

变参数非自治蔡氏电路的混沌同步

高永毅, 李邦彦

(湖南科技大学 物理学院, 湖南 湘潭 411201)

摘要: 针对非自治蔡氏电路激励电压的振幅和初相位发生微小扰动的混沌同步问题, 提出了一种新的同步方法: 将非自治方程等效变换为自治方程, 使发生微小扰动的激励电压的振幅和初相位能用自治方程不同的初始值来体现, 经过这种变换, 参数失配的混沌同步问题能用定参数混沌同步方法来解决, 再利用单向耦合同步法, 结合非线性微分几何控制理论中的串接系统稳定性方法对误差系统进行降维处理, 得出了同步系统耦合系数满足的条件, 解决了两系统参数失配的混沌同步问题. 仿真和实验结果表明: 该方法可以使两个混沌系统在参数失配时达到快速全局同步.

关键词: 变参数; 非自治; 蔡氏电路; 同步

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Chaotic synchronization of non-autonomous Chua's circuits with variable parameters

GAO Yong-yi, LI Bang-yan

(College of Physics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan 411201, China)

Abstract: A new synchronization method is proposed for the non-autonomous Chua's circuits with small disturbances in voltage amplitude and phase. In this method, the non-autonomous equation is transformed into the autonomous equation with initial values representing the small perturbed voltage amplitude and phase in the original non-autonomous equation. Thus, the chaotic synchronization with mismatch parameters can be realized by the chaotic synchronization with deterministic parameters. Using one-way coupled synchronization method and the nonlinear differential geometric control theory about stability theory of cascade-connected system to reduce the dimension, we obtain the conditions for coupling coefficients in the synchronization of two systems, thus solving the problem of synchronization of two systems with mismatch parameters. The simulation results show that this method can realize fast chaotic synchronization between two systems with mismatch parameters.

Key words: variable parameter; non-autonomous; Chua's circuit; synchronization

1 引言(Introduction)

自从混沌同步首次实现成功以来^[1], 人们探索和尝试了用不同方法去实现混沌同步的可能性, 相关文献已经十分丰富^[2~5]. 但同时笔者也看到, 目前研究的混沌系统的同步大都建立在具有相同结构的混沌系统的精确数学模型基础上^[6~8]. 许多动力学系统随着环境的变化, 系统的参数可能会发生变化, 由于受外界的影响, 两混沌系统的参数很难完全相同, 总是会存在微小扰动, 因此讨论参数失配的混沌同步是非常重要的. 蔡氏电路是1983年华裔科学家蔡少棠教授首次提出的, 是非线性电路中产生复杂动力学行为的最有效并较为简单的混沌电路之一. 本文在此基础上对存在参数变化的非自治蔡氏电路进行了混沌同步研究, 将原系统的非自治状态方程等效变换为自治状态方程, 再根据非线性微分几何控

制理论中的串接系统稳定性方法, 将原混沌系统进行降维处理, 可以顺利地实现变参数混沌系统的同步, 具有一定的实际意义.

2 电路状态方程的建立(The establishment of the circuit equation)

周期激励蔡氏电路^[9]是一种典型的非自治电路, 如图1所示.

其状态方程为

$$\begin{cases} \frac{dv_{c1}}{dt} = \frac{1}{RC_1}(v_{c2} - v_{c1}) - \frac{1}{C_1}f(v_{c1}), \\ \frac{dv_{c2}}{dt} = \frac{1}{RC_2}(v_{c1} - v_{c2}) + \frac{1}{C_2}i_1, \\ \frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{L}v_{c2} + \frac{A}{L}\cos(\Omega t + \Phi). \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中: v_{c1}, v_{c2} 为 C_1, C_2 的电压, i_1 为 L 的电流, $A,$

Ω, Φ 分别为电压源的振幅、频率、初相位, $f(v_{c1})$ 是非线性电阻 R_N 的伏安特性函数, 其函数形式为

$$f(v_{c1}) = \begin{cases} G_b v_{c1} + (G_a - G_b), & v_{c1} > 1, \\ G_a v_{c1}, & |v_{c1}| \leq 1, \\ G_b v_{c1} - (G_a - G_b), & v_{c1} < -1. \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中 G_a, G_b 为内外折线的斜率. 进一步对方程作如下标度:

$$\begin{aligned} x &= v_{c1}, \quad y = v_{c2}, \quad z = Ri_1, \quad t = RC_2\tau, \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{R^2 C_2}{L}, \quad m_0 = RG_a, \\ m_1 &= RG_b, \quad \gamma = \frac{R^2 C_2 A}{L}, \quad \omega = RC_2\Omega. \end{aligned}$$

则式(1)可化为

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - f(x)), \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y + \gamma \cos(\omega t + \Phi), \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} m_1 x + (m_0 - m_1), & x > 1, \\ m_0 x, & |x| \leq 1, \\ m_1 x - (m_0 - m_1), & x < -1. \end{cases} \quad (4)$$

此电路和蔡氏电路一样具有丰富的混沌动力学行为.

