

## 采用幂次趋近律的滑模控制稳态误差界

李 鹏, 马建军, 郑志强

(国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073)

**摘要:** 对一类不确定非线性系统采用幂次趋近律的滑模跟踪控制, 分别推导了采用Slotine形式的传统滑模面和积分滑模面时的稳态跟踪误差的界. 首先, 基于Lyapunov方法求出了滑模误差的最终界和系统不确定性、幂次趋近律参数之间定量的数学关系. 其次, 利用有界输入有界输出稳定的方法, 分别求出了采用Slotine形式的传统滑模面和积分滑模面时滑模误差界与稳态误差界之间定量的数学关系. 最后, 综合得到了稳态跟踪误差界的数学表达式, 并且根据给定的稳态跟踪误差要求, 设计出适合的幂次趋近律来抑制抖振. 仿真算例验证了上述理论结果的正确性.

**关键词:** 非线性系统; 滑模控制; 幂次趋近律; 稳态误差界

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Sliding mode control approach based on nonlinear integrator

LI Peng, MA Jian-jun, ZHENG Zhi-qiang

(College of Mechatronics Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China.)

**Abstract:** For the sliding mode tracking control of a class of uncertain nonlinear systems using power rate reaching law, the steady-state error bounds are respectively derived when using the Slotine-form conventional sliding surface and the integral sliding surface. Mathematical relations among the sliding error bounds, system uncertainties, and parameters of the power rate reaching law are investigated by means of the Lyapunov method. Based on the BIBO stability, the relationship between the steady-state error bounds and the sliding error bounds is obtained. Finally, the mathematical expressions of the steady state tracking error bounds are derived. Moreover, for the specified steady-state error bounds, an appropriate power rate reaching law to suppress the chattering is designed. Simulation results are given and the validity of the conclusions is confirmed.

**Key words:** nonlinear system; sliding mode control; power rate reaching law; steady-state error bounds

### 1 引言(Introduction)

滑模控制方法本质上是一类特殊的非线性控制, 其非线性表现为控制的不连续性. 但在实际系统中, 由于切换装置不可避免地存在惯性等因素, 因而导致实际的滑动模态不是准确地发生在滑模面上, 容易引起系统的剧烈抖振, 从而成为它在实际应用中的一大障碍. 为了抑制抖振, 国内外学者提出了一些有效的方法<sup>[1]</sup>, 其中我国学者高为炳院士提出了趋近律的概念<sup>[2,3]</sup>. 现有的趋近律主要有: 等速趋近律、指数趋近律、幂次趋近律和一般趋近律, 其中幂次趋近律是连续的, 从而抑制了抖振, 因此得到广泛使用, 并出现了一些改进型的幂次趋近律<sup>[4~6]</sup>. 然而, 在系统不确定性或外界扰动存在时, 采用幂次趋近律会有稳态跟踪误差. 稳态跟踪误差界的求取受到了国内外学者的广泛关注, 取得了一些研究成果<sup>[7~10]</sup>: 1) 当采用Slotine形式的传统滑模面时,

文献[7]利用串联一系列一阶低通滤波器的思想, 得到了系统稳态跟踪误差的界和滑模误差界的关系, 其结论被文献[11~13]用来分析所设计控制器的跟踪精度; 文献[8]采用逐次积分的方法求取了三阶系统的零阶稳态跟踪误差界和滑模误差界的关系; 文献[9]采用逐次积分的方法求得了 $n$ 阶系统的稳态跟踪误差界和滑模误差界的关系. 2) 当采用Slotine形式的积分滑模面时, 文献[8, 10]采用逐次积分的方法求取了三阶系统的零阶稳态跟踪误差界和滑模误差界的关系.

本文针对一类 $n$ 阶不确定非线性系统采用幂次趋近律的滑模跟踪控制问题, 首先基于Lyapunov方法得到了滑模误差界和系统不确定性、幂次趋近律参数之间的数学关系, 再利用有界输入有界输出稳定的方法, 分别推导了采用Slotine形式传统滑模面和积分滑模面时的系统稳态跟踪误差界与滑模误差

界之间的数学关系,并与文献[7~10]的结果进行了比较,最后,综合得到了系统稳态跟踪误差界的数学表示.进一步,给定稳态跟踪误差要求,可通过设计适合的幂次趋近律参数来保证.

## 2 问题的提出(Problem statement)

考虑下面一类 $n$ 阶不确定非线性系统:

$$\dot{x}^{(n)} = f(x) + b(x)u. \quad (1)$$

式中:  $x^{(n)}$ 为 $x$ 关于时间 $t$ 的 $n$ 阶导数,  $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \cdots \ x^{(n-1)}]^T$ 为系统状态向量,  $u$ 为控制输入,且 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为未知非线性函数.对系统(1)作如下假设.

