学行为将取决于个体的动力学特性, 即反馈增益  $k$ . 具体的有:

i) 当反馈增益  $k$  满足

$$k > k^* = \max_{i \in \underline{r}} \left\{ \max \left\{ \frac{\alpha_i |\delta| + \beta_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i |\delta|}}, \sqrt{\lambda} |\delta| \right\} \right\}, \quad (11)$$

其中 $\lambda$ 是Laplacian矩阵 $L$ 的最大实特征根, 则群体系统(3)将呈现全局渐近聚集的动力学行为, 即所有个体都将停止到同一个平面位置.

ii) 当反馈增益 $k$ 满足

$$k = k^* = \max\left\{\max_{i \in \underline{r}} \frac{\alpha_i |\delta| + \beta_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i} |\delta|}, \sqrt{\lambda} |\delta|\right\}, \quad (12)$$

则群体系统(3)的动力学行为将呈现全局渐近稳定的周期轨迹. 进一步, 如果记

$$\frac{\bar{\alpha} |\delta| + \bar{\beta}}{\sqrt{\bar{\alpha} - \bar{\beta}} |\delta|} = \max_{i \in \underline{r+1}} \frac{\alpha_i |\delta| + \beta_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i} |\delta|},$$

其中:  $\alpha_{r+1} = \lambda, \beta_{r+1} = 0$ , 那么其周期轨迹的频率为

$$\omega = \sqrt{\bar{\alpha} - \bar{\beta}} |\delta|. \quad (13)$$

iii) 当反馈增益 $k$ 满足

$$k < k^* = \max\left\{\max_{i \in \underline{r}} \frac{\alpha_i |\delta| + \beta_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i} |\delta|}, \sqrt{\lambda} |\delta|\right\}, \quad (14)$$

那么群体的动力学行为出现发散现象.

**证** 考虑到群体的信息通讯网络具有有向强连通拓扑结构, 根据引理1, Laplacian矩阵 $L$ 除了一个零特征根, 其余特征根的实部都是正的. 不失一般性, 笔者假设矩阵方程 $|\lambda I_M - L| = 0$ 有 $s$ 个不同非负实根,  $r$ 对不同的共轭虚根, 矩阵 $\lambda I_M - L$ 的特征多项式在实数范围内分解为下列各因式的乘积:

$$(\lambda - \lambda_1)^{c_1}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{c_s},$$

$$[(\lambda - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{c_{s+1}}, \dots, [(\lambda - \alpha_r)^2 + \beta_r^2]^{c_{s+r}},$$

其中:  $c_1 = 1, \sum_{i=1}^s c_i + 2 \sum_{n=s+1}^{s+r} c_n = M$ .

记 $A$ 为矩阵 $L$ 的约当标准型, 那么存在一个非奇异矩阵 $U \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 使得 $U^{-1}LU = A$ , 其中:

$$A = \text{diag}\{J_1, \dots, J_s, J_{s+1}, \dots, J_{s+r}\},$$

$$J_m = \begin{bmatrix} \lambda_m & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix}, \quad m \in \underline{s},$$

$$J_n = \begin{bmatrix} V_n & * & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & V_n \end{bmatrix}, \quad n \in \underline{r}.$$

其中:  $J_1 = \mathbf{0}_{2 \times 2}, V_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ -\beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}$ . 那么有

$$(U^{-1} \otimes I_4) \cdot \Psi \cdot (U \otimes I_4) = I_M \otimes A - \Lambda \otimes B =$$

$$\begin{bmatrix} I_{c_1} \otimes A - J_1 \otimes B & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \cdots & I_{c_{s+r}} \otimes A - J_{s+r} \otimes B \end{bmatrix},$$

所以群体系统(3)的动力学行为取决于矩阵 $A - \lambda_m B, m \in \underline{s}$ 和 $I_{2 \times 2} \otimes A - V_n \otimes B (n \in \underline{r})$ 的特征根.

根据引理3, 当 $|\delta| \geq \min_{i \in \underline{r}} \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ 时, 矩阵 $I_{2 \times 2} \otimes A - V_n \otimes B, n \in \underline{r}$ 中至少有一个矩阵是不稳定的, 所以群体的动力学行为呈现发散现象.

考察 $\lambda_1 = 0$ 的情形下, 显然矩阵 $A - \lambda_1 B = A$ 的特征根 $s_1 = s_2 = 0, \text{Re}(s_3) = \text{Re}(s_4) = -k < 0$ . 根据引理2和引理3, 矩阵 $A - \lambda_m B, m \in \{2, \dots, s\}$ 和 $I_{2 \times 2} \otimes A - V_n \otimes B (n \in \underline{r})$ 是赫尔维茨稳定当且仅当条件(10)和(11)同时成立.