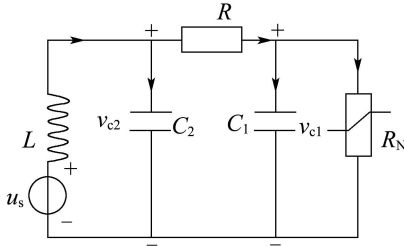


图1 周期激励蔡氏电路

Fig. 1 periodic driven Chua's circuit

3 变参数混沌同步研究(Chaotic synchronization of variable parameter)

3.1 变参数的转移及同步问题转化为稳定性问题(Transfer the parameters and synchronization into a stability problem)

在实现非自治电路的混沌同步时, 若激励电压的振幅或相位有微小的扰动时, 用一般方法很难实现同步, 本文采用与原系统的非自治状态方程等效的自治状态方程进行研究, 将变化的参数进行转移, 可以顺利地实现系统的同步. 由于含时因子是方程

$$\ddot{x}_4 = -\omega^2 x_4 \quad (5)$$

的解, 因此可以引入新的二变量一阶方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_4 = -x_5, \\ \dot{x}_5 = \omega^2 x_4 \end{cases} \quad (6)$$

表示余弦因子, 其振幅 γ 和初相位 Φ 由 x_4, x_5 的初始值来确定. 令 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, 则方程(3)可

以化为下述自治的一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1 - f(x_1)), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \quad \dot{x}_3 = -\beta x_2 + x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_5, \quad \dot{x}_5 = \omega^2 x_4. \end{cases} \quad (7)$$

下面采用二变量单向耦合同步法对系统(7)进行同步. 设计同步系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(y_2 - y_1 - f(y_1)) + k_1(x_1 - y_1), \\ \dot{y}_2 = y_1 - y_2 + y_3, \quad \dot{y}_3 = -\beta y_2 + y_4, \\ \dot{y}_4 = -y_5 + k_4(x_4 - y_4), \quad \dot{y}_5 = \omega^2 y_4. \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中: k_1, k_4 为耦合系统. 系统(7)和同步系统(8)虽不含激励电压, 但已分别隐含在变量 x_4 和 y_4 中, 当两系统中的 x_4, x_5 和 y_4, y_5 的初始值取值不同时, 则它们的激励电压的振幅和初相位就不同, 这样可将两系统不同参数的激励电压转化为系统的不同初始值来处理. 令: $e_1 = x_1 - y_1, e_2 = x_2 - y_2, e_3 = x_3 - y_3, e_4 = x_4 - y_4, e_5 = x_5 - y_5$, 由式(7)(8)得误差系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \alpha(e_2 - e_1 - (f(x_1) - f(y_1))) - k_1 e_1, \\ \dot{e}_2 = e_1 - e_2 + e_3, \quad \dot{e}_3 = -\beta e_2 + e_4, \\ \dot{e}_4 = -e_5 - k_4 e_4, \quad \dot{e}_5 = \omega^2 e_4. \end{cases} \quad (9)$$

由于 $f(x_1), f(y_1)$ 分段线性连续, 因此,

$$f(x_1) - f(y_1) = m(x_1 - y_1) = m e_1, \quad (10)$$

其中 $m_0 \leq m \leq m_1$, 将式(10)代入式(9)得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(\alpha + \alpha m + k_1)e_1 + \alpha e_2, \\ \dot{e}_2 = e_1 - e_2 + e_3, \quad \dot{e}_3 = -\beta e_2 + e_4, \\ \dot{e}_4 = -e_5 - k_4 e_4, \quad \dot{e}_5 = \omega^2 e_4. \end{cases} \quad (11)$$

这样混沌系统同步问题转化为误差系统(11)在原点的稳定性问题. 下面采用串接系统稳定性理论来分析此问题.

