

# 路灯维护总费用随机优化模型及其概率分布拉格朗日松弛方法

涂国煜, 宋士吉

(清华大学 自动化系, 北京 100084)

**摘要:** 针对一般故障特性的部件, 优化其有限阶段内更换策略尚无相关模型及有效的解决办法. 本文为路灯维修问题建立了联合更换部件的多阶段随机策略优化模型. 策略优化难点在于部件更换的相互耦合, 且其耦合约束为难以处理的随机约束. 不同于现有的基于情境松弛随机耦合约束的方法, 本文通过引入与决策概率分布相关的乘子松弛约束, 给出概率分布拉格朗日松弛方法(PLR), 其乘子数目与指数增长的情境数目无关. 本文通过给出了联合更换分段策略的求解方法及其充分条件, 进一步解除各阶段决策之间由于故障率非时齐带来的耦合关系. 在实际问题的数值测试中, PLR同时得到了最优解下界及近优解, 可大幅降低当前实际费用; 同时验证了该模型及PLR在大规模策略优化中的有效性.

**关键词:** 维修; 总费用; 多部件; 联合更换; 随机策略优化; 概率分布拉格朗日松弛

**中图分类号:** O221.5      **文献标识码:** A

## Stochastic model for total cost optimization in street lamp maintenance and its probabilistic Lagrangian relaxation method

TU Guo-yu, SONG Shi-ji

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** Optimization models and algorithms for the maintenance policy of components with general failure modes in a finite horizon still remain a challenge. This paper provides a multi-stage stochastic model to optimize the joint replacement policy for street lamp components of general failure modes. The major difficulty arises from the stochastic coupling constraints on different component replacement decisions. Instead of relaxing those constraints based on scenarios as in existing methods, we propose the probability Lagrangian relaxation method(PLR) by introducing multipliers associated with the probability distributions of decisions, where the number of multipliers is independent of the exponentially increasing scenarios. A solution method and its sufficient conditions are also provided for a phase-wise policy structure to decouple the correlation among stages due to the time-variant failure rates. In numerical testing with real data, the PLR obtains the lower bound of the optimal solution and a suboptimal solution. The results lead to a significant reduction in the current maintenance cost, and demonstrate the efficiency of the model and PLR in solving practical problems.

**Key words:** maintenance; total cost; multi-component; joint replacement; stochastic policy optimization; probabilistic Lagrangian relaxation

### 1 引言(Introduction)

道路照明设施维护费用是政府固定资产维护开支中仅次于电费的第二大款项<sup>[1]</sup>. 通过合理的更换维修策略降低维修合同期限内的总费用成为政府和服务提供商共同关注的课题. 合同式维修服务模式的兴起使得对有限阶段内总费用优化逐渐成为维修策略研究的焦点之一<sup>[2,3]</sup>.

有限阶段内的最优策略通常是与时间相关的非平稳策略, 不易求解. 目前大多数维修策略优化的研究仍集中在无限阶段模型下的平稳策略, 优化有限阶段总费用的动态策略模型相对缺乏<sup>[4]</sup>. 同时由于故障的随机性和多个零部件之间的耦合关系<sup>[5]</sup>, 其策略求解面临随机组合优化中普遍存在的规模

困境. 维修文献中通常通过假设一定的故障率分布(如Weibull分布<sup>[6]</sup>等)或策略结构(如周期型<sup>[7]</sup>、阈值型<sup>[8]</sup>)来简化问题的求解<sup>[4]</sup>. 本文研究的新型照明设备的故障率不具备特殊的故障率分布形式; 且通常情况下, 联合更换零件的策略不具备简单的结构<sup>[9]</sup>.

本文针对一般性的故障率分布给出了优化总费用的有限阶段随机组合策略模型. 该模型具有一定的分解性, 因此可利用基于分解与协调思路的拉格朗日松弛方法(Lagrangian relaxation, 下文简称LR)<sup>[10]</sup>处理大规模问题. LR方法在大规模确定型问题中得到了广泛有效的应用<sup>[11]</sup>, 但在随机问题中, 故障这一随机因素影响了问题的分解性质, 进

而为LR应用于随机问题造成了困难<sup>[3]</sup>. 文献中采用了基于情境分析(scenario analysis)的方法<sup>[12,13]</sup>, 将对随机耦合约束的处理转化为在一系列典型情境下进行. 这种方法中典型情境的选择成为影响算法效果的关键<sup>[4]</sup>. 对于故障较频繁的路灯维修问题而言, 典型情境难以选取, 基于情境的算法复杂度远超计算允许范围.

本文在所提模型的基础上, 给出针对随机决策变量的概率分布拉格朗日松弛方法(PLR). 通过引入与决策变量概率分布关联的随机乘子, 使得在该随机策略优化模型下, 状态和决策的组合可以在评价和寻优阶段被分解, 大大降低了计算复杂性. 基于该随机乘子, 给出联合更换最优费用的求解方法. 在实际规模的算例测试上给出了近优解及最优解的下界.

