

有向网络下二阶线性多个体动力学系统的渐近性

金继东^{1,2}, 郑毓蕃¹

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444; 2. 首都经济贸易大学 计算机科学与技术系, 北京 100070)

摘要: 本文探讨任意有向通讯网络条件下二阶线性多个体动力学系统的渐近性质及其与系统结构的关系. 二阶多个体系统的平衡态可以用惯性概念描述. 当系统位置控制系数与速度控制系数满足一定的关系时系统将趋于惯性状态. 独立基本子系统趋于自身的位置一致惯性状态, 这一状态由子系统状态初值以及其Laplacian零特征根左特征向量所确定; 非独立子系统中个体的惯性状态在独立基本子系统位置一致惯性状态所决定的凸集内.

关键词: Frobenius标准型; 对角占优; 惯性; 带权中心; 凸组合

中图分类号: N941.3, O231.5 **文献标识码:** A

Asymptotic behavior of second-order linear multi-agent dynamic systems in directed network

JIN Ji-dong^{1,2}, ZHENG Yu-fan¹

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China;

2. Department of Computer Science and Technology, Capital University of Economics and Business, Beijing 100070, China)

Abstract: This paper investigates the asymptotical behavior of second-order linear multi-agent dynamic systems in a direct communication network, and the configuration relation between those systems and the system structure. We use the notion of inertia in classical mechanism to describe the asymptotic behavior of second-order systems. When the parameters of position-control and the parameters of velocity-control of the system satisfy some conditions, the system approaches to the inertia-state. Meanwhile, the basic independent systems uniformly approach to the individual inertia-states which are determined by system initial-conditions and Laplacian left-eigenvectors associated with the zero eigenvalue; while the dependent systems reach some inertia-states in the convex-combination of individual inertia-states of independent systems.

Key words: Frobenius canonical form; diagonally dominant; inertia; weighted center; convex combination

1 引言(Introduction)

1987年Reynolds^[1]提出了一个人工鸟模型. 每个人工鸟遵循以下3个行为规则: 1) 避免碰撞; 2) 速度匹配; 3) 聚集倾向. 文献[1]是Swarm现象研究的前驱之一. 当代Swarm研究通常采用模拟方法. 容易看出大多数Swarm模型本质上是微分动力学模型, 而计算机模拟不过是未作精度控制的欧拉法. 1995年Vicsek^[2]给出了一个基于飞行角度匹配规则的鸟群运动状态同步模型.

2004年Olfati-Saber^[3]研究了线性动力学模型:

$$\dot{x}_i = \sum_{a_j \in N(a_i)} \gamma_{ij}(x_i - x_j), \quad (1)$$

其中: $a_i (i = 1, \dots, n)$ 是个体, x_i 是 a_i 的状态, $N(a_i)$ 为影响 a_i 状态变化的个体集合, 称为 a_i 的信源集合. 令 \mathcal{A} 为个体的集合, 定义

$$\mathcal{E} = \{(a_i, a_j) | a_i \in \mathcal{A}; a_j \in N(a_i)\},$$

有向图 $G = \langle \mathcal{A}, \mathcal{E} \rangle$ 称为系统的通讯网络.

文献[3]的一个主要结论是: i) $\gamma_{ij} < 0$; ii) G 强连通, 则系统中所有个体趋于状态一致. 这项研究开启了理论上探究非对称多个体系统整体行为的大门, 其中文献[4~8]将式(1)作为基本模型, 循着一般化的线索展开深入探讨.

对 G 不一定强连通的一般情形, 文献[3]还给出了 $\gamma_{ij} < 0$ 时, 系统将趋于平衡态. 文献[4]进一步给出了系统平衡态为一致状态的充分必要条件: G 准强连通(QSC), 也即 G 存在这样的结点 a_j , 该结点到 G 上任意结点 $a_i (\neq a_j)$ 均存在路径.

文献[5]则从更一般的角度研究了系统(1)的平衡态, 也即任意有向网络条件下系统的平衡态, 揭示了系统(1)的平衡态具有以下特性:

1) 系统可以按通讯网络 G 分解为基本子系统的组成结构, 基本子系统分为独立基本子系统和非独立基本子系统;

知 H_{ii} 不可约,因此式(5)是 H 的Frobenius标准型.