3.2 误差系统的降维及稳定性分析(System error of dimensionality reduction and stability analysis)

串接系统稳定性理论在非线形微分几何控制理论中已经发展得比较完善. 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z), \\ \dot{z} = g(z). \end{cases} \quad (12)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^m, f(0, 0) = 0, g(0) = 0, f(x, z)$ 和 $g(z)$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 中是局部Lipschitz的. 这类系统被称为串接系统. 就稳定性而言它具有以下两个重要的性质.

引理 1^[10] 对于系统(12), 若 $\dot{x} = f(x, 0)$ 在 $x = 0$ 处是局部渐近稳定的, $\dot{z} = g(z)$ 在 $z = 0$ 处是局部渐近稳定的, 则系统(12)在 $(x, z) = (0, 0)$ 处也是局部渐近稳定的.

引理 2^[10] 对于系统(12), 若 $\dot{x} = f(x, 0)$ 在 $x =$

0处是全局渐近稳定的, $\dot{z} = g(z)$ 在 $z = 0$ 处是全局渐近稳定的, 同时, 系统(12)的所有解都是有界的, 则系统(12)在 $(x, z) = (0, 0)$ 处也是全局渐近稳定的.

因误差系统(11)是一个串接系统, 先考虑子系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_4 = -e_5 - k_4 e_4, \\ \dot{e}_5 = \omega^2 e_4. \end{cases} \quad (13)$$

选取Lyapunov函数:

$$V_1(e_4, e_5) = \frac{1}{2}\omega^2 e_4^2 + \frac{1}{2}e_5^2, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(e_4, e_5) &= \omega^2 e_4 \dot{e}_4 + e_5 \dot{e}_5 = \\ &= \omega^2 e_4(-e_5 - k_4 e_4) + e_5 \omega^2 e_4 = -\omega^2 k_4 e_4^2. \end{aligned} \quad (15)$$

由于 $V_1(e_4, e_5)$ 是正定的, 当 $k_4 > 0$ 时, $\dot{V}_1(e_4, e_5)$ 是负定的, 由Lyapunov稳定性定理知式(13)零解全局渐近稳定.

考虑另一个子系统:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(\alpha + \alpha m + k_1)e_1 + \alpha e_2, \\ \dot{e}_2 = e_1 - e_2 + e_3, \dot{e}_3 = -\beta e_2 + e_4, \end{cases} \quad (16)$$

代入 $e_4 = 0$ 得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(\alpha + \alpha m + k_1)e_1 + \alpha e_2, \\ \dot{e}_2 = e_1 - e_2 + e_3, \dot{e}_3 = -\beta e_2. \end{cases} \quad (17)$$

选取Lyapunov函数:

$$V_2(e_1, e_2, e_3) = \beta e_1^2 + \alpha \beta e_2^2 + \alpha e_3^2, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(e_1, e_2, e_3) &= \\ &= 2\beta e_1 \dot{e}_1 + 2\alpha \beta e_2 \dot{e}_2 + 2\alpha e_3 \dot{e}_3 = \\ &= -2\beta e_1 [(\alpha + \alpha m + k_1)e_1 - \alpha e_2] + \\ &= 2\alpha \beta e_2 (e_1 - e_2 + e_3) + 2\alpha e_3 (-\beta e_2) = \\ &= -2\beta(\alpha + \alpha m + k_1)e_1^2 - 2\alpha \beta e_2^2 + 4\alpha \beta e_1 e_2 = \\ &= -2\beta(\alpha m + k_1)e_1^2 - 2\alpha \beta (e_1 - e_2)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

只要 $\alpha m + k_1 > 0$, 由Lyapunov稳定性定理知式(17)零解全局渐近稳定. 由于式(11)单位体积元的变化率:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\partial \dot{e}_1}{\partial e_1} + \frac{\partial \dot{e}_2}{\partial e_2} + \frac{\partial \dot{e}_3}{\partial e_3} + \frac{\partial \dot{e}_4}{\partial e_4} + \frac{\partial \dot{e}_5}{\partial e_5} = \\ &= -(\alpha + \alpha m + k_1) - 1 - k_4. \end{aligned} \quad (20)$$

在式(13)零解全局渐近稳定($k_4 > 0$)和式(17)零解全局渐近稳定($\alpha m + k_1 > 0$)的条件下, 可得出 $\Delta V < 0$, 即: 系统相体积要收缩, 所以, 相空间中由不同初始状态出发的轨道最后都要收缩到相空间的有限部分. 因此, 系统(11)的所有解是有界的. 根据引理2, 当耦合系数 k_1, k_4 满足: $\alpha m + k_1 > 0, k_4 > 0$ 时, 误差系统(11)在原点是全局渐近稳定的, 从而系统(7)和系统(8)实现了同步.