## 2 路灯维护策略优化模型(Optimization model for street lamp maintenance policy)

### 2.1 基本问题描述(Basic problem description)

#### 1) 阶段.

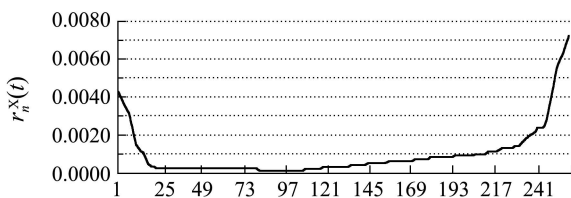
维修工作一般以同一路段上的数百至数千盏灯为一组. 为了保证道路照明的基本要求, 损坏的灯头需要在一定的时间之内被更换<sup>[1]</sup>, 实际中通常至少以某个固定的时间间隔出车巡修. 例如对已坏路灯的忍耐时间为一周, 即可将时间按周为时间单位离散化, 出车巡修及更换灯头的决策因而可建模为离散时间阶段上的变量. 维修费用的估计与优化通常限定在一定的合同年限之内, 因而可将这一问题建模为总阶段数为 $T$ 的随机优化问题.

#### 2) 状态.

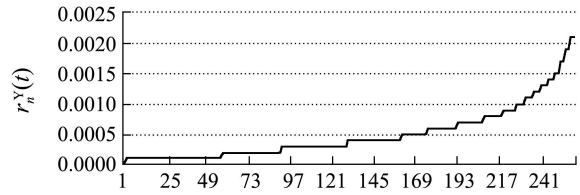
某路段需维护的路灯总数为 $N$ 盏, 出于节能目的, 选择使用某高频无极灯作为光源. 根据当地的天气情况和经纬度, 每天需要开启灯的时间平均为10小时, 灯及其部件的寿命按照该平均点亮时数以1)中所述离散时间间隔为单位折算. 各部件折算后的寿命(组合)定义为状态.

#### 3) 故障.

高频无极灯由控制器和泡体两个部件组成,  $N$ 盏灯的同一种部件的故障为独立同分布. 该高频无极节能灯的测试数据如图1所示, 部件故障率随点亮时数变化的测试数据折合为以周为单位, 并经过了平滑处理. 图(a)为控制器故障率, 图(b)为泡体故障率.



(a) 控制器故障率



(b) 泡体故障率

图1 高频无极灯部件在不同点亮时数下的故障率统计数

Fig. 1 Failure rates with respect to lighting hours

#### 4) 费用.

出车检查和更换部件这两类成本是维修费用中的主要部分. 出车检查包括人工工时及车辆使用等成本; 更换部件包括部件的价格、回收费用、更换操作的人工工时等. 出现故障时可单独更换损坏的部件, 其他部件寿命不受影响. 考虑到取下整个灯头检测拆装的工时成本, 若其他部件的点亮时间已经较长, 或短期内发生故障的概率较高, 如果将其同时更换有可能更经济.

由于两个部件寿命特征不同, 使用中并不能总是同时更换. 随着使用中的更换, 同一盏灯的两个部件所处的状态发生差异, 因此优化更换决策需考虑两者状态的组合特征. 这两个部件的故障率既非时齐亦非无记忆分布, 且特性不相同. 平稳策略通常不适用于这个有限阶段的联合更换问题. 要得到对总费用最优值的估计, 需要考察各阶段上的随机决策变量.

### 2.2 决策变量与目标函数(Decision variables and the objective function)

路灯组中灯盏数记为 $N$ ; 路灯通常以5000盏为1组, 即 $N = 5000$ . 考虑 $t = 0, \dots, T-1$ 共 $T$ 个阶段的问题; 一般的合同期为5年共260周, 即 $T = 260$ . 第 $n$ 盏灯的泡体的故障用0-1变量 $\xi_{n,t}$ 来表示, 其值为1即发生故障的概率为 $r_n^X(t)$ ; 第 $n$ 盏灯的控制器的故障用0-1变量 $\varepsilon_{n,t}$ 来表示, 其值为1即发生故障的概率为 $r_n^Y(t)$ .

第 $n$ 盏灯的泡体的更换决策变量记为 $X_n(t)$ , 控制器的更换决策变量记为 $Y_n(t)$ . 决策变量 $X_n(t)$ 和 $Y_n(t)$ 均为0-1变量; 取值为1时代表需要更换. 每次出工维修的决策变量记为 $\Delta_t$ , 亦为0-1变量, 取值为1时代表出工维修更换损坏件, 反之为零.

每次出工的工时费及成本合计为 $C$ , 更换一个泡体的成本为 $c^X$ , 更换一个控制器的成本为 $c^Y$ .

首先考虑一个灯两个部件联合更换的策略.  $T$ 个阶段的总费用为

$$J_n = \mathbb{E} \sum_{t=0}^{T-1} [C\Delta_t + X_n(t)c^X + Y_n(t)c^Y]. \quad (1)$$

### 2.3 约束及条件(Constraints and conditions)

如果第 $n$ 盏灯的泡体或控制器失效,则需要更换该部件,即

$$\xi_{n,t}^X \leq X_n(t), \quad (2)$$

$$\varepsilon_{n,t}^Y \leq Y_n(t). \quad (3)$$

由此看出,决策变量 $X_n(t)$ 和 $Y_n(t)$ 均为随机变量.

只要出故障就需要在同一周内出工维修,所以有

$$X_n(t) - \Delta_t \leq 0, \quad (4)$$

$$Y_n(t) - \Delta_t \leq 0. \quad (5)$$

约束(4)和(5)为问题的耦合约束. 由于 $X_n(t), Y_n(t)$ 与 $\Delta_t$ 均为随机变量,因此耦合约束为随机约束.