**假设 1** 函数 $\hat{f}$ 为 $f$ 的估计,且估计误差 $\Delta f = f - \hat{f}$ 有界,即 $|\Delta f| \leq M, M > 0$ .  $b(x)$ 为已知函数,且 $b(x) > 0$ .

**假设 2** 系统的状态向量 $\mathbf{x}$ 是可观测的.

控制目标要求系统状态跟踪预先设定的参考向量 $\mathbf{x}_d = [x_d \ \dot{x}_d \ \cdots \ x_d^{(n-1)}]^T$ .

## 3 传统滑模控制(Conventional sliding mode control)

定义 $\tilde{x} = x - x_d$ 为变量 $x$ 的跟踪误差,  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [\tilde{x} \ \dot{\tilde{x}} \ \cdots \ \tilde{x}^{(n-1)}]^T$ 为跟踪误差向量. Slotine形式的传统滑模面定义如下<sup>[7]</sup>:

$$s(\tilde{\mathbf{x}}) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1} \tilde{x}, \quad (2)$$

式中 $\lambda > 0$ ,写成向量的形式为

$$s(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}^T, \quad (3)$$

其中:  $\mathbf{c} = [C_{n-1}^{n-1}\lambda^{n-1} \ \cdots \ C_{n-1}^1\lambda \ C_{n-1}^0]$ ,  $C_{n-1}^i$ 为二项式系数,即

$$C_{n-1}^i = \frac{(n-1)!}{(n-i-1)!i!}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1. \quad (4)$$

由上式可知 $C_{n-1}^0 = 1$ ,为了简便, $s$ 对 $t$ 的导数可写成以下形式:

$$\dot{s} = \mathbf{c}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^T = \tilde{x}^{(n)} + \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}^T, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{c} = [0 \ C_{n-1}^{n-1}\lambda^{n-1} \ \cdots \ C_{n-1}^1\lambda]$ .对系统(1)设计的滑模控制律由等效控制 $u_{eq} = b^{-1}(-\hat{f} + x_d^{(n)} - \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}^T)$ 和幂次趋近律项 $-K|s|^\alpha \text{sgn } s$ 组成,即

$$u = b^{-1}(-\hat{f} + x_d^{(n)} - \mathbf{c}\tilde{\mathbf{x}}^T) - K|s|^\alpha \text{sgn } s, \quad (6)$$

其中 $K > 0, 0 < \alpha < 1$ ,符号函数 $\text{sgn } s$ 定义如下:

$$\text{sgn } s = \begin{cases} -1, & s < 0, \\ 0, & s = 0, \\ 1, & s > 0. \end{cases} \quad (7)$$

将式(6)和式(1)代入式(5),得

$$\dot{s} = \Delta f - K|s|^\alpha \text{sgn } s. \quad (8)$$

当 $\Delta f = 0$ 时,利用文献[14,15]中的结论,采用变量替换可求得上式的解为

$$s(t) = \begin{cases} \text{sgn}(s_0)(|s_0|^{1-\alpha} - K(1-\alpha)t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, & 0 \leq t \leq \frac{|s_0|^{1-\alpha}}{K(1-\alpha)}, \\ 0, & t > \frac{|s_0|^{1-\alpha}}{K(1-\alpha)}. \end{cases} \quad (9)$$

式中 $s_0$ 是 $s$ 的初值.可见,系统状态可以在有限时间内到达滑模面.而当 $\Delta f \neq 0$ ,即系统存在不确定性时,滑模变量不能达到零,滑模误差的最终界由下述定理1给出.

**定理 1** 当系统(1)受到扰动,且 $|\Delta f| \leq M$ ,若采用控制律(6),则当 $t \rightarrow +\infty$ 时,有

$$|s| \leq \left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (10)$$

**证** Lyapunov分析可用于说明式(8)的解的有界性,即使在原点处无平衡点.由 $V = s^2/2$ 出发,计算 $V$ 沿式(8)的导数,得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} = s(\Delta f - K|s|^\alpha \text{sgn } s) \\ &= -K|s|^{1+\alpha} + s\Delta f \leq -|s|(K|s|^\alpha - |\Delta f|). \end{aligned} \quad (11)$$

不等式的右边不是负定的,但在 $\{|s| \leq (M/K)^{\frac{1}{\alpha}}\}$ 之外 $\dot{V}$ 是负的,由 $c > \frac{1}{2}(M/K)^{\frac{2}{\alpha}}$ 可知始于 $\{V \leq c\}$ 内的解在未来时刻都保持在其内,因为 $\dot{V}$ 在边界 $V = c$ 上是负的.因此,解是一致有界的.而且,如果取任意数 $\varepsilon$ 满足 $(M/K)^{\frac{2}{\alpha}} < \varepsilon < c$ ,则 $\dot{V}$ 在 $\{\varepsilon \leq V \leq c\}$ 内为负,这说明在此集合内, $V$ 单调递减直到解进入 $\{V \leq \varepsilon\}$ 内.从那一时刻起,解将不再离开 $\{V \leq \varepsilon\}$ ,因为 $\dot{V}$ 在边界 $V = \varepsilon$ 上为负.因此可得,解是一致最终有界的,又因为 $\varepsilon$ 的取值可以无限接近 $(M/K)^{\frac{2}{\alpha}}$ ,故 $t \rightarrow +\infty$ 时有 $|s| \leq (M/K)^{\frac{1}{\alpha}}$ . 证毕.