证毕.

$$L' = \begin{pmatrix} L_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & L_{pp} & \\ C_1 \cdots C_p & & & B \end{pmatrix}, H' = \begin{pmatrix} H_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & H_{pp} & \\ D_1 \cdots D_p & & & E \end{pmatrix} \quad (7)$$

为非独立块合并后 L 和 H 的Frobenius标准型. B 为 L 合并非独立块, $C_i = (L_{p+1,i}, \dots, L_{p+q,i})^T$ 为 B 相对于 L_{ii} 的通讯块. E 为 H 合并非独立块, $D_i = (H_{p+1,i}, \dots, H_{p+q,i})^T$ 为 E 相对于 H_{ii} 的通讯块.

H 的Frobenius标准型(5)清晰地反映了系统(3)的结构. 由于总是可以通过个体编号置换的方法将系统(3)的 L 和 H 矩阵置换为Frobenius标准型, 因此总是假定 L 和 H 是Frobenius标准型.

定义 4 系统(3)的系数矩阵 H 为Frobenius标准型(5), $H_{ii}(i = 1, \dots, p)$ 是独立块, $H_{jj}(j = p + 1, \dots, p + q)$ 是非独立块, E 是合并非独立块, D_i 为 E 相对于独立块 H_{ii} 的通讯块. 令

- i) $\dot{\xi}_i = H_{ii}\xi_i$;
- ii) $\dot{\xi}_j = H_{jj}\xi_j + \sum_{s=1}^{j-1} H_{js}\xi_s$;
- iii) $\dot{\xi}_E = E\xi_E + \sum_{i=1}^p D_i\xi_i$.

i)称为独立基本子系统, ii)称为非独立基本子系统, i)和ii)统称基本子系统. iii)称为合并非独立子系统.

为反映状态变量所对应的子系统, 状态变量采用双下标. 对二阶系统, x_{sr}, v_{sr} 分别表示 s 子系统的第 r 个体的位置状态和速度状态.

$$\xi_s = (x_s, v_s)^T = (x_{s1}, \dots, x_{sn_s}, v_{s1}, \dots, v_{sn_s})^T$$

为系统 s 子系统的状态向量. n_s 为子系统的个体数.

3 系数矩阵(Coefficient matrix)

由Gersgorin圆盘定理^[9], 易得以下命题.

引理 2^[3] L 是行零和对角占优矩阵且对角元素均为负, L 非零特征根的实部为负.

Olfati-Saber^[3]还证明了 L 是单纯类型的行零和对角占优矩阵且 G 强连通, 则 L 的欠秩数为1, 零特征根是单根. 结合引理1, 这实际上给出了:

引理 3 L 是单纯类型的行零和对角占优矩阵, 则其独立块 L_{ii} 欠秩数为1且零特征根是单根.

利用引理3, 文献[8]证明了 L 的以下性质.

引理 4^[8] L 是单纯类型的行零和对角占优矩阵, 则其独立块 L_{ii} 零特征根归一化左特征向量:

$$\rho_i^T = (\rho_{i1}, \dots, \rho_{in_i}), \rho_i^T L_{ii} = \mathbf{0}, \sum_{s=1}^{n_i} \rho_{is} = 1$$

是唯一确定的正向量.

现在证明本文要用的 L 的以下重要性质.

命题 3 L 是单纯类型的行零和对角占优矩阵, 则其非独立块 $L_{jj}(j = p + 1, \dots, p + q)$ 满秩; 合并非独立块 B 满秩, 并且

$$\mathbf{0} \leq -B^{-1}C_i\mathbf{1} \leq \mathbf{1}, \sum_{i=1}^p -B^{-1}C_i\mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad i = 1, \dots, p.$$

证 L 行零和对角占优矩阵, 非独立块 L_{jj} 不可约对角占优. 由于存在 $L_{js} \neq \mathbf{0}(s < j)$, 因此 L_{jj} 存在严格对角占优行. 根据Tuassky定理^[9]: 不可约对角占优矩阵如果存在严格对角占优行则满秩, 因而 L_{jj} 满秩. B 是三角分块矩阵, 因此 B 满秩.