3.3 仿真结果(Simulation results)

利用参考文献[9]中系统产生混沌的参数, 取 $\alpha = 9.8, \beta = 14.87, m_0 = -1.27, m_1 = -0.68, \omega = 1$; 取耦合系数 $k_1 = 12.7, k_4 = 2$, 取系统(7)的初值为 $x_1(0) = 0.022, x_2(0) = -0.025, x_3(0) = 0.01, x_4(0) = 0.8, x_5(0) = 0$. 由这组初值可求得激励电压的振幅 $\gamma = 0.8$ 、初相位 $\Phi = 0$. 取同步系统(8)的初值为 $y_1(0) = 3, y_2(0) = -2, y_3(0) = 1, y_4(0) = 2, y_5(0) = 2$. 由这组初值可求得激励电压的振幅 $\gamma = 2\sqrt{2}, \Phi = \frac{\pi}{4}$.

用MATLAB对系统(7)与系统(8)的误差信号随时间的变化进行仿真得到如图2(a)所示的结果, 图中的误差信号在很短的时间内已变成一条通过原点且平行于时间轴的直线, 说明系统(7)与系统(8)的各个状态变量都达到了快速全局同步. 任取其它的不同初始值, 不仿取系统(7)的初值为: (0.01, 0.02, 0.015, 0.6, 0.8); 系统(8)的初值为: (0.6, -1.2, 0.085, 1.6, 2.5), 同样能得到很好的同步效果, 仿真结果如图2(b)所示.

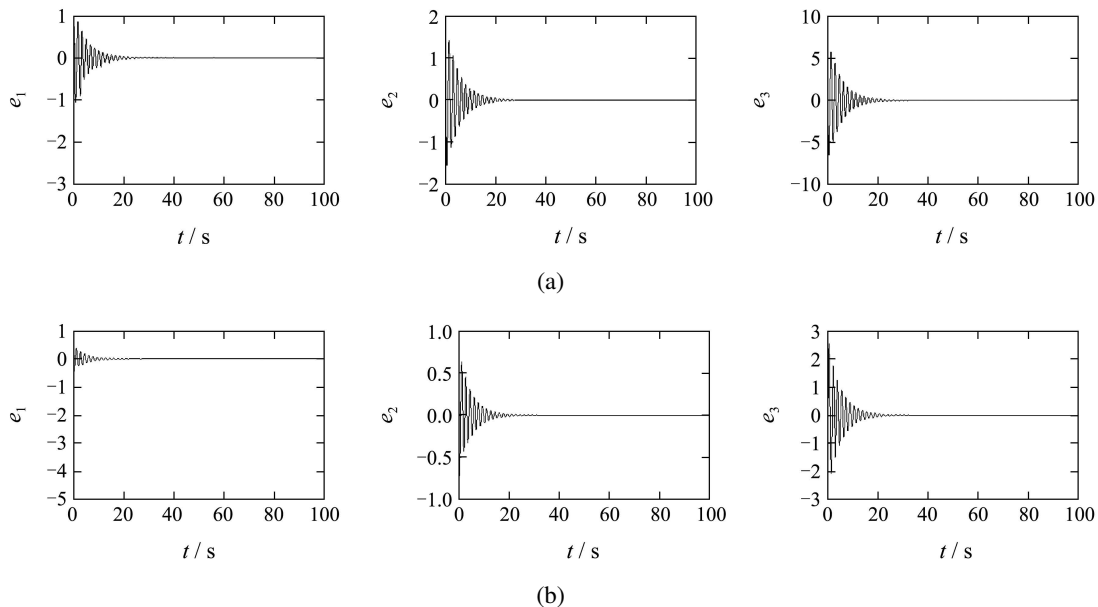


图 2 同步误差仿真
Fig. 2 Synchronization error

3.4 电路的实现(Circuit implementation)

图3(a)是系统(7)与系统(8)同步的实现电路的框图, 左边为非自治蔡氏电路, 实现系统(7), 右边的同步电路模块通过电压跟随器U1A和U2A实现同步系统(8).