当系统的状态远离滑模面时,幂次趋近律的趋近速度较慢,因此出现了一些改进型的幂次趋近律.文献[5]提出了一种快速终端滑模型趋近律,其形式如下:

$$\dot{s} = -K_1 s - K_2 |s|^\alpha \text{sgn } s, \quad (12)$$

式中:  $K_1 > 0, K_2 > 0, 0 < \alpha < 1$ .由上式可知,快速终端滑模模型趋近律本质上是由指数趋近律和幂次趋近律的结合.文献[6]提出了一种双幂次趋近律,其形式如下:

$$\dot{s} = -K_1 |s|^\beta \text{sgn } s - K_2 |s|^\alpha \text{sgn } s, \quad (13)$$

式中:  $K_1 > 0, K_2 > 0, 0 < \alpha < 1, \beta > 1$ .上述两种改进型的幂次趋近律均以 $s = 1$ 为界限,将系统从初始状态到达滑模面的过程分成两个阶段,式(12)(13)中右边两项分别加快两个阶段的趋近速度.当系统状态远离滑模面时,其趋近速度主要取决于式(12)(13)中右边第1项,而系统状态接近滑模面时,其趋近速度主要取决于式(12)(13)中右边第2项.

下述定理2给出了当 $\Delta f \neq 0$ , 采用改进型幂次趋近律(12)(13)时, 滑模误差的最终界。

**定理 2** 当系统(1)受到扰动, 且 $|\Delta f| \leq M$ , 若采用改进型幂次趋近律(12)(13), 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 分别有:

$$|s| \leq \min\left(\left(\frac{M}{K_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{M}{K_1}\right), \quad (14)$$

$$|s| \leq \min\left(\left(\frac{M}{K_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{M}{K_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right). \quad (15)$$

**证** 当采用快速终端滑模模型趋近律(12)时, 有

$$\dot{s} = \Delta f - K_1 s - K_2 |s|^\alpha \operatorname{sgn} s. \quad (16)$$

考虑Lyapunov函数 $V = s^2/2$ , 对 $V$ 沿式(16)求导, 得

$$\dot{V} = -K_1 |s|^2 - K_2 |s|^{1+\alpha} + s \Delta f. \quad (17)$$

进一步, 可以将上式写成以下两种形式:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -K_1 |s|^2 - K_2 |s|^{1+\alpha} + |s| |\Delta f| = \\ &-K_1 |s|^2 - |s| (K_2 |s|^\alpha - |\Delta f|), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -K_1 |s|^2 - K_2 |s|^{1+\alpha} + |s| |\Delta f| = \\ &-K_2 |s|^{1+\alpha} - |s| (K_1 |s| - |\Delta f|). \end{aligned} \quad (19)$$

针对式(18)和式(19), 采用与定理1相同的证明思路, 可以得到: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$|s| \leq \min\left(\left(\frac{M}{K_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{M}{K_1}\right). \quad (20)$$

同理可证, 采用双幂次趋近律(13)时, 当 $t \rightarrow +\infty$ 有

$$|s| \leq \min\left(\left(\frac{M}{K_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \left(\frac{M}{K_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right). \quad (21)$$

证毕。

根据滑模面的定义式(2), 可以由滑模误差的最终界推导出稳态跟踪误差的界, 定理3给出了结论。

**定理 3** 对于传统滑模面(2), 若 $|s| \leq \phi$ ,  $\phi$ 为正常数, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 稳态跟踪误差满足

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \begin{cases} \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}, & i = 0, \\ \frac{2^i (n-i-1)^{n-i-1} \phi}{\lambda^{n-i-1} (n-i-1)! e^{n-i-1}}, & i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (22)$$

式中 $e$ 为自然指数。

**证** 对式(2)进行Laplace变换可得

$$\tilde{x}(p) = \frac{1}{(p+\lambda)^{n-1}} s(p), \quad (23)$$

式中 $p$ 为Laplace算子。令

$$H_0(p) = \frac{1}{(p+\lambda)^{n-1}},$$

显然 $H_0(p)$ 是有界输入有界输出稳定的, 其输出脉冲响应为 $h_0(t) = t^{n-2} e^{-\lambda t} / (n-2)!$ , 当 $t \geq 0$ 时, 显然有