### 3 以 PLR 方法优化路灯维护策略(PLR method for street lamp maintenance optimization)

#### 3.1 随机耦合约束的松弛(Relaxation of stochastic coupling constraints)

在确定性问题上,形如该问题的线性耦合约束可以通过拉格朗日松弛方法,松弛耦合约束进而有效求解大规模的优化问题. 针对该问题中随机性的耦合约束,文献中有通过典型情境<sup>[12]</sup>和期望值模型<sup>[15]</sup>这两种对其近似处理进而将原问题近似为确定性问题的方法. 在路灯维修问题中,由于随机故障的发生不具备特定的典型模式,难以选取少数目的典型情境;而情境数目随阶段数和部件个数指数增加,因此难以采用典型情境的方法. 同时由于故障带来的样本方差较大,期望值模型与原问题差异过大,因而亦难以直接使用期望值模型. 这里引入与概率分布相关的乘子以松弛随机耦合约束. 对于左端取值为离散可数集的随机约束 $g \leq 0$ ,记 $g$ 的随机样本为 $g_\omega, \omega \in \Omega$ . 引入乘子 $\lambda$ ,其样本 $\lambda_\omega, \omega \in \Omega$ 的分布律与随机约束的概率分布一致,即满足 $P(\lambda = \lambda_\omega) = P(g = g_\omega)$ . 用乘子 $\lambda$ 松弛耦合约束 $g \leq 0$ ,则在期望形式的目标函数中新增的拉格朗日项为

$$E[\lambda g] = \sum_{\omega} \lambda_{\omega} g_{\omega} P(g = g_{\omega}).$$

由于本问题的决策变量均为0-1变量,耦合约束(4)和(5)的左端的取值均只有3种可能: -1, 0及1. 当且仅当 $X_n(t)$ 或 $Y_n(t)$ 取1且 $\Delta_t$ 取0时,上述约束为有效约束,相应拉格朗日乘子为正值. 其余情况下,该耦合约束为无效约束,相应拉格朗日乘子为零. 因此,将上述两个随机耦合约束分别用与其概率分布相关的乘子 $\lambda_{n,t}$ 和 $\mu_{n,t}$ 松弛,可得到对目标函数(1)的拉格朗日惩罚项,分别为

$$E \sum_{n,t} \lambda_{n,t} (X_{n,t} - \Delta_t)$$

及

$$E \sum_{n,t} \mu_{n,t} (Y_{n,t} - \Delta_t).$$

分别记对应于 $X_{n,t} - \Delta_t$ 取值-1, 0和1的乘子样本为 $\lambda_{n,t}(\omega_{-1}), \lambda_{n,t}(\omega_0)$ 和 $\lambda_{n,t}(\omega_1)$ . 由于拉格朗日乘子

$$\lambda_{n,t}^*(\omega_{-1}) = \lambda_{n,t}^*(\omega_0) = 0,$$

因此有

$$\begin{aligned} & E \sum_{n,t} \lambda_{n,t} (X_{n,t} - \Delta_t) = \\ & \sum_{n,t} [\lambda_{n,t}(\omega_1) P(X_{n,t} - \Delta_t = 1)] = \\ & \sum_{n,t} [\lambda_{n,t}(\omega_1) P(X_{n,t} = 1) P(\Delta_t = 0)] = \\ & \sum_{n,t} [\lambda_{n,t}(\omega_1) E X_{n,t} (1 - E \Delta_t)] = \\ & \sum_{n,t} [\lambda_{n,t}(\omega_1) (E X_{n,t} - E X_{n,t} E \Delta_t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

由于 $E X_{n,t}, E \Delta_t \in [0, 1]$ ,因此有 $E X_{n,t} - E \Delta_t \leq E X_{n,t} - E X_{n,t} E \Delta_t$ . 用新惩罚项 $\sum_{n,t} \lambda_{n,t}(\omega_1) (E X_{n,t} - E \Delta_t)$ 代替原惩罚项进行优化,等价于适度放松原约束,同时可得到关于决策变量可加的拉格朗日函数,使之具备分解性. 对耦合约束(5)的惩罚项的处理与此相同. 因 $\lambda_{n,t}(\omega_1)$ 与 $\mu_{n,t}(\omega_1)$ 均为相应乘子唯一的样本,因此下面简记为 $\lambda_{n,t}$ 及 $\mu_{n,t}$ .

#### 3.2 拉格朗日分解(Lagrangian decomposition)

用非负乘子 $\lambda_{n,t}$ 与 $\mu_{n,t}(t = 0, \dots, T - 1)$ 分别松弛耦合约束(4)和(5),则可构成拉格朗日函数如下:

$$\begin{aligned} L_n = E \sum_{t=0}^{T-1} [ & C \Delta_t + c^X X_n(t) + c^Y Y_n(t) + \\ & \lambda_{n,t} (X_n(t) - \Delta_t) + \mu_{n,t} (Y_n(t) - \Delta_t)] = \\ & E \sum_{t=0}^{T-1} [(C - \lambda_{n,t} - \mu_{n,t}) \Delta_t + \\ & (c^X + \lambda_{n,t}) X_n(t) + (c^Y + \mu_{n,t}) Y_n(t)]. \end{aligned} \quad (7)$$

可将上述目标函数中的3项分别表示为

$$L_{\Delta} = \sum_{t=0}^{T-1} E(C - \lambda_{n,t} - \mu_{n,t}) \Delta_t, \quad (8)$$

$$L_n^X = \sum_{t=0}^{T-1} E(c^X + \lambda_{n,t}) X_n(t), \quad (9)$$

$$L_n^Y = \sum_{t=0}^{T-1} E(c^Y + \mu_{n,t}) Y_n(t). \quad (10)$$

下面分别讨论最小化这3个子项的解法.