在图3(a)中有一个同步电路模块, 它要实现一个五维的微分方程组和系统(8)对应, 根据模拟电路中各种运算电路原理, 同步电路模块可由反相加法器模块, 积分器模块, 反相器模块的组合实现, 如图3(b)所示, 系统(8)中的参数由电路中的电阻和电容决定. 图中out为输出.

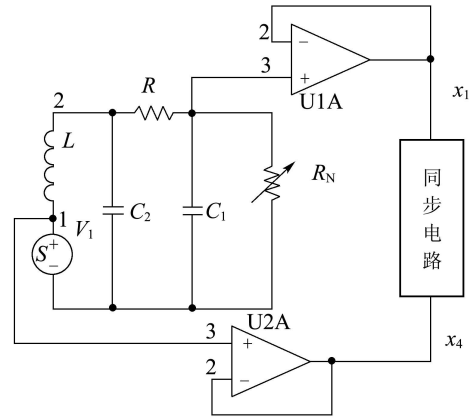


图3(a) 同步实现电路框图

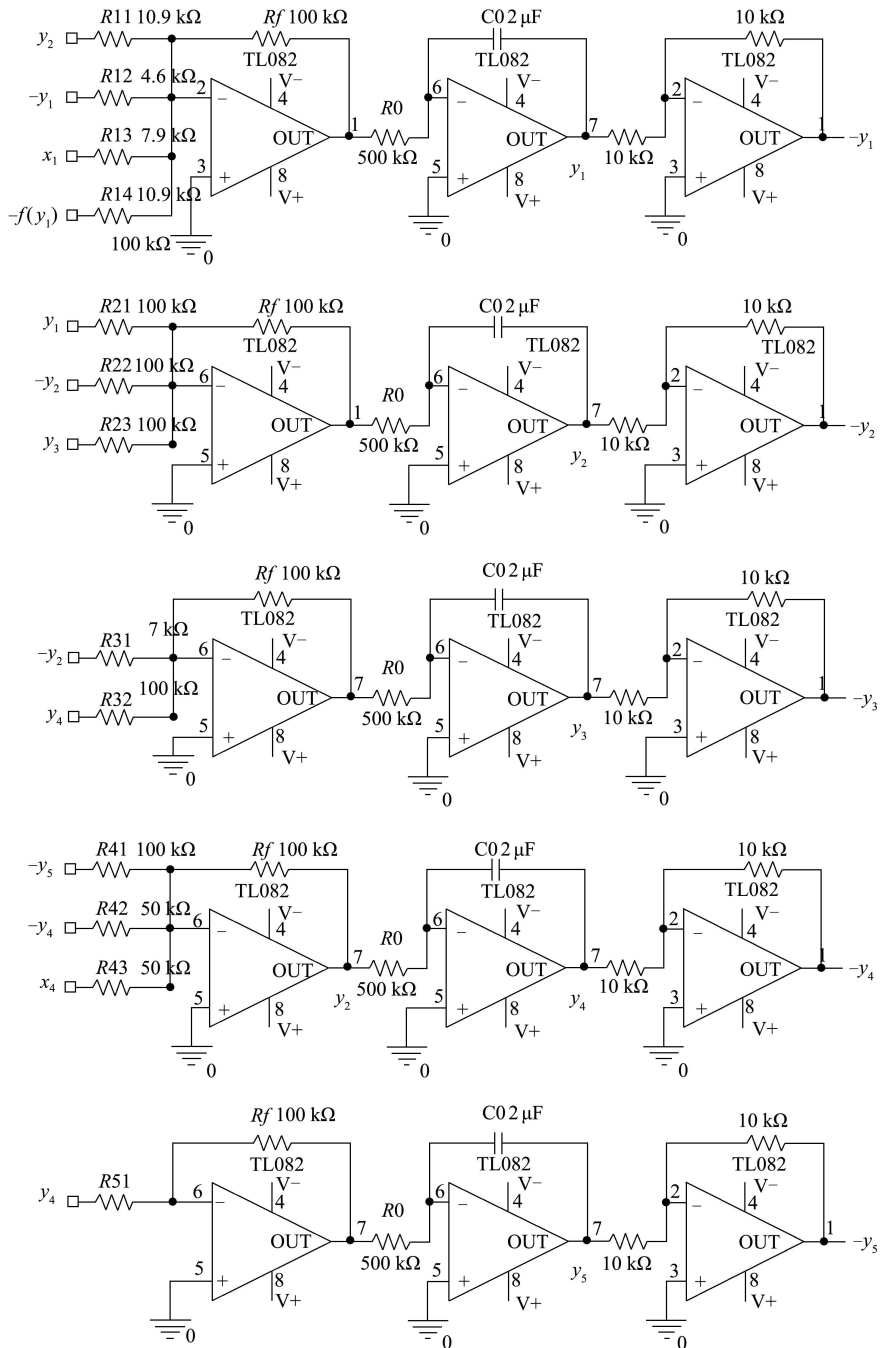


图3(b) 同步电路

在图3(b)这个同步电路模块中有一个非线性电阻的函数关系 $f(y_1)$, 它也可用一个电路模块来实现此功能. 同理, 根据模拟电路中各种运算电路原理, 此电路模块可由绝对值电路和加法器来实现, 如图3(c)所示.

实验中, 非自治蔡氏电路中的参数值分别为

$$L = 8.2 \text{ mH}, C_1 = 0.0055 \text{ } \mu\text{F},$$

$$C_2 = 0.05 \text{ } \mu\text{F}, R = 1.43 \text{ k}\Omega,$$

激励电压为余弦信号 $A \cos(\Omega t + \Phi)$, 非线性电阻采

用单运放加双二极管实现^[11]. 各运放采用TL082, 电源压为9 V, 同步电路左边和右边相同信号相互连接. 当余弦激励电压 V_1 的振幅为0.05 V, 相位为0时, 实验的结果如图4(a)所示, 由实验结果可以看出, 非自治蔡氏电路与同步电路的对应信号的相图是一条斜率为1的直线, 故图3(a)的电路实现了混沌的同步. 调节激励电压的振幅和相位为各种不同取值时可得到同样的结果, 不仿取余弦激励电压 V_1 的振幅为0.08 V, 相位为 $\frac{\pi}{3}$ 时, 实验的结果图4(b)所示, 电路同样实现了混沌的同步.