$h_0(t) \geq 0$ 。因为要求稳态跟踪误差, 可忽略初始状态的影响, 对于任意有界输入 $s$ ,  $H_0(p)$ 的零状态响应为

$$\tilde{x} = \int_0^{+\infty} h_0(\tau) s(t-\tau) d\tau. \quad (24)$$

上式两边取绝对值有

$$\begin{aligned} |\tilde{x}| &\leq \int_0^{+\infty} |h_0(\tau)| |s(t-\tau)| d\tau \leq \\ &\phi \int_0^{+\infty} |h_0(\tau)| d\tau = \phi \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{n-2} e^{-\lambda \tau}}{(n-2)!} d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

利用含有自然指数函数的积分公式

$$\int z^n e^{ax} dz = \frac{1}{a} z^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int z^{n-1} e^{ax} dz,$$

可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tau^{n-2} e^{-\lambda \tau}}{(n-2)!} d\tau = \frac{1}{\lambda^{n-1}}, \quad (26)$$

所以系统(1)的零阶稳态跟踪误差 $\tilde{x}$ 的界为

$$|\tilde{x}| \leq \frac{\phi}{\lambda^{n-1}}.$$

下面推导一阶稳态跟踪误差 $\dot{\tilde{x}}$ 的界, 由式(23)得

$$\dot{\tilde{x}}(p) = \frac{p}{(p+\lambda)^{n-1}} s(p). \quad (27)$$

令 $H_1(p) = \frac{p}{(p+\lambda)^{n-1}}$ ,  $H_1(p)$ 是有界输入有界输出稳定的, 分两种情况进行讨论。

1) 当 $n = 2$ 时,

$$\dot{\tilde{x}}(p) = \frac{p}{p+\lambda} s(p) = \left(1 - \frac{\lambda}{p+\lambda}\right) s(p),$$

这意味着

$$|\dot{\tilde{x}}| \leq 2\phi. \quad (28)$$

2) 当 $n \geq 3$ 时,  $H_1(p)$ 的输出脉冲响应为

$$h_1(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{n-2} t\right) \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} e^{-\lambda t}.$$

若 $t \leq \frac{n-2}{\lambda}$ , 则 $h_1(t) \geq 0$ ; 若 $t > \frac{n-2}{\lambda}$ , 则 $h_1(t) < 0$ 。

对于任意有界输入 $s$ ,  $H_1(p)$ 的零状态响应为

$$\dot{\tilde{x}} = \int_0^{+\infty} h_1(\tau) s(t-\tau) d\tau. \quad (29)$$

上式两边取绝对值有

$$\begin{aligned} |\dot{\tilde{x}}| &\leq \int_0^{+\infty} |h_1(\tau)| |s(t-\tau)| d\tau \leq \\ &\phi \int_0^{+\infty} |h_1(\tau)| d\tau \leq \\ &\phi \int_0^{\frac{n-2}{\lambda}} \left(1 - \frac{\lambda}{n-2} \tau\right) \frac{\tau^{n-3}}{(n-3)!} e^{-\lambda \tau} d\tau + \\ &\int_{\frac{n-2}{\lambda}}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n-2} \tau - 1\right) \frac{\tau^{n-3}}{(n-3)!} e^{-\lambda \tau} d\tau = \\ &2\phi \int_0^{\frac{n-2}{\lambda}} \left(1 - \frac{\lambda}{n-2} \tau\right) \frac{\tau^{n-3}}{(n-3)!} e^{-\lambda \tau} d\tau = \end{aligned}$$

$$2\phi \left( \int_0^{\frac{n-2}{\lambda}} \frac{\tau^{n-3}}{(n-3)!} e^{-\lambda\tau} d\tau + \frac{1}{(n-2)!} [\tau^{n-2} e^{-\lambda\tau}]_0^{\frac{n-2}{\lambda}} - \int_0^{\frac{n-2}{\lambda}} \frac{\tau^{n-3}}{(n-3)!} e^{-\lambda\tau} d\tau \right) = \frac{2(n-2)^{n-2}\phi}{\lambda^{n-2}(n-2)!e^{n-2}} \quad (30)$$

由于 $0! = 1$ 和 $0^0 = 1$ ,  $n = 2$ 时也可以用式(22)表示。同理可证,  $i$ 阶稳态跟踪误差 $\tilde{x}^{(i)}$ 的界为

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \frac{2^i \phi}{\lambda^{n-i-1}} \cdot \frac{(n-i-1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!e^{n-i-1}} \quad (31)$$

证毕。

**注1** 文献[7]中利用串联一阶低通滤波器的思想求出稳态跟踪误差的界和滑模误差的界的关系为

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \frac{2^i \phi}{\lambda^{n-i-1}} \quad (32)$$