#### 3.3 出车维修子问题(The maintenance visit subproblem)

在式(8)中,系数项 $C - \lambda_{n,t} - \mu_{n,t}$ 为实数,因此可将期望变换为只对 $\Delta_t$ 求期望. 又鉴于 $\Delta_t$ 为0-1变量,可进一步将最小化式(8)的问题化简为下面这个最

小化问题:

$$\min L_{\Delta} = \sum_{t=0}^{T-1} (C - \lambda_{n,t} - \mu_{n,t})P(\Delta_t = 1). \quad (11)$$

决策变量 $P(\Delta_t = 1)$ 为在第 $t$ 周需要出车维修路灯的概率. 因为可以证明<sup>[3]</sup>, 无零件故障时不需预防性的出车更换, 所以可知 $P(\Delta_t = 1)$ 的取值范围为

$$\begin{aligned} \max\{r_n^X(t), r_n^Y(t)\} &\leq P(\Delta_t = 1) \leq \\ r_n^X(t) + r_n^Y(t) - r_n^X(t)r_n^Y(t). \end{aligned} \quad (12)$$

由于该子问题的目标函数为线性函数, 最优解在约束的边界上取得. 即

$$P(\Delta_t = 1) = \begin{cases} \max\{r_n^X(t), r_n^Y(t)\}, & \eta_{n,t} \geq 0, \\ r_n^X(t) + r_n^Y(t) - r_n^X(t)r_n^Y(t), & \eta_{n,t} \leq 0, \\ [0, 1] \text{ 区间内任意值}, & \eta_{n,t} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\eta_{n,t} = C - \lambda_{n,t} - \mu_{n,t}$ . 此解含义为只有当乘子 $\lambda_{n,t}$ 与 $\mu_{n,t}$ 之和大于一次出车维修的成本 $C$ 时, 才需要采取联合更换的策略.

### 3.4 更换故障件子问题(Component replacement subproblems)

式(9)和式(10)有同样的结构, 其中随机变量 $X_n(t)$ 和 $Y_n(t)$ 为0-1变量, 因此式(9)和(10)可分别化简为

$$L_n^X = \sum_{t=0}^{T-1} (c^X + \lambda_{n,t})P(X_n(t) = 1), \quad (14)$$

$$L_n^Y = \sum_{t=0}^{T-1} (c^Y + \mu_{n,t})P(Y_n(t) = 1). \quad (15)$$

由约束(2)可知, 更换概率大于相应故障率, 即

$$r_n^X(t) \leq P(X_n(t) = 1), \quad (16)$$

但不会大于两个零件的叠加故障率, 即至少有一个零件故障才会更换, 即

$$P(X_n(t) = 1) \leq r_n^X(t) + r_n^Y(t) - r_n^X(t)r_n^Y(t). \quad (17)$$

考虑一种确定性的更换策略. 在第 $t$ 周已知两个零件是否发生故障的情况下, 是否更换是确定性的. 如没有零件损坏, 两个都不换(如前所述, 可以证明此问题中不需要预防性的更换). 如两个都损坏, 则都更换. 如只有一个零件坏, 则可只更换坏零件, 或两个一起换——此时需要决策的变量为选择何种更换方式. 于是决策变量 $f_n^X(t)$ 可表示为

$$f_n^X(t) = I_{\{X_n(t)=\xi_{n,t}\}}(1 - I_{\{X_n(t)=\max\{\xi_{n,t}, \varepsilon_{n,t}\}\}}) + I_{\{X_n(t)=\max\{\xi_{n,t}, \varepsilon_{n,t}\}\}}, \quad (18)$$

其中:  $I_A$ 为示性函数, 当事件 $A$ 为真时取值为1, 否则为零. 若在第 $t$ 周是否更换泡体只取决于泡体是否发

生故障(即 $X_n(t) = \xi_{n,t}$ ), 则 $f_n^X(t)$ 取0, 以表示这种不借机联合更换的策略; 若只要泡体或控制器中的一个发生了故障, 便借机更换泡体, 这种联合更换策略对应的 $f_n^X(t)$ 取值为1. 就此也可以看出称这种策略为确定性策略的原因——一旦给定了第 $t$ 周采取某个策略 $f$ , 即 $f_n^X(t) = f$ , 则有

$$P[f_n^X(t) = f] = P\{X_n(t) = \max\{\xi_{n,t}, \varepsilon_{n,t}\}\} = I_{\{f=0\}} + (1 - I_{\{f=0\}})I_{\{f=1\}} = 1, \quad (19)$$

将式(18)中决策变量 $f_n^X(t)$ 代入式(19)中可得

$$\begin{aligned} P(X_n(t) = 1) &= \\ I_{f_n^X(t)=0}P(\xi_{n,t} = 1) + I_{f_n^X(t)=1}P(\xi_{n,t} = 1 \text{ 或} \\ \varepsilon_{n,t} = 1) &= \\ [1 - f_n^X(t)]P(\xi_{n,t} = 1) + f_n^X(t)[P(\xi_{n,t} = 1) + \\ P(\varepsilon_{n,t} = 1) - P(\xi_{n,t} = 1)P(\varepsilon_{n,t} = 1)]. \end{aligned} \quad (20)$$