根据 L 行零和对角占优性, 用 L 的 i 行对 j 行进行Gauss行消元, 消元后 j 行 p 列元素

$$l'_{jp} = l_{jp} - (l_{ji}/l_{ii})l_{ip} = l_{jp} - (l_{ip}/l_{ii})l_{ji}, l'_{jp} = l_{jp} + k_p l_{ji}, 0 \leq k_p \leq 1.$$

$p \neq j, l_{jp}, l_{ji}$ 同为 j 行非对角元素, 符号相同, 又 $k_p \geq 0$, 因此 l'_{jp} 取 l_{jp} 符号. $p = j, |l_{jj}| \geq |l_{ji}|$, 又 $k_j \leq 1$, 因此 l'_{jp} 也取 l_{jp} 符号. 证得对 L 进行行消元不改变矩阵元素的符号方向.

令 G 是针对式(7)中 B 所在行的行消元变换, 使 GB 为对角矩阵. 消元后左乘 $(GB)^{-1}$,

$$(GB)^{-1}(GC_1, \dots, GC_p, GB) = (B^{-1}C_1, \dots, B^{-1}C_p, I).$$

由行消元不改变矩阵元素的符号方向以及 B 对角元素符号相同, 知 $B^{-1}C_i = (GB)^{-1}(GC_i)$ 的元素全部非正. 显然行消元及左乘对角矩阵 $(GB)^{-1}$ 均不改变矩阵的行零和性, 因此

$$(B^{-1}C_1, \dots, B^{-1}C_p, I)\mathbf{1} = \sum_{i=1}^p B^{-1}C_i\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

证毕.

H 的特征根可由 L 的特征根确定.

$$H \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ w_x L & w_v L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, (w_x + w_v \lambda)Lx = \lambda^2 x, Lx = (\lambda^2 / (w_x + w_v \lambda))x.$$

$\mu = \lambda^2 / (w_x + w_v \lambda)$ 是 L 的特征根, 记 λ_μ 为 μ 对应的 H 的特征根:

$$\lambda_\mu = (w_v \mu \pm \sqrt{(w_v \mu)^2 + 4w_x \mu}) / 2.$$

$w_v = 0, H$ 存在实部大于零的特征根, 系统(3)不可能趋于平衡状态, 因此约定 $w_v > 0$. 令 $w = w_x / w_v^2$,

$$\lambda_\mu = \frac{w_v}{2}(\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4w\mu}), w = w_x/w_v^2. \quad (8)$$

令 \mathcal{U} 是 \mathbf{L} 矩阵的非零特征根的集合, 定义

$$\bar{w} = \min\{-\text{Re}(\mu)(1 + \text{ctg}^2 \theta_\mu) \mid \mu \in \mathcal{U}\}, \quad (9)$$

其中: $\text{Re}(\mu)$ 是 μ 的实部, θ_μ 为 μ 的幅角.

基于引理2, $\text{Ren}^{[6]}$ 给出了 \mathbf{H} 矩阵特征根实部非正条件. 将其重新表述为引理5的形式, 基于这一表述本文给出了一个更直接简单的证明.

引理5 \mathbf{L} 是行零和对角占优矩阵且对角元素均为负, 则 \mathbf{H} 矩阵特征根实部非正当且仅当

$$w = w_x/w_v^2 < \bar{w}.$$

证 令 $\mu = a + bi$, 求 $\text{Re}(\lambda_\mu) = 0$ 时 w 的根.

$$S = \mu^2 + 4w\mu =$$

$$(a^2 - b^2 + 4wa) + (2ab + 4wb)i = (|a| + ci)^2.$$

联立复方程的实部和虚部消去 c 后可得两个根:

$$w_1 = 0, w_2 = -a\|\mu\|^2/b^2 = -a(1 + \text{ctg}^2 \theta_\mu).$$

μ 为 \mathbf{L} 非零特征根, 由引理2, $a < 0$, 所以 $w_2 > 0$. 取 $w = -a/2 \in (w_1, w_2) = (0, w_2)$, 则

$$S = -(a^2 + b^2), \lambda_\mu = (w_v/2)(\mu \pm \sqrt{S}),$$

$\text{Re}(\lambda_\mu) < 0$, 由 $\text{Re}(\lambda_\mu)$ 为 w 的连续函数, 充分性得证. $w \rightarrow \infty$, S 的模趋近于 ∞ 且其幅角趋近于 θ_μ 结合 S 相对于 w 的连续性可得必要性. 证毕.