由Maclaurin公式可得

$$e^{n-i-1} = 1 + (n-i-1) + \frac{(n-i-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(n-i-1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} + \frac{(n-i-1)^{n-i}}{(n-i)!} + \dots \quad (33)$$

由上式可知

$$e^{n-i-1} \geq \frac{(n-i-1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} \quad (34)$$

当 $i = n-1$ 时等号成立。由上式可得

$$\frac{(n-i-1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!e^{n-i-1}} \leq 1 \quad (35)$$

对比式(32)和式(22), 并由式(35)可知式(22)对稳态跟踪误差的界描述比式(32)更精确。文献[8]的附录中采用逐次积分法推导出三阶系统的零阶稳态跟踪误差的界 $|\tilde{x}| \leq \frac{\phi}{\lambda^2}$ , 和式(22)中 $n = 3, i = 0$ 的情形一致。文献[9]中采用逐步积分法求得了稳态跟踪误差的界为:

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \frac{s_i \phi}{\lambda^{n-i-1}} \quad (36)$$

$$s_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 1 + \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} s_j, & i = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (37)$$

采用数学归纳法可以证明

$$\frac{2^i \phi}{\lambda^{n-i-1}} \cdot \frac{(n-i-1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!e^{n-i-1}} \leq \frac{s_i \phi}{\lambda^{n-i-1}},$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ 。故式(22)对稳态跟踪误差的界的描述亦比式(36)更精确。

由定理1~3, 可以得到当采用幂次趋近律、终端滑模趋近律和双幂次趋近律时, 系统的稳态跟踪误差界分别为:

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \begin{cases} \frac{\phi_1}{\lambda^{n-1}}, & i = 0, \\ \frac{2^i (n-i-1)^{n-i-1} \phi_1}{\lambda^{n-i-1} (n-i-1)! e^{n-i-1}}, & i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (38)$$

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \begin{cases} \frac{\min(\phi_2, \phi_3)}{\lambda^{n-1}}, & i = 0, \\ \frac{2^i (n-i-1)^{n-i-1} \min(\phi_2, \phi_3)}{\lambda^{n-i-1} (n-i-1)! e^{n-i-1}}, & i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (39)$$

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \begin{cases} \frac{\min(\phi_2, \phi_4)}{\lambda^{n-1}}, & i = 0, \\ \frac{2^i (n-i-1)^{n-i-1} \min(\phi_2, \phi_4)}{\lambda^{n-i-1} (n-i-1)! e^{n-i-1}}, & i = 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (40)$$

式(38)~(40)中:  $\phi_1 = (M/K)^\frac{1}{\alpha}$ ,  $\phi_2 = (M/K_2)^\frac{1}{\alpha}$ ,  $\phi_3 = M/K_1$ ,  $\phi_4 = (M/K_1)^\frac{1}{\beta}$ 。根据式(38)~(40), 由给定的稳态跟踪误差要求, 便可设计合适的趋近律参数。

#### 4 积分滑模控制(Integral sliding mode control)

对于系统(1), Slotine形式的传统积分滑模面定义如下<sup>[7]</sup>:

$$s(\tilde{x}) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^n \int_0^t \tilde{x} d\tau \quad (41)$$

$s$ 关于 $t$ 的导数可写成以下形式:

$$\dot{s} = \tilde{x}^{(n)} + \bar{\mathbf{c}}' \tilde{\mathbf{x}}^T \quad (42)$$

其中 $\bar{\mathbf{c}}' = [C_n^n \lambda^n \ C_n^{n-1} \lambda^{n-1} \ \dots \ C_n^1 \lambda]$ 。根据滑模面的定义式(41), 可以由滑模误差的最终界推导出稳态跟踪误差的界, 下述定理4给出了结论。

**定理4** 对于传统积分滑模面(41), 若 $|s| \leq \phi$ ,  $\phi$ 为正常数。则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 稳态跟踪误差界为

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \frac{2^{i+1} (n-i-1)^{n-i-1} \phi}{\lambda^{n-i-1} (n-i-1)! e^{n-i-1}}, \quad (43)$$

式中 $e$ 为自然指数。

定理4的证明思路和定理3相同, 略。

**注2** 文献[8]中的附录以及文献[10]中的引理1均采用逐次积分的方法, 推导出 $n = 3$ 时的积分滑模控制的零阶稳态跟踪误差 $\tilde{x}$ 的界与滑模误差界 $\phi$ 的关系为 $|\tilde{x}| \leq \frac{2\phi}{\lambda^2}$ , 而由定理4确定的零阶稳态跟踪误差 $\tilde{x}$ 的界为 $|\tilde{x}| \leq \frac{2\phi}{\lambda^2} \cdot \frac{2}{e^2}$ , 显然, 定理4中对零阶稳态跟踪误差 $\tilde{x}$ 的界与滑模误差界 $\phi$ 之间的关系描述得更精确。