进一步, 如果条件(10)和(11)同时成立, 记 $\Psi$ 的特征根为 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{4M}$ , 对应的右特征列向量组成的矩阵为

$$\Theta := (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{4M-1}, \theta_{4M}) \in \mathbb{R}^{4M \times 4M},$$

对应的左特征行向量组成的矩阵记为

$$\Theta^{-1} = \tilde{\Theta} := (\tilde{\theta}_1^T, \tilde{\theta}_2^T, \dots, \tilde{\theta}_{4M-1}^T, \tilde{\theta}_{4M}^T)^T \in \mathbb{R}^{4M \times 4M},$$

那么

$$\Psi \Theta = \tilde{\Theta} \Psi = \Theta \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_M \end{bmatrix} = \Theta J = J \tilde{\Theta},$$

其中:  $J_1$ 是对应于特征根 $\gamma_3$ 和 $\gamma_4$ 的约当型,  $J_i (i = 2, 3, \dots, M)$ 是对应于特征根 $\gamma_{4i-3}, \gamma_{4i-2}, \gamma_{4i-1}$ 和 $\gamma_{4i}$ 的约当型. 根据 $\text{Re}(\gamma_i) < 0 (3 \leq i \leq 4M)$ , 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Jt} = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (4M-2)} \\ \mathbf{0}_{(4M-2) \times 2} & \mathbf{0}_{(4M-2) \times (4M-2)} \end{bmatrix},$$

从而有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\Psi t) = \Theta \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times (4M-2)} \\ \mathbf{0}_{(4M-2) \times 2} & \mathbf{0}_{(4M-2) \times (4M-2)} \end{bmatrix} \tilde{\Theta}.$$

根据定理1, 得

$$v_r = (\theta_1 \ \theta_2), \quad v_l = \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{pmatrix},$$

那么有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\Psi t) = v_r v_l.$$

因为 $\xi(t) = \exp(\Psi t) \xi(0)$ , 所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(\Psi t) \xi(0) = v_r v_l \xi(0) =$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^M \pi_i} \mathbf{1}_M \Pi_M \otimes \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & -K^{-1} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ v_1(0) \\ \vdots \\ x_M(0) \\ v_M(0) \end{bmatrix},$$

那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \frac{\pi_i}{\sum_{i=1}^M \pi_i} \sum_{j=1}^M [x_j(0) - \frac{1}{k} v_j(0)] = x^*,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, M\}.$$

所以, 群体成员在控制协议(2)的作用下将逐渐地聚集到平面上同一个位置, 并最终停止下来.

下面证明群体系统(3)在条件(10)和(12)作用下其解呈现周期轨迹现象. 记Laplacian矩阵L的最大实特征根为λ. 当 $|\delta| < \min_{i \in \mathcal{L}} \frac{\alpha_i}{\beta_i}$  且  $\max_{i \in \mathcal{L}} \frac{\alpha_i |\delta| + \beta_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i |\delta|}} < \sqrt{\lambda} |\delta|$  时, 如果

$$k = k^* = \max_{i \in \mathcal{L}} \left\{ \max_{i \in \mathcal{L}} \frac{\alpha_i |\delta| + \beta_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i |\delta|}}, \sqrt{\lambda} |\delta| \right\} = \sqrt{\lambda} |\delta|,$$

那么矩阵  $A - \lambda_i B (i = 2, 3, \dots, s-1)$  和矩阵  $I_{2 \times 2} \otimes A - V_n \otimes B (n \in \mathcal{R})$  都是赫尔维茨稳定的. 矩阵  $A - \lambda_s B$  的特征多项式为

$$\begin{aligned} \pi_{A-\lambda B}(s) &= \det(sI - (A - \lambda B)) = \\ &= s^4 + 2ks^3 + (k^2 + 2\lambda)s^2 + 2k\lambda s + \lambda^2 + \lambda k^2 = \\ &= (s^2 + \lambda) \cdot (s^2 + 2ks + k^2 + \lambda). \end{aligned}$$

所以,  $A - \lambda B$  有一对负实部的共轭复根和两个特征纯虚根  $\pm i\sqrt{\lambda}$ . 当

$$|\delta| < \min_{i \in \mathcal{L}} \frac{\alpha_i}{\beta_i}, \quad \max_{i \in \mathcal{L}} \frac{\alpha_i |\delta| + \beta_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i |\delta|}} > \sqrt{\lambda} |\delta|$$