由泡体故障率随点亮时间的数据 $r_n^X(t)$ 可知, 因为该故障率以最近一次更换时间为起始点, 所以定义其最近一次更换时间为

$$t_0 = \max_{0 \leq t' \leq t} X_{n,t'}. \quad (21)$$

由于更换变量 $X_{n,t'}$ 是一个随机变量, 则最近一次的更换时间 $t_0$ 为一随机停时. 则该泡体在第 $t$ 周发生故障的概率如下:

$$\begin{aligned} P(\xi_{n,t} = 1) &= \\ E r_n^X(t - t_0) &= EE[r_n^X(t - t_0) | t_0] = \\ \sum_{t_0=0}^{t-1} P(t_0 = \sup\{\tau : X(\tau) = 1, \tau \leq t - 1\}) \cdot \\ r_n^X(t - t_0). \end{aligned} \quad (22)$$

考察上式中的第2项:

$$\begin{aligned} P(t_0 = \sup\{t : X(t) = 1\}) &= \\ P\{X(\tau) = 0, \tau = 0, \dots, t_0 - 1; X(t_0) = 1\} &= \\ P\{X(t_0) = 1\} \prod_{\tau=0}^{t_0-1} P\{X(\tau) = 0\} &= \\ \{r_n^X(t_0) + [1 - r_n^X(t_0)]r_n^Y(t_0)f_n^X(t_0)\} \cdot \\ \prod_{\tau=0}^{t_0-1} \{[1 - r_n^X(\tau)][1 - r_n^Y(\tau)] + r_n^Y(\tau) \cdot \\ [1 - r_n^X(\tau)][1 - f_n^X(\tau)]\}. \end{aligned} \quad (23)$$

可以看出, 泡体在第 $t$ 周发生故障的概率与之前各周 $\tau = 0, \dots, t - 1$ 的故障发生和更换决策 $f_n^X(\tau)$ 均相关. 方便起见记上式为 $p_X(f_n^X(0), \dots, f_n^X(t_0))$ .

至此, 综合式(20)(22)和(23)泡体的子问题的目标函数(14)可写为

$$L_n^X = \sum_{t=0}^{T-1} (c^X + \lambda_{n,t}) \{ (1 - f_n^X(t))P(\xi_{n,t} = 1) +$$

$$\begin{aligned}
 & f_n^X(t) [P(\xi_{n,t} = 1) + P(\varepsilon_{n,t} = 1) - \\
 & P(\xi_{n,t} = 1)P(\varepsilon_{n,t} = 1)] = \\
 & \sum_{t=0}^{T-1} (c^X + \lambda_{n,t}) \{ \sum_t r_n^X(t - t_0) \cdot \\
 & p_X(f_n^X(0), \dots, f_n^X(t_0)) + f_n^X(t) \cdot \\
 & [ \sum_{t_0=0}^{t-1} r_n^Y(t - t_0) p_Y(f_n^Y(0), \dots, f_n^Y(t_0)) - \\
 & \sum_{t_0=0}^{t-1} r_n^X(t - t_0) p_X(f_n^X(0), \dots, f_n^X(t_0)) \cdot \\
 & \sum_{t_0=0}^{t-1} r_n^Y(t - t_0) p_Y(f_n^Y(0), \dots, f_n^Y(t_0))] \}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

由式(24)看出,  $L_n^X$  中的费用项关于时间段  $t$  是可加的, 因此考虑采用动态规划求解. 但由于各阶段的费用项均涉及到之前的所有阶段的决策  $f_n^X(\tau)$  和  $f_n^Y(\tau)$ ,  $\tau = 0, \dots, t - 1$ , 只有将总费用优化问题写为关于  $t$  可加的各阶段的独立费用优化问题的组合, 才能用前向递归的动态规划求解. 这就需要将每一阶段  $t$  上的决策  $f_n^X(\tau)$  和  $f_n^Y(\tau)$  整理为相互独立的加和形式. 下面就以此为目的进一步整理子问题的目标函数. 泡体子问题  $L_n^Y$  可以以类似的方法来构建.

### 3.5 阶段非可分性及分段次优解(Stage-wise non-decomposability and phase-wise near-optimal policy)

首先, 记

$$\bar{r}_t = [1 - r_n^X(t)][1 - r_n^Y(t)], \quad (25)$$

$$\hat{r}_t = r_n^Y(t)[1 - r_n^X(t)], \quad (26)$$

$$F^X(\tau) = \bar{r}_\tau + \hat{r}_\tau f_n^X(\tau), \quad (27)$$

$$\bar{f}_X(t) = r_n^X(t) + R_t f_n^X(t), \quad (28)$$

则可将式(23)化简为

$$\begin{aligned}
 & p^X(f_n^X(0), \dots, f_n^X(t)) = \\
 & [r_n^X(t) + R_t f_n^X(t)] \prod_{\tau=0}^{t-1} [\bar{r}_\tau + \hat{r}_\tau f_n^X(\tau)] = \\
 & \bar{f}_X(t) \prod_{\tau=0}^{t-1} F^X(\tau). \quad (29)
 \end{aligned}$$