控制律 $u$ 由等效控制项 $u_{eq}$ 和幂次趋近律项构成, 等效控制项如下:

$$u_{eq} = b^{-1} (-\hat{f} + x_d^{(n)} - \bar{\mathbf{c}}' \tilde{\mathbf{x}}^T) \quad (44)$$

由定理1, 2和4, 可以得到当采用幂次趋近律、终端滑模趋近律和双幂次趋近律时, 系统的稳态跟踪误差界分别为:

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \frac{2^{i+1} (n-i-1)^{n-i-1} \phi_1}{\lambda^{n-i-1} (n-i-1)! e^{n-i-1}}, \quad (45)$$



$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \frac{2^{i+1}(n-i-1)^{n-i-1} \min(\phi_2, \phi_3)}{\lambda^{n-i-1}(n-i-1)!e^{n-i-1}}, \quad (46)$$

$$|\tilde{x}^{(i)}| \leq \frac{2^{i+1}(n-i-1)^{n-i-1} \min(\phi_2, \phi_4)}{\lambda^{n-i-1}(n-i-1)!e^{n-i-1}}. \quad (47)$$

式(45)~(47)中:  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ 和 $\phi_4$ 的定义与式(38)~(40)中的相同. 故采用积分滑模面(41)时, 由给定的稳态跟踪误差要求, 亦可设计合适的趋近律参数.

### 5 仿真算例(Simulation example)

在本算例中仅考虑了采用幂次趋近律时, 由给定的稳态跟踪误差要求, 来设计合适的趋近律参数. 若采用快速终端滑模型趋近律或双幂次趋近律, 其趋近律参数的设计是类似的.

考虑如下三阶非线性系统:

$$x^{(3)} = -(1+0.25 \sin t)x^2 + 2\dot{x} + 4 + \sin(2t) + u,$$

控制的目标是使系统的状态向量 $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \ddot{x}]^T$ 跟踪预先设定的参考向量 $\mathbf{x}_d = [\sin t \ \cos t \ -\sin t]^T$ , 且要求系统的零阶跟踪误差 $\tilde{x}$ 满足 $|\tilde{x}| \leq 0.1$ , 一阶稳态跟踪误差 $|\dot{\tilde{x}}| \leq 0.15$ , 设 $\hat{f}(x) = -x^2 + 2\dot{x}$ ,  $b(x) = 1$ , 则有

$$|\Delta f| = |-0.25x^2 \sin t + \sin 2t + 4| \leq M = 5.25.$$

系统的初始值为 $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 1$ , 分两种情形进行仿真.

**情形 1** 采用传统滑模面

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^2 \tilde{x} = \ddot{\tilde{x}} + 2\lambda\dot{\tilde{x}} + \lambda^2 \tilde{x},$$

按照式(6)设计滑模控制律

$$u = x^2 - 2\dot{x} + x_d^{(3)} - 2\lambda\ddot{\tilde{x}} - \lambda^2\dot{\tilde{x}} - K|s|^\alpha \operatorname{sgn} s.$$

根据给定的稳态跟踪误差 $|\tilde{x}| \leq 0.1$ 和 $|\dot{\tilde{x}}| \leq 0.15$ 的要求, 由式(38)得

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0.1, \\ \frac{2}{\lambda e} \left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0.15. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{3e}{4}, \\ K = \frac{8^\alpha M}{0.45^\alpha e^{2\alpha}}. \end{cases}$$

取 $\alpha = 0.5$ , 将 $M = 5.25$ 代入上式得

$$K = \frac{8^\alpha M}{0.45^\alpha e^{2\alpha}} = \frac{22.136}{e}.$$

仿真结果如图1~3所示. 图1, 2分别为系统的零阶和一阶跟踪误差, 图3为控制输入信号.

从图1, 2可见, 系统的零阶和一阶稳态跟踪误差满足预先设定的 $|\tilde{x}| \leq 0.1$ 和 $|\dot{\tilde{x}}| \leq 0.15$ 的要求. 图3中的控制输入没有高频抖振, 其波动是周期性扰动引起的, 不是本方法的属性. 若采用文献[7~9]的方法确定稳态跟踪误差界有 $|\tilde{x}| \leq \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0.1$ ,  $|\dot{\tilde{x}}| \leq \frac{2}{\lambda} \left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0.407$ , 可见本文得到的一阶稳态跟踪误差界更准确, 这和注1中的分析是一致的.