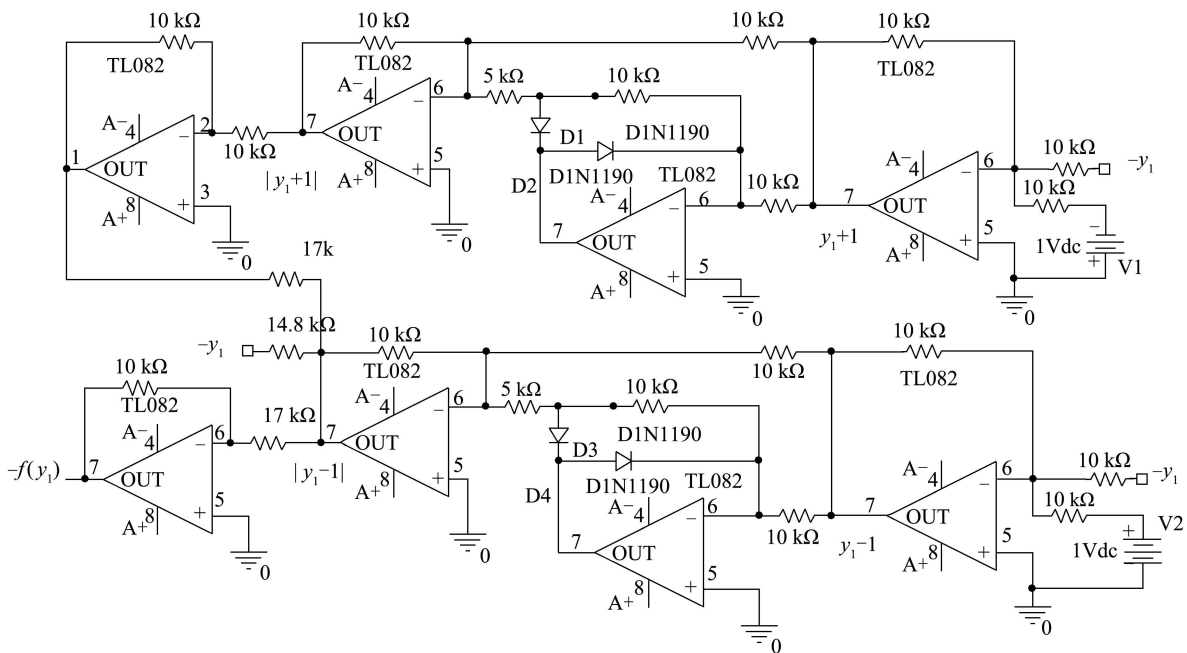


图3(c) 非线性函数

图 3 同步的实现电路

Fig. 3 Synchronization in the circuit

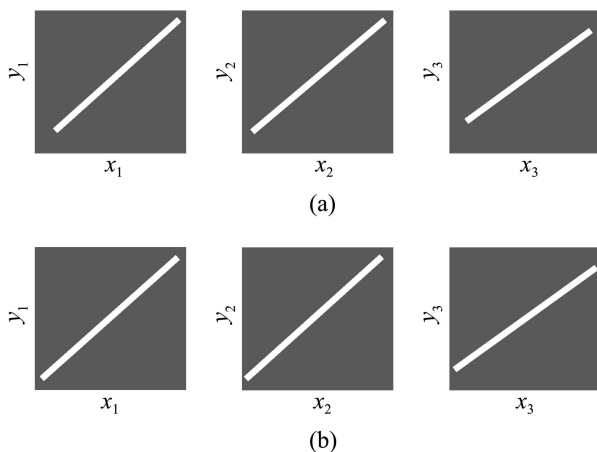


图 4 系统同步实验结果

Fig. 4 Experimental results

4 结论(Conclusion)

在解决激励电压的振幅和初相位发生微小扰动的非自治蔡氏电路的混沌同步问题时, 本文对非自治状态方程进行了自治化处理, 经处理后的系统虽不显含激励电压, 但已被隐藏在初始值中, 激励电压的振幅和初相位的不同可用初始值的不同来体现, 这样, 原来变参数混沌系统的同步问题就可用定参数混沌系统的同步方法来解决. 在分析误差系统的稳定性时, 利用了非线性微分几何控制理论中的串接系统稳定性方法, 对系统进行了降维处理, 这种处理方法特别适用于高维混沌系统的同步问题.

参考文献(References):

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(6): 821 – 824.
- [2] JU H P. Synchronization of Genesio chaotic system via backstepping approach[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 27(5): 1369 – 1375.
- [3] YAA J P, LI C P. On chaos synchronization of fractional differential equations[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 32(2): 725 – 735.
- [4] JU H P. Synchronization of Genesio chaotic system via backstepping approach[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 27(5): 1369 – 1375.
- [5] YASSEN M T. Adaptive chaos control and synchronization for uncertain new chaotic dynamical system[J]. *Physics Letters A*, 2006, 350(1/2): 36 – 43.
- [6] 张皓, 严怀成, 陈启军. 随机混沌时滞神经网络的指数同步[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(2): 190 – 192.