记  $R_t^X = r_n^X(t - t_0)$ , 可将式(24)中相应项化简为

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\tau=0}^{t-1} R_\tau^X p^X(f_n^X(0), \dots, f_n^X(\tau)) = \\
 & \bar{f}_X(t) \sum_{\tau=0}^{t-1} R_\tau^X \prod_{\tau=0}^{t-1} F^X(\tau) = \\
 & \bar{f}_X(t) R_0^X F^X(0) \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 + \frac{R_\tau^X}{R_0^X} F^X(\tau)). \quad (30)
 \end{aligned}$$

类似地, 记  $R_t^Y = r_n^Y(t - t_0)$ , 有

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\tau=0}^{t-1} R_\tau^Y p^Y(f_n^Y(0), \dots, f_n^Y(\tau)) = \\
 & \bar{f}_Y(t) R_0^Y F^Y(0) \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 + \frac{R_\tau^Y}{R_0^Y} F^Y(\tau)). \quad (31)
 \end{aligned}$$

将式(24)化为

$$\begin{aligned}
 L_n^X = & \sum_{t=0}^{T-1} (c^X + \lambda_{n,t}) \{ \sum_{t_0=0}^{t-1} r_n^X(t - t_0) \cdot \\
 & p_X(f_n^X(0), \dots, f_n^X(t_0)) + \\
 & f_n^X(t) \sum_{t_0=0}^{t-1} r_n^Y(t - t_0) p_Y(f_n^Y(0), \dots, f_n^Y(t_0)) \cdot \\
 & [1 - \sum_{t_0=0}^{t-1} r_n^X(t - t_0) p_X(f_n^X(0), \dots, f_n^X(t_0))] = \\
 & \sum_{t=0}^{T-1} (c^X + \lambda_{n,t}) \bar{f}_X(t) R_0^X F^X(0) \cdot \\
 & \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 + \frac{R_\tau^X}{R_0^X} F^X(\tau)) + \sum_{t=0}^{T-1} (c^X + \lambda_{n,t}) \cdot \\
 & f_n^X(t) \bar{f}_Y(t) R_0^Y F^Y(0) \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 + \frac{R_\tau^Y}{R_0^Y} F^Y(\tau)) - \\
 & \sum_{t=0}^{T-1} (c^X + \lambda_{n,t}) f_n^X(t) \bar{f}_Y(t) R_0^Y F^Y(0) \cdot \\
 & \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 + \frac{R_\tau^Y}{R_0^Y} F^Y(\tau)) \bar{f}_X(t) R_0^X F^X(0) \cdot \\
 & \prod_{\tau=0}^{t-1} (1 + \frac{R_\tau^X}{R_0^X} F^X(\tau)), \quad (32)
 \end{aligned}$$

至此, 部件子问题  $L_n^X$  的阶段费用  $C_t$  可写为如下递归形式:

$$\begin{aligned}
 C_t(f_n^X(t)) = & A_t(f_n^X(t)) e^{\lg A_0(f_n^X(0)) + \dots + \lg A_{t-1}(f_n^X(t-1))} + \\
 & B_t(f_n^X(t)) e^{\lg B_0(f_n^X(0)) + \dots + \lg B_{t-1}(f_n^X(t-1))} - \\
 & M_t(f_n^X(t)) e^{\lg M_0(f_n^X(0)) + \dots + \lg M_{t-1}(f_n^X(t-1))}. \quad (33)
 \end{aligned}$$

由贝尔曼最优性原理容易得证下面的命题.

**定理 1** 对于各阶段费用函数  $C_t$  为递归形式, 且关于决策  $d_t$  的目标函数为如下形式的问题:

$$J = \sum_t C_t(C_{t-1}(d_{t-1}), d_t). \quad (34)$$

若有每一阶段费用函数关于前(后)一阶段的费用函数单调, 即

$$\begin{aligned}
 & C_{t-1}(d_{t-1}) \leq C_{t-1}(d'_{t-1}) \Rightarrow \leq \\
 & C_t(C_{t-1}(d_{t-1}), d_t) C_t(C_{t-1}(d'_{t-1}), d_t), \quad (35)
 \end{aligned}$$

则可以用前(后)向动态规划求解.

考查式(33)中各项: 由  $\ln(1 + \frac{R_\tau^X}{R_0^X} F^X(\tau)) \geq 0$  可知, 若  $A_t$  与  $B_t$  为关于  $C_{t-1}$  的单增函数且  $M_t$  为关于  $C_{t-1}$  的单调递减函数, 则  $L_n^X$  的阶段费用  $C_t$  关于前一阶段费用  $C_{t-1}$  单调递增, 满足定理1的条件, 可用前

向动态规划法求解. 遗憾的是, 不存在一个关于 $t$ 的简单条件满足这一条件. 这一点并不难得到直观上的解释: 由故障率统计曲线(图1)的浴盆形状可知, 其初始阶段的高故障率以及前后两段单调性相反的特性, 使得该问题不存在简单的临界条件满足本次更换决策与上次更换时刻无关. 若控制器在某一时刻 $T'$ 因泡体故障而被联合更换比不更换更经济的话, 必有

$$C \int_{T'}^T r_n^X(t-T')dt \geq C \int_{T'}^T r_n^X(t-t_0)dt + c^X + \lambda_{n,t}, \quad (36)$$

其中 $t_0$ 为控制器上一次更换的时间, 如图2所示两个阴影面积. 因此转而寻求子问题的次优解, 以及最优解的下界.