\mathbf{H}_{ii} 是 \mathbf{H} 的独立块, 由命题2, 其定义式(6)中 \mathbf{L}_{ii} 是 \mathbf{L} 的独立块. 根据引理3并依据式(8)有:

命题4 \mathbf{L} 是行零和对角占优矩阵, 则 \mathbf{H} 的独立块 \mathbf{H}_{ii} 的欠秩数为1, 零特征根是二重根, $(\mathbf{H}_{ii} - \mathbf{0I})^2$ 定义的零特征根广义特征向量为

$$h_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{0})^T, \mathbf{H}_{ii}h_1 = (\mathbf{0}, \mathbf{0})^T,$$

$$h_2 = (\mathbf{0}, \mathbf{1})^T, \mathbf{H}_{ii}h_2 = (\mathbf{1}, \mathbf{0})^T.$$

4 系统平衡态(System equilibrium)

二阶多个体动力学系统的平衡态可以通过经典动力学中熟悉的惯性概念描述.

定义5 如果存在一组常量 $v_i (i = 1, \dots, n)$, $t \rightarrow \infty$ 时, $v_i(t) \rightarrow v_i$, 也即 $x_i(t) \rightarrow \chi_i(t) (\chi_i(t) = \chi_i + v_i t)$, 称二阶多个体动力学系统(3)趋于惯性状态. 惯性状态如果有 $v_1 = \dots = v_n$, 则称为速度一致惯性状态; 速度一致并且有 $\chi_1 = \dots = \chi_n$, 则称为位置一致惯性状态.

定理1 二阶状态协同动力学系统(3)趋于惯性状态当且仅当 $w = w_x/w_v^2 < \bar{w}$.

证 系统(3)为协同动力学系统, 则Laplacian \mathbf{L} 是行零和对角占优矩阵且对角元素均为负. 根据引理5, \mathbf{H} 特征根非正等价于 $w = w_x/w_v^2 < \bar{w}$. 在此情

形下, 系统 $t \rightarrow \infty$ 时的极限状态对应 \mathbf{H} 零特征根基解向量的线性组合. 由命题3和命题2可知式(7)中 \mathbf{E} 满秩, 因此 \mathbf{E} 无零特征根. \mathbf{H}' 为三角分块矩阵, 进而由命题4知 \mathbf{H}' 零特征根是二重根, 且零特征根对应的基解向量为 t 的一次函数. 根据定义, 系统(3)趋于惯性状态. 证毕.

μ 是非零实特征根, θ_μ 是其幅角, 则 $\text{ctg}^2 \theta_u = \infty$. 当 \mathbf{L} 的特征根均为实根时, 根据式(9), $\bar{w} = \infty$. 这样对任意 $w_x, w_v > 0, w = w_x/w_v^2 < \bar{w}$.

推论1 协同动力学系统(3)的Laplacian \mathbf{L} 是Hermite矩阵, 则系统趋于惯性状态.

由命题1和引理4, 可作以下定义:

定义6 若系统(3)的控制规则是单纯的, 独立基本子系统Laplacian \mathbf{L}_{ii} 零特征根归一化左特征向量 $\rho_i^T = (\rho_{i1}, \dots, \rho_{in_i}) (i = 1, \dots, p)$ 称为第 i 独立基本子系统的个体权重向量. $\chi_i(t), v_i(t)$ 分别称为子系统的 t 时带权中心和带权中心速度:

$$\chi_i(t) = \sum_{s=1}^{n_i} \rho_{is} x_{is}(t), v_i(t) = \sum_{s=1}^{n_i} \rho_{is} v_{is}(t).$$

文献[8]利用引理4得到:

引理6 若系统(3)的控制规则是单纯的, 则

$$v_i(t) = v_i(0) = \sum_{s=1}^{n_i} \rho_{is} v_{is}(0);$$

$$\chi_i(t) = \chi_i(0) + v_i(0)t = \sum_{s=1}^{n_i} \rho_{is} x_{is}(0) + t \sum_{s=1}^{n_i} \rho_{is} v_{is}(0).$$

定理2 协同动力学系统(3)趋于惯性状态, 则独立基本子系统个体趋于位置一致惯性状态, 且为子系统的带权中心, 也即 $t \rightarrow \infty$ 时:

$$x_{is}(t) \rightarrow \chi_i(0) + v_i(0)t, s = 1, \dots, n_i. \quad (10)$$

证 系统趋于惯性状态, 第 i 独立基本子系统的惯性状态为 \mathbf{H}_{ii} 零特征根对应基解向量的线性组合, 令其为 $\phi_{\lambda=0}(t)$. 将命题4中 \mathbf{H}_{ii} 的零特征根广义特征向量代入($\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^m$ 为常向量)

$$\xi_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ v_i(t) \end{pmatrix} \rightarrow \phi_{\lambda=0}(t) = \begin{bmatrix} (\mathbf{1}_{n_i \times 1} \otimes \mathbf{I}_m) \eta_1 \\ (\mathbf{1}_{n_i \times 1} \otimes \mathbf{I}_m) \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{1}_{n_i \times 1} \otimes \mathbf{I}_m) \eta_2 \\ \mathbf{0}_{n_i \times m} \mathbf{0}_{m \times 1} \end{bmatrix} t,$$

$$v_{is}(t) \rightarrow \eta_2, x_{is}(t) \rightarrow \eta_1 + \eta_2 t (\forall s = 1, \dots, n_i).$$

证得子系统惯性状态为位置一致惯性状态.

个体权重向量 ρ_i^T 是归一化向量, 分量和为1,

$$\chi_i(t) = \sum_{s=1}^{n_i} \rho_{is} x_{is}(t) \rightarrow \sum_{s=1}^{n_i} \rho_{is} (\eta_1 + \eta_2 t) = \eta_1 + \eta_2 t.$$

由引理6, $\chi_i(t) = \chi_i(0) + v_i(0)t$; 因此 $\eta_1 = \chi_i(0), \eta_2 = v_i(0)$. 证毕.

定理3 协同动力学系统(3)趋于惯性状态, 系统合并非独立子系统个体状态趋于独立基本子系统带权中心一个确定的凸组合, 也即 $t \rightarrow \infty$ 时:

$$\begin{cases} v_E(t) \rightarrow \sum_{i=1}^p (-B^{-1}C_i \mathbf{1} \otimes I_m) v_i(0), \\ x_E(t) \rightarrow \sum_{i=1}^p (-B^{-1}C_i \mathbf{1} \otimes I_m) (\chi_i(0) + v_i(0)t). \end{cases} \quad (11)$$

B 为Laplacian L 的合并非独立块, C_i 为 B 相对于独立块 L_{ii} 的通讯块.

证 令

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_i &= \begin{pmatrix} \bar{x}_i + \bar{v}_i t \\ \bar{v}_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, p, \\ \bar{\xi}_E &= \begin{pmatrix} \bar{x}_E + \bar{v}_E t \\ \bar{v}_E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

是独立基本子系统及合并非独立子系统惯性状态.

由定义4和式(6):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{v}_E &= [(w_x B, w_v B) \otimes I_m] \begin{pmatrix} \bar{x}_E + \bar{v}_E t \\ \bar{v}_E \end{pmatrix} + \\ &\sum_{i=1}^p [(w_x C_i, w_v C_i) \otimes I_m] \begin{pmatrix} \bar{x}_i + \bar{v}_i t \\ \bar{v}_i \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \\ (B \otimes I_m) &[(w_x \bar{x}_E + w_v \bar{v}_E) + w_x \bar{v}_E t] + \\ \sum_{i=1}^p (C_i \otimes I_m) &[(w_x \bar{x}_i + w_v \bar{v}_i) + w_x \bar{v}_i t] = \mathbf{0}. \quad (12) \end{aligned}$$

上式 t 的1次项系数为零, 也即

$$(B \otimes I_m) \bar{v}_E + \sum_{i=1}^p (C_i \otimes I_m) \bar{v}_i = \mathbf{0}.$$