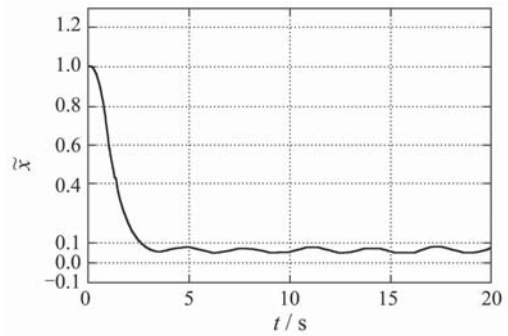


图 1 零阶跟踪误差曲线(情形 1)

Fig. 1 Plot of zero order tracking error(case 1)

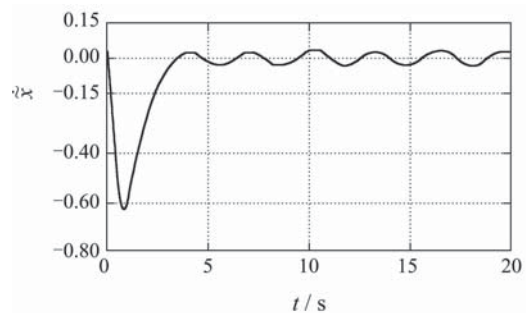


图 2 一阶跟踪误差曲线(情形 1)

Fig. 2 Plot of first order tracking error(case 1)

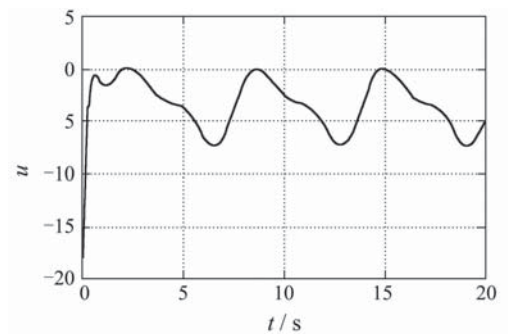


图 3 控制输入曲线(情形 1)

Fig. 3 Plot of control input signal(case 1)

**情形 2** 采用积分滑模面

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^3 \int_0^t \tilde{x} d\tau = \ddot{\tilde{x}} + 3\lambda\dot{\tilde{x}} + 3\lambda^2\tilde{x} + \lambda^3 \int_0^t \tilde{x} d\tau,$$

按照等效控制项和幂次趋近律项设计的控制律 $u$ 为

$$u = x^2 - 2\dot{x} + x_d^{(3)} - 3\lambda\ddot{\tilde{x}} - 3\lambda^2\dot{\tilde{x}} - \lambda^3\tilde{x} - K|s|^\alpha \operatorname{sgn} s.$$

根据给定的稳态跟踪误差 $|\tilde{x}| \leq 0.1$ 和 $|\dot{\tilde{x}}| \leq 0.15$ 的要求, 由式(45)得

$$\begin{cases} \frac{4}{\lambda^2 e^2} \left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0.1, \\ \frac{4}{\lambda e} \left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0.15. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2e}, \\ K = \frac{16^\alpha M}{0.9^\alpha}. \end{cases}$$

取 $\alpha = 0.5$ , 将 $M = 5.25$ 代入上式得:  $K = 16^\alpha M / 0.9^\alpha = 22.13$ , 仿真结果如图4~6所示. 图4, 5分别为系统的零阶和一阶跟踪误差, 图6为控制输入信号.

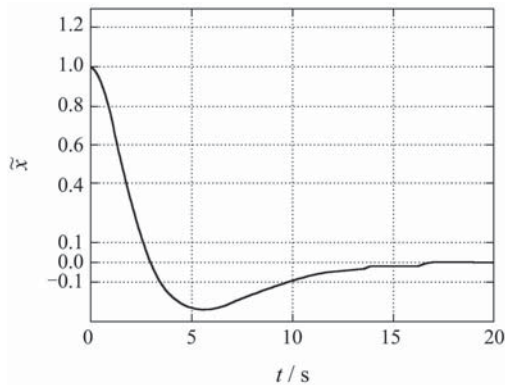


图4 零阶跟踪误差曲线(情形2)

Fig. 4 Plot of zero order tracking error(case 2)

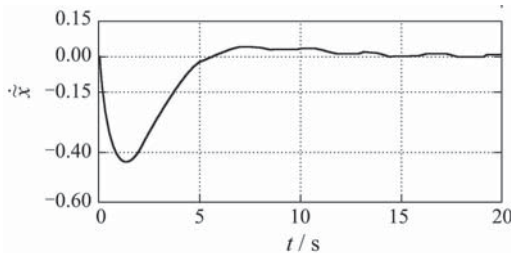


图5 一阶跟踪误差曲线(情形2)

Fig. 5 Plot of first order tracking error(case 2)