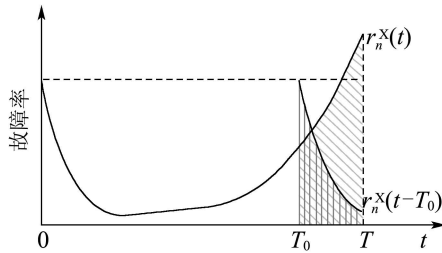


图2 联合更换分段决策的分界点示意图

Fig. 2 Illustration of the cut-off time of the phase-wise joint replacement policy

当 $t \geq t_0 \geq T_0^X$ , 其中 $T_0^X$ 满足

$$T_0^X = \inf \left\{ t : r_n^X(t-t_0) \geq r_n^X(0) + \frac{c^X + \lambda_{n,t}}{C} \right\} \quad (37)$$

时, 联合更换控制器的决策较不更换更优. 由此充分条件可知, 存在一个以 $T_0$ 为界的近优分段策略: 在 $[0, T_0 - 1]$ 不联合更换控制器, 即 $f_n^X(t) = r_n^X(t)$ ; 在 $[T_0, T - 1]$ 联合更换控制器, 即

$$f_n^X(t) = \max \{ r_n^X(t), r_n^Y(t) \}.$$

对于 $t_0 = 0$ 的情况, 即泡体首先发生故障的情况, 任意 $T' \geq T_0$ 都满足(36). 类似地, 对于故障率单调递增的泡体, 也可以得到如此联合更换分段决策的分界点 $T_0^Y$ :

$$T_0^Y = \inf \left\{ t : r_n^Y(t-t_0) \geq r_n^Y(0) + \frac{c^Y + \mu_{n,t}}{C} \right\}. \quad (38)$$

由此分段策略下得到的费用均值为最优服务费用目标函数的一个上界, 而对应于此解的对偶函数值 $q^*$ 为最优服务费用的一个下界.

### 3.6 算法流程及结果讨论(Algorithm and numerical testing results)

在两个子问题当中, 目标函数 $L_n^X$ 和 $L_n^Y$ 均含有另外一个子问题的决策, 所以此问题不可分, 原因是由于两个部件故障率时变, 使得各阶段的决策相关, 继

而导致两个子问题决策具有概率相关性. 采用分段的次优策略解除了两者之间的耦合关系, 进而可以用次梯度法<sup>[10]</sup>按如下步骤求解:

**步骤 1** 初始化. 首先, 将乘子初始值设为 $\lambda_{n,t} = \mu_{n,t} = 0$ .

**步骤 2** 求解零件更换子问题. 取 $t_0 = 0$ , 根据式(37)和(38)分别搜索子问题分界点 $T_0^X$ 和 $T_0^Y$ , 则可得相应的故障率新曲线 $r_n^{X(k)}(t - T_0^X I_{\{t \geq T_0^X\}})$ 与 $r_n^{Y(k)}(t - T_0^Y I_{\{t \geq T_0^Y\}})$ ; 根据第3.4节计算当前决策下的子问题的函数值 $L_n^X$ 及相应的 $L_n^Y$ .

**步骤 3** 求解出车维修子问题. 根据式(13)求解出车子问题 $P(\Delta_t = 1)$ .

**步骤 4** 更新乘子. 计算次梯度如下:

$$g_X^{(k)} = r_n^{X(k)}(t - T_0^X I_{\{t \geq T_0^X\}}) - P(\Delta_t^{(k)} = 1), \quad (39)$$

$$g_Y^{(k)} = r_n^{Y(k)}(t - T_0^Y I_{\{t \geq T_0^Y\}}) - P(\Delta_t^{(k)} = 1). \quad (40)$$

按下式更新乘子:

$$\lambda_{n,t}^{k+1} = \lambda_{n,t}^{(k)} + \alpha^{(k)} g_X^{(k)}, \quad (41)$$

$$\mu_{n,t}^{k+1} = \mu_{n,t}^{(k)} + \alpha^{(k)} g_Y^{(k)}. \quad (42)$$

其中步长为

$$\alpha^{(k)} = \frac{\gamma(q^* - q^{(k)})}{\|g_X^{(k)}\|^2 + \|g_Y^{(k)}\|^2}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (43)$$

其中乘子的初始值采用最优乘子的临界值设置法<sup>[3]</sup>, 即令

$$\lambda_{n,t}^* = \frac{c^X C}{c^X + c^Y}, \quad \mu_{n,t}^* = \frac{c^Y C}{c^X + c^Y}, \quad (44)$$

将其代入式(37)和(38)则可得 $q^*$ .

**步骤 5** 判断停止准则. 若不满足停止条件(收敛或到达最大迭代次数), 则更新乘子并返回步骤2.

暂时不考虑部件可回收部分的价值残余及维修, 按某厂实际成本项给出参数 $c^X = 125$ ,  $c^Y = 45$ ,  $C = 18550$ . 目前 $N = 5000$ 盏灯, 两类部件的故障各自为独立同分布. 若将每盏灯单独建模, 则分解后将得到5000个完全相同的控制器子问题和5000个完全相同的泡体子问题. 因此可将5000盏灯的两个部件分别作为一个整体建模, 其总体故障率 $r^X(t)$ 与 $r^Y(t)$ 可依下式分别估计:

$$r^{X/Y}(t) \approx 1 - (1 - r_n^{X/Y}(t))^N. \quad (45)$$

将5000盏路灯的器件故障率建模为总体故障率 $r^X(t)$ 与 $r^Y(t)$ 后, 上述优化模型中 $N = 1$ , 故式中变量下标 $n$ 可以省略, 此时得到的费用估计为实际费用的下界.