时, 不失一般性, 不妨假设L的共轭特征根  $\alpha_1 \pm i\beta_1$  满足

$$\frac{\alpha_1 |\delta| + \beta_1}{\sqrt{\alpha_1 - \beta_1 |\delta|}} = \max_{i \in \mathcal{L}} \frac{\alpha_i |\delta| + \beta_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i |\delta|}},$$

那么在  $k = k^* = \frac{\alpha_1 |\delta| + \beta_1}{\sqrt{\alpha_1 - \beta_1 |\delta|}}$  时, 矩阵  $A - \lambda_i B (i = 2, 3, \dots, s)$  和  $I_{2 \times 2} \otimes A - V_n \otimes B (n \in \{2, 3, \dots, r\})$  都是赫尔维茨稳定, 此时矩阵  $I_{2 \times 2} \otimes A - V_1 \otimes B$  有一对负实部的共轭复根和两个特征纯虚根  $\pm i\sqrt{\alpha_1 - \beta_1 |\delta|}$ .

所以, 在条件(10)和(12)下, 群体系统(3)将出现一个全局渐近稳定的周期轨迹. 记:

$$\begin{aligned} \alpha_{r+1} &= \lambda, \quad \beta_{r+1} = 0, \\ \frac{\bar{\alpha} |\delta| + \bar{\beta}}{\sqrt{\bar{\alpha} - \bar{\beta} |\delta|}} &= \max_{i \in \mathcal{R}+1} \frac{\alpha_i |\delta| + \beta_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i |\delta|}}, \end{aligned}$$

则每个个体的位置状态轨迹是周期轨迹, 具体为

$$x_i(t) = F_i + G_i \sin(\omega t + \phi_i).$$

其速度也是一个周期轨迹, 为

$$v_i(t) = H_i + K_i \sin(\omega t + \psi_i),$$

其中:  $\omega$  由定义式(13)确定, 常数  $F_i, G_i, H_i, K_i, \phi_i, \psi_i$  是由群体中个体的初始位置和初始速度共同决定.

最后, 当  $|\delta| < \min_{i \in \mathcal{L}} \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ , 而反馈增益

$$k < k^* = \max_{i \in \mathcal{L}} \left\{ \max_{i \in \mathcal{L}} \frac{\alpha_i |\delta| + \beta_i}{\sqrt{\alpha_i - \beta_i |\delta|}}, \sqrt{\lambda} |\delta| \right\}$$

时, 同理可得, 矩阵  $A - \lambda_i B (i \in \mathcal{L})$  和  $I_{2 \times 2} \otimes A - V_n \otimes B, (n \in \mathcal{R})$  中至少有一个是不稳定的, 从而整个群体系统(3)就不稳定, 其动力学行为呈现发散现象.

证毕.

**注 2** 由于  $\mathcal{G}$  是一个有向扩展树状图时, 引理1的结论同样成立<sup>[19]</sup>, 所以定理2的结论可以推广到群体个体间信息通讯网络  $\mathcal{G}$  的拓扑结构是一个有向扩展树状图的情形.

#### 4 仿真例子(Simulation example)

考虑由5个个体组成的二维动态群体, 个体间信息通讯网络的拓扑结构可以用如下有向强连通图  $\mathcal{G}$ (图1)描述.

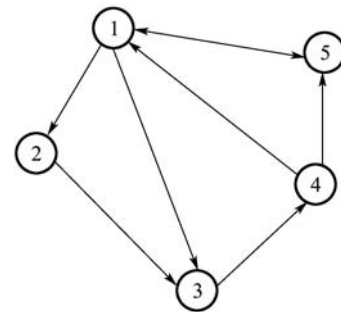


图 1 具有  $M = 5$  个顶点的有向拓扑图  $\mathcal{G}$

Fig. 1 Directed graph  $\mathcal{G}$  with five nodes

经计算其Laplacian矩阵的特征根是:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.3247, \lambda_4 = 1.3376 - 0.5623i, \lambda_5 = 1.3376 + 0.5623i$ . 群体的初始位置和速度任意取一组值, 如:  $x_1(0) = (-21, 2)^T, x_2(0) = (-8, -10)^T, x_3(0) = (15, -4)^T, x_4(0) = (12, 2)^T, x_5(0) = (25, 25)^T, v_1(0) = (12, -13)^T, v_2(0) = (-12, 5)^T, v_3(0) = (7, 18)^T, v_4(0) = (15, -25)^T, v_5(0) = (-20, 15)^T$ .