(ZHANG Hao, YAN Huaicheng, CHENG Qijun. Exponential synchronization of stochastic perturbed chaotic neural networks with time-delay[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(2): 190 – 192.)
- [7] BOWONG S, TEWA J J. Practical adaptive synchronization of a class of uncertain chaotic systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 56(1): 57 – 68.
- [8] CISZAK M, MONTINA A, ARECCHI F T. Spike synchronization of chaotic oscillators as a phase transition[J]. *Cognitive Processing*, 2009, 10(1): 33 – 39.
- [9] BAPTISTA M S, SILVA T P. Phase synchronization in the perturbed Chua circuit[J]. *Physical Review E*, 2003, 67(3): 6212.
- [10] 冯纯伯, 张佩健. 非线性系统的鲁棒控制[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 51 – 53.
(FENG Chunbo, ZhANG Kanjian. *Robust Control of Nonlinear Systems*[M]. Beijing: Science Press, 2004: 51 – 53.)
- [11] 吴敏金. 分形信息导论[M]. 上海: 科学技术文献出版社, 1994: 185 – 190.
(WU Minjin. *Introduction to Fractal Information*[M]. Shanghai: Science and Technology Literature Press, 1994: 185 – 190.)

作者简介:

高永毅 (1958—), 男, 博士, 教授, 硕士生导师, 研究方向为非线性物理、混沌电路、生物物理等, E-mail: fxxwl@163.com;

李邦彦 (1970—), 男, 硕士, 研究方向为非线性物理、非线性电路、混沌电路等.