依上述步骤, PLR在9次迭代停止更新, 得到分段策略下的最优费用为5年共计4873836元, 平均每年974767.2元, 并有下界为5年3866290元, 平均每

年773258元. 依据该结果, 在5年的维护服务中用于5000盏路灯的期望维护成本可以做到每年不高于100万. 即使在无法得到最优策略的情况下, 分段策略的维护成本表明现行批次更换每年约370万的实际费用仍有大幅缩减空间.

#### 4 结论(Conclusion)

针对合同期内路灯维修总费用优化问题, 本文提供了有限阶段内联合更换随机策略模型及相应的概率分布拉格朗日松弛方法(PLR). 模型对部件故障率分布无特殊假设, 可直接利用部件的故障统计数据; 对策略结构亦无周期性或平稳性的假设, 可直接优化非平稳策略. 概率分布拉格朗日松弛算法中所需的乘子数目与问题规模(阶段数目、部件个数)成线性关系, 不随随机样本个数增加而增加.

对于一盏路灯的多个部件, 其联合更换策略可通过分解为相应子问题迭代求解. 对于实际问题中部件故障率随时间变化的情况, 给出了分段策略最优的充分条件及求解分段点的方法. 对于 $N(N = 5000)$ 个相同规格的路灯,  $2N$ 个子问题中 $N$ 个相同部件的子问题完全相同, 因而可合并处理, 采用将独立同分布的部件建模为一个串行系统, 仍通过分解为两个子问题寻优, 其故障率分别为相应的串行系统的故障率. 该转化后的模型下所求得最优策略下的费用为转化前 $2N$ 个子问题对应最优费用的下界, 在无联合更换, 只有故障更换决策的情况下两模型所得最优费用期望值相等. 实际数据的测试表明迭代过程以较少的步数即可得到近优解, 该解较现行策略有大幅度改善.

所得近优解与下界的对偶间距表明, 通过改进PLR算法仍有可能进一步改善策略性能. 后续研究中, 有待基于一般性的问题及参数, 对PLR方法进行更充分的测试、比较与改进.

#### 参考文献(References):

- [1] 郗书堂. 路灯[M]. 北京: 中国电力出版社, 2008. (XI Shutang. *Street Lamps*[M]. Beijing: China Electric Power Press, 2008.)
- [2] THOMAS M U, RAO S S. Warranty economic decision models: a summary and some suggested directions for future research[J]. *Operations Research*, 1999, 47(6): 807 – 820.

- [3] 涂国煜. 拉格朗日松弛方法的随机扩展及在服务策略优化上的应用[D]. 北京: 清华大学, 2010. (TU Guoyu. *Lagrangian relaxation for service policy optimization with uncertainties*[D]. Beijing: Tsinghua University, 2010.)
- [4] NOWAKOWSKI T, WERBINKA S. On problems of multicomponent system maintenance modelling[J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2009, 6(4): 364–378.
- [5] BAI J, PHAM H. Cost analysis on renewable full-service warranties for multi-component systems[J]. *European Journal of Operational Research*, 2006, 168(2): 492 – 508.
- [6] FREES E W, NAM S H. Approximating expected warranty costs[J]. *Management Science*, 1988, 34(12): 1441 – 1449.
- [7] LAI M T, CHEN Y C. Optimal periodic replacement policy for a two-unit system with failure rate interaction[J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2006, 29(3): 367 – 371.
- [8] XIA L, ZHAO Q C, JIA Q S. A structure property of optimal policies for maintenance problems with safety-critical components[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2008, 5(3): 519 – 531.
- [9] ÖZEKICI S. Optimal periodic replacement of multicomponent reliability systems[J]. *Operations Research*, 1988, 36(4): 542 – 552.
- [10] BERTSEKAS D P, NEDIĆ A, OZDAGLAR A E. *Convex Analysis and Optimization*[M]. Nashua, American: Athena Scientific, 2003.
- [11] FISHER M L. The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems[J]. *Management Science(Ten Most Influential Titles of "Management Science's" First Fifty Years)*, 2004, 50(12): 1861 – 1871.
- [12] ROCKAFELLAR R T, WETS R J. Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1991, 16(1): 119 – 147.
- [13] NOWAK M P, RÖMISCH W. Stochastic Lagrangian relaxation applied to power scheduling in a hydro-thermal system under uncertainty[J]. *Annals of Operations Research*, 2000, 100(1): 251 – 272.
- [14] CARPENTIER P, COHEN G, CULIOLI J C, et al. Stochastic optimization of unit commitment: a new decomposition framework[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 1996, 11(2): 1067 – 1073.
- [15] TU G Y, LUH P B, ZHAO Q C, et al. An optimization method for joint replacement decisions in maintenance[C] // *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2004, 4: 3674 – 3679.

#### 作者简介:

涂国煜 (1980—), 女, 博士研究生, 目前研究方向为复杂系统建模与随机策略优化, E-mail: guoyu.tu@gmail.com;

宋士吉 (1956—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向包括复杂网络不确定性系统的建模、优化与控制、供需链网络系统的库存管理与路径优化调度、大型复杂生产制造过程智能优化与调度、不确定环境下软计算技术及在大洋信息处理中应用等, E-mail: shijis@mail.tsinghua.edu.cn.