当个体间采用控制协议(2), 观测矩阵中参数  $\delta = 1.5$ , 个体的反馈增益取  $k = 5$  时, 仿真图2揭示群体模型(3)出现聚集现象, 即在上述给定的初始值下, 所有个体的位置状态都趋向于固定点  $(8.6857, 6.0857)^T$ , 其速度相应趋向于零.

当观测矩阵中参数  $\delta$  增大或者个体反馈增益减小时, 群体的动力学行为都将出现相应的变化. 比如在相同的初始条件下, 取反馈增益  $k = 3$ , 仿真结果图3显示群体行为会呈现发散现象.

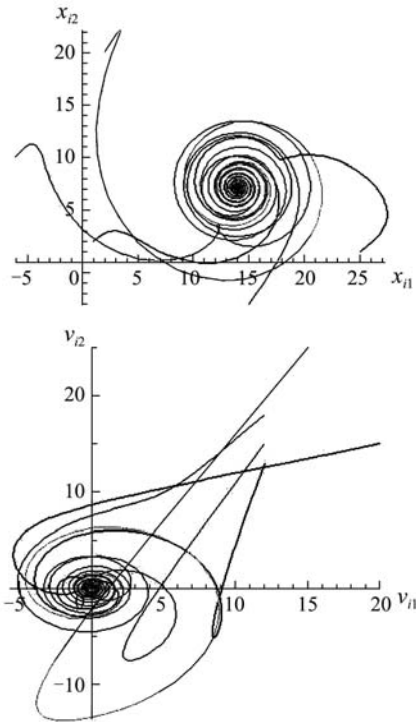


图2  $\delta = 1.5, k = 5$ , 群体的位置和速度轨迹  
Fig. 2 The locations and velocities trajectories of the swarms with  $\delta = 1.5, k = 5$

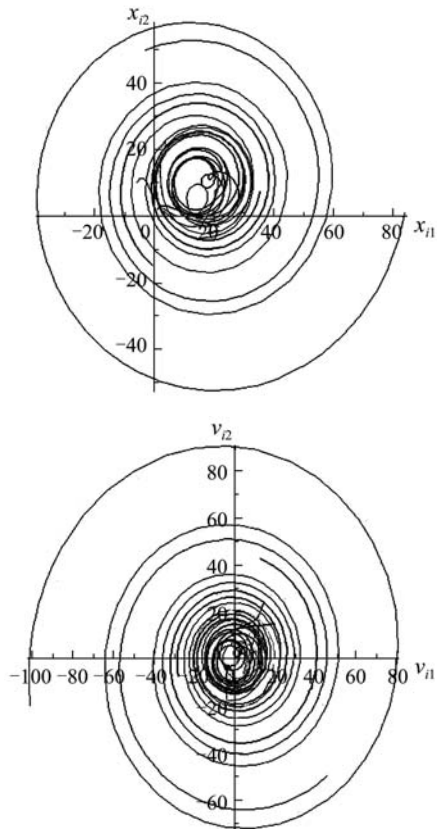


图3  $\delta = 1.5, k = 3$ , 群体的位置和速度轨迹.  
Fig. 3 The locations and velocities trajectories of the swarms with  $\delta = 1.5, k = 3$

而仿真图4则说明当反馈增益取  $k = 3.6542$  时, 群体的位置状态呈现稳定的周期振荡轨迹.