根据定理2, $\bar{v}_i = (\mathbf{1} \otimes I_m) v_i(0)$. 代入上式整理:

$$\bar{v}_E = -(B \otimes I_m)^{-1} \sum_{i=1}^p (C_i \otimes I_m) (\mathbf{1} \otimes I_m) v_i(0).$$

右提Kronecker积(\otimes).

$$\bar{v}_E = \sum_{i=1}^p ((-B^{-1}C_i \mathbf{1}_{1 \times n_i}) \otimes I_m) v_i(0).$$

将上式代入式(12), 确定 t 的0次项系数, 可得

$$\bar{x}_E = \sum_{i=1}^p ((-B^{-1}C_i \mathbf{1}) \otimes I_m) \chi_i(0).$$

由命题3

$$\mathbf{0} \leq -B^{-1}C_i \mathbf{1} \leq \mathbf{1}; \quad \sum_{i=1}^p -B^{-1}C_i \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

证毕.

由非独立子系统个体惯性状态相对于系统独立基本子系统位置一致惯性状态(独立基本子系统的带权中心)的凸组合性, 易得以下推论.

推论2^[6,7] 二阶协同系统(3)所有个体状态趋

于位置一致惯性状态的充要条件是 $w = w_x/w_v^2 < \bar{w}$, 且Laplacian L 具有唯一的独立块, 也即系统独立基本子系统唯一.

注1 文献[8]对协同动力学系统趋于状态一致通讯网络要求的不同术语: G 准强连通^[4], G 存在有向生成树^[6,7], Laplacian L 存在唯一独立 Frobenius 块^[5,8]之间的等价性做了说明. 基于对系统的结构的完整认识, 推论2的表述显然更清楚和直观. 此外, 由定理3的“凸性”得出这一结果不仅自然, 而且也清晰地反映出其与任意通讯网络条件下系统一般平衡态之间的明确关系.

5 模拟(Simulation)

任意有向网络条件下, 系统(3)能否趋于平衡状态只与 w_x/w_v^2 比值有关, 因此, 不失一般性, 本文模拟计算例假定 $w_v = 1$, 这样 $w = w_x/w_v^2 = w_x$.

例1 给定独立基本子系统唯一的系统:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} H_{11} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 \\ 0 & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} \otimes I_2 \right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -a & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix}, \\ L_{21} &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{22} = \begin{pmatrix} -2a & a & 0 \\ 0 & -a & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix}, \\ L_{32} &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{33} = \begin{pmatrix} -2a & a & 0 \\ a & -2a & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\bar{w} = \min(-\text{Re}(\mu)(1 + \text{ctg}^2 \theta)) = 40.9546a. \quad (14)$$

L_{11} 的零特征根归一化左特征向量为

$$\rho_1 = (0.25, 0.50, 0.25).$$

表1给出了唯一独立基本子系统 ξ_1 的初值及其带权中心的初值 $\chi_1(0), v_1(0)$ (由 $\rho_1^T x_1(0), \rho_1^T v_1(0)$ 求得), 其中: 位置在 X - Y 平面表示, 速度在 V_x - V_y 平面表示.

表1 例1独立基本子系统初值及带权中心
Table 1 Initial values and weighted center of independent basic subsystem in Example 1

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\chi_1(0)$	$v_1(0)$
X	300	-100	0	35	—
Y	0	0	600	150	—
V_x	2	2	2	—	2
V_y	1	1	1	—	1

带权中心在X-Y平面随时间变化的曲线为

$$\chi_1(t) = \chi_1(0) + v_1(0)t = \begin{pmatrix} 35 \\ 150 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t,$$

$$a = 0.2, \bar{w} = 40.9546a = 8.19.$$

图1为 $w = w_x = 0.1 < \bar{w}$ 时, 例1个体位置状态在X-Y平面的运动轨迹图. 图上的一条斜率为1/2 ($= V_y/V_x$)的直线为 ξ_1 带权中心的运动轨迹, 虚线为 ξ_1 个体运动轨迹, 点线为 ξ_2 个体运动轨迹, 点划线为 ξ_3 个体运动轨迹. 显示了 ξ_1 逼近自身带权中心, ξ_2 追踪 ξ_1 , ξ_3 追踪 ξ_2 逼近 ξ_1 带权中心的过程.