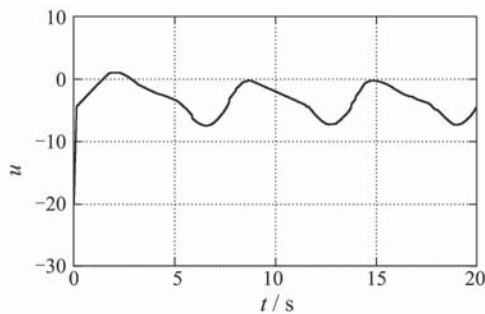


图6 控制输入曲线(情形2)

Fig. 6 Plot of control input signal(case 2)

从图4, 5可见, 系统的零阶和一阶稳态跟踪误差满足预先设定的 $|\tilde{x}| \leq 0.1$ 和 $|\dot{\tilde{x}}| \leq 0.15$ 的要求. 图6中的控制输入没有高频抖振. 若采用文献[8, 10]的方法确定稳态跟踪误差界, 有 $|\tilde{x}| \leq \frac{2}{\lambda^2} \left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 0.369$ , 可见本文得到的稳态跟踪误差界更准确, 这和注2中的分析是一致的.

同时, 在这里说明一点, 若 $\lambda$ 是根据其他指标来设计的, 同样可以用本文的方法来设计控制律参数, 此时根据给定的稳态跟踪误差要求, 设计参数可选为 $\alpha$ 和 $K$ .

## 6 结论(Conclusion)

本文针对一类非线性系统的滑模跟踪控制, 分别推导出了采用Slotine形式传统滑模面和传统积分滑模面时系统的稳态误差和不确定性、幂次趋近律参数之间的数学表达式. 并与现有的一些稳态跟踪误差界的确定方法进行了比较, 理论分析和仿真说明了本文所给出的稳态跟踪误差界更精确. 同时, 根据

给定的系统稳态跟踪误差要求, 以设计出适合的幂次趋近律参数, 保证跟踪精度要求, 并抑制抖振.

## 参考文献(References):

- [1] 刘金琨, 孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究进展[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 407 - 419.  
(LIU Jinkun, SUN Fuchun. Research and development on the theory and algorithms of sliding mode control[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 407 - 419.)
- [2] GAO W B, HUNG J C. Variable structure control of nonlinear systems: a new approach[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, 40(1): 45 - 55.
- [3] HUNG J Y, GAO W B, HUNG J C. Variable structure control: a survey[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1993, 40(1): 2 - 22.
- [4] BANDYOPADHYAY B, DEEPAK F, PARK Y J. A robust algorithm against actuator saturation using integral sliding mode and composite nonlinear feedback[C] // *Proceedings of the 17th International Federation of Automatic Control World Congress*. Seoul, Korea: IFAC, 2008: 14174 - 14179.
- [5] YU S, YU X, SHIRINZADEH B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. *Automatica*, 2005, 41(11): 1957 - 1964.
- [6] 梅红, 王勇. 快速收敛的机器人滑模变结构控制[J]. 信息与控制, 2009, 38(5): 552 - 557.  
(MEI Hong, WANG Yong. Fast convergent sliding mode variable structure control of robot[J]. *Information and Control*, 2009, 38(5): 552 - 557.)
- [7] SLOTINE J J, LI W P. *Applied Nonlinear Control*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- [8] BOURI M, THOMASSET D. Sliding control of an electropneumatic actuator using an integral switching surface[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2001, 9(2): 368 - 375.
- [9] BESSA W M. Some remarks on the boundedness and convergence properties of smooth sliding mode controllers[J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2009, 6(2): 154 - 158.
- [10] 管成, 潘双夏. 含有非线性不确定参数的电液系统滑模自适应控制[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(2): 261 - 267.  
(GUAN Cheng, PAN Shuangxia. Sliding mode adaptive control of electro-hydraulic system with nonlinear unknown parameters[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(2): 261 - 267.)
- [11] SU J P. Robust control of a class of non-linear cascade systems: a novel sliding mode approach[J]. *IEE Proceedings: Control Theory Applications*, 2002, 149(2): 131 - 136.
- [12] LIANG C Y, SU J P. A new approach to the design of a fuzzy sliding mode controller[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 139(1): 111 - 124.
- [13] CHEN H M, RENN J C, SU J P. Sliding mode control with varying boundary layers for an electro-hydraulic position servo system[J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2005, 26(1): 117 - 123.
- [14] MOULAY E, PERRUQUETTI W. Finite time stability conditions for non autonomous continuous systems[J]. *International Journal of Control*, 2006, 40(1): 1 - 12.
- [15] MOULAY E, PERRUQUETTI W. Finite time stability of non linear systems[C] // *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2003: 3641 - 3646.

## 作者简介:

李鹏 (1982—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为变结构控制、精确制导与控制, E-mail: lipeng0327@nudt.edu.cn;

马建军 (1980—), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为控制分配与容错控制, E-mail: mjcell@yahoo.com.cn;

郑志强 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为精确制导与控制、多机器人协同控制等, E-mail: xzyzheng@sohu.com.