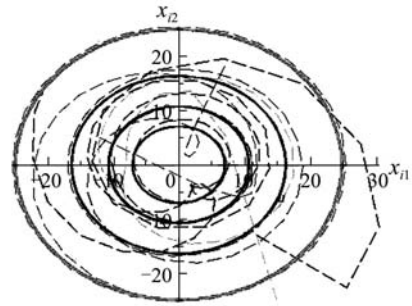
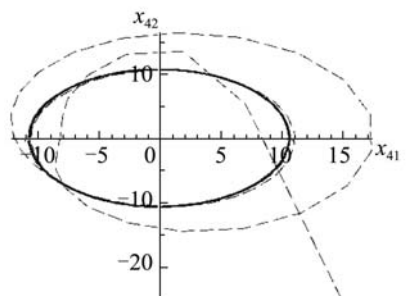
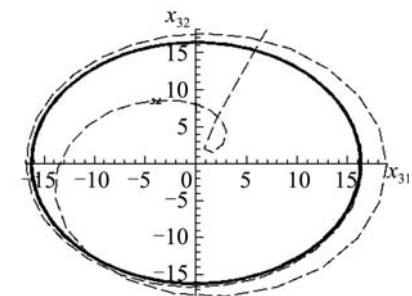
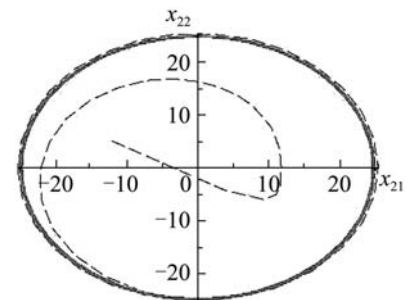
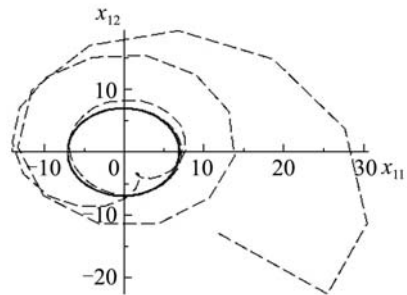


图4  $\delta = 1.5, k = 3.6542$ , 群体的位置轨迹  
Fig. 4 The locations trajectories of the swarms with  $\delta = 1.5, k = 3.6542$

为了看得更清楚点, 相应的每个个体的运动位置轨迹的仿真如图5所示.

仿真图6则显示此时群体的速度状态也呈现出稳定的周期振荡轨迹. 仿真图7也单独列出5个个体的速度状态仿真图.



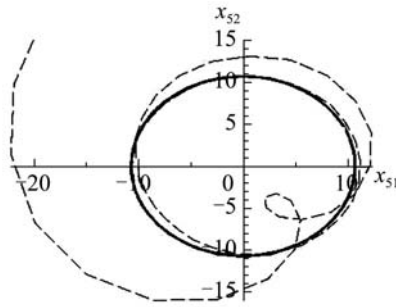


图 5  $\delta = 1.5, k = 3.6542$ 时,每个个体的位置轨迹  
Fig. 5 The locations trajectories of each agent with  $\delta = 1.5, k = 3.6542$

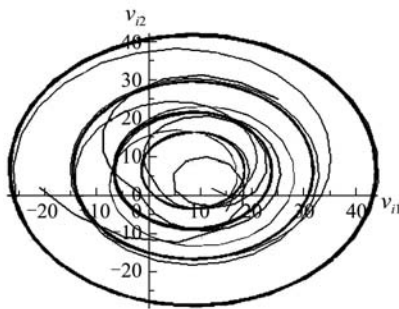


图 6  $\delta = 1.5, k = 3.6542$ , 群体的速度轨迹.  
Fig. 6 The velocities trajectories of the swarms with  $\delta = 1.5, k = 3.6542$

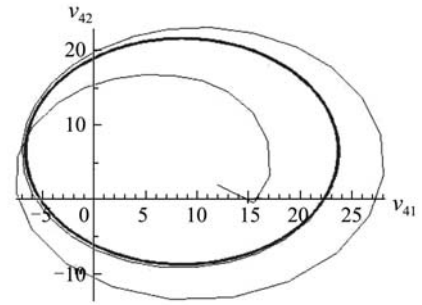
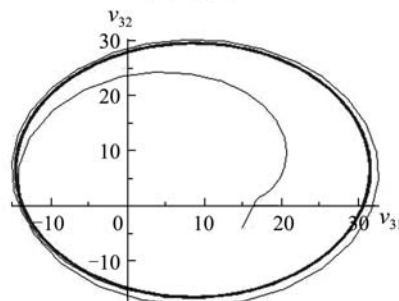
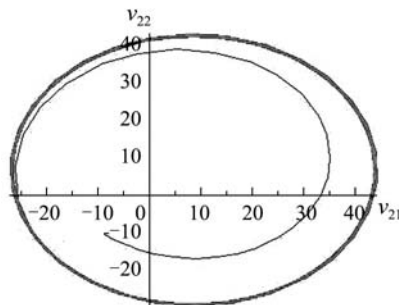
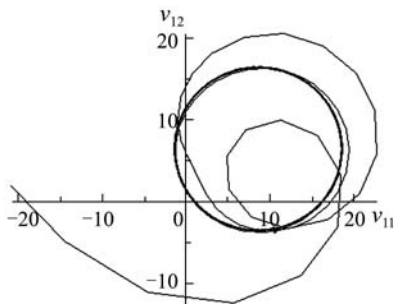