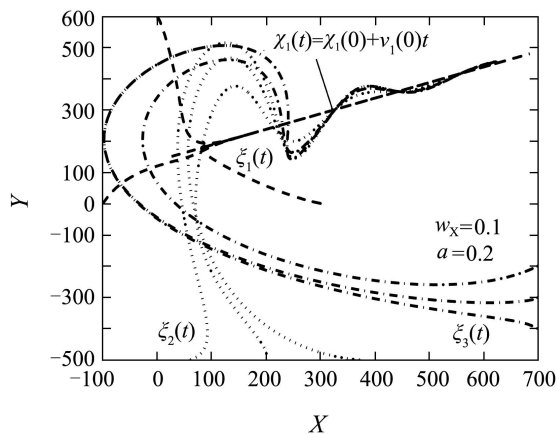


图1 例1轨迹图

Fig. 1 Trajectories in Example 1

例2 给定独立基本子系统不唯一的系统:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} H_{11} & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} \otimes I_m \right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$L_{11}, L_{22} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -a & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix},$$

$$L_{33} = \begin{pmatrix} -2a & a & 0 \\ 0 & -2a & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix},$$

$$L_{31} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

L_{11}, L_{22} 的归一化左特征向量为

$$\rho_1^T = (0.25, 0.50, 0.25).$$

ξ_1, ξ_2 的初值、带权中心以及速度初值 $\chi_1(0), \chi_2(0), v_1(0), v_2(0)$ 见表2所示.

表2 例2独立基本子系统初值及带权中心
Table 2 Initial values and weighted centers of independent basic subsystems in Example 2

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\chi_1(0)$	$v_1(0)$
X	-900	-600	-300	-600	—
Y	200	-200	0	-50	—
V_x	1.2	1.2	1.2	—	1.2
V_y	1	1	1	—	1

	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\chi_2(0)$	$v_2(0)$
X	900	600	300	600	—
Y	200	-200	0	-50	—
V_x	-1.2	-1.2	-1.2	—	-1.2
V_y	1	1	1	—	1

$\chi_1(t), \chi_2(t)$ 在X-Y平面变化曲线为

$$\chi_1(t) = \chi_1(0) + v_1(0)t = \begin{pmatrix} -600 \\ -50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1 \end{pmatrix} t,$$

$$\chi_2(t) = \chi_2(0) + v_2(0)t = \begin{pmatrix} 600 \\ -50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.2 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

容易验证 $t = 500$, $\chi_1(t), \chi_2(t)$ 将交于X-Y平面的(0, 450)点. 图2示意了独立基本子系统 ξ_1, ξ_2 个体趋于各自带权中心, 非独立基本子系统 ξ_3 个体趋于 ξ_1, ξ_2 带权中心 $\chi_1(t), \chi_2(t)$ 凸组合.

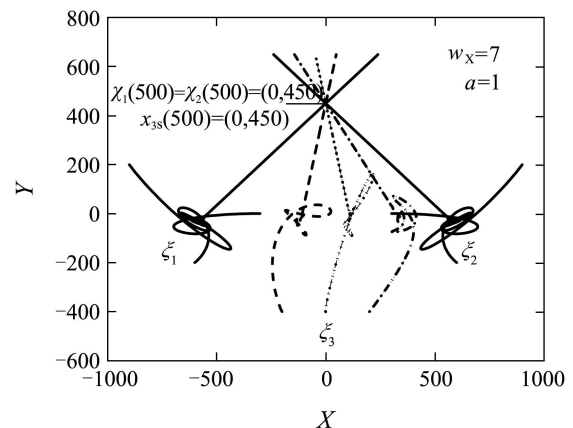


图2 例2轨迹图

Fig. 2 Trajectories in Example 2

参考文献(References):

[1] REYNOLDS C W. Flocks, herds, and schools: a distributed behavioral model[J]. *Computer Graphics*, 1987, 21(4): 25 - 34.
 [2] VICSEK T, CZIRÓK A, BEN-JACOB E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(8): 1226 - 1229.