图 7  $\delta = 1.5, k = 3.6542$ 时,每个个体的速度轨迹.  
Fig. 7 The velocities trajectories of each agent with  $\delta = 1.5, k = 3.6542$

### 5 结论(Conclusions)

本文考察了一类由多个个体组成的动态群体, 其中每个个体在不与周围其他个体进行信息交流的时候均为李雅普诺夫稳定. 当每个个体采取分布式线性控制协议时, 研究了有向网络拓扑结构和个体的动力学性质、可测状态误差对群体行为的影响. 直接根据网络拓扑结构的Laplacian矩阵的特征根得到群体呈现全局渐近聚集、稳定周期轨迹和发散3种不同现象的具体代数判据, 同时针对个体可测状态存在的传感误差, 给出其鲁棒性的代数表达. 值得一提的是, 本文的研究结果同样可以适用于多个强连通的交流网络的切换拓扑. 对于可测状态误差, 笔者也正在进一步研究其随机性对群体行为的影响.

### 参考文献(References):

- [1] REYNOLDS C W. Flocks, birds, and schools: a distributed behavioral model[J]. *Computer Graphics*, 1987, 21(4): 25 – 34.
- [2] WARBURTON K, LAZARUS J. Tendency-distance models of social cohesion in animal groups[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 1991, 150(4): 473 – 488.
- [3] VICSEK T, CZIROK A, BEN-JACOB E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226 – 1229.
- [4] GIULIETTI F, POLLINI L, INNOCENTI M. Autonomous formation flight[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2000, 20(10): 34 – 44.
- [5] BURGARD W, MOORS M, STACHNISS C, et al. Coordinated multi-robot exploration[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2005, 21(3): 376 – 386.
- [6] LAFFERRIERE G, WILLIAMS A, CAUGHMAN J, et al. Decentralized control of vehicle formations[J]. *Systems and Control Letters*, 2005, 54(9): 899 – 910.

- [7] LIN Zhiyun, BRUCE Francis, MANFREDI Maggiore. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicyles[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(1): 121 – 127.
- [8] JADBABAIE A, LIN J, MORSE S A. coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988-1000.
- [9] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(2): 655 – 661.
- [10] SABER R O, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [11] SABER R O, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multiagent systems[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215 – 240.
- [12] GAZI V, PASSINO K M. Stability analysis of swarms[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(4): 692 – 697.
- [13] SAVKIN A V. Coordinated collective motion of groups of autonomous mobile robots: analysis of vicsek's model[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(6): 981 – 983.
- [14] XIE Guangming, WANG Long. Consensus control for a class of networks of dynamic agents[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(4): 941 – 959.
- [15] HONG Y, GAO L, CHENG D, et al. Lyapunov-based approach to multiagent systems with switching jointly connected interconnection[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 943 – 948.
- [16] 程代展, 陈翰馥. 从群集到社会行为控制[J]. *科技导报*, 2004, (8): 4 – 7.
- (CHENG Daizhan, CHEN Hanfu. From swarm to social behavior control[J]. *Science and Technology Review*, 2004, (8): 4 – 7.)
- [17] LIU Z, GUO L. Connectivity and synchronization of multi-agent systems[C]//2006 Chinese Control Conference. Harbin: IEEE, 2006: 373 – 378.
- [18] WANG Jinzhi, TAN Yin, MAREELS Iven. Robustness analysis of leader-follower consensus[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2009, 22(2): 186 – 206.
- [19] YU Hongwang, ZHENG Yufan. Global behavior of dynamical agents in directed network[J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2009, 7(3): 307 – 314.
- [20] 楚天广, 杨正东, 邓魁英, 等. 群体动力学与协调控制研究中的若干问题[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(1): 86 – 93.
- (CHU Tianguang, YANG Zhengdong, DENG Kuiying, et al. Problems in swarm dynamics and coordinated control[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(1): 86 – 93.)
- [21] MERRIS R. Laplacian matrices of a graph: a survey[J]. *Linear Algebra its Applications*, 1994, 197(2): 143 – 176.

#### 作者简介:

**余宏旺** (1977—), 男, 博士, 目前研究方向为群体动力学、奇摄动控制系统, E-mail: yuhongwang@nau.edu.cn;

**郑毓蕃** (1941—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为群体动力学、复杂系统和非线性控制系统, E-mail: yfzheng@shu.edu.cn;

**张宝善** (1959—), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为数值计算、稳定性理论, E-mail: bszhang@nau.edu.cn.