

文章编号: 1000-8152(2011)05-0688-05

## 一类非线性奇异摄动系统的近似最优控制

曹 宁<sup>1</sup>, 张化光<sup>1</sup>, 罗艳红<sup>1</sup>, 冯德志<sup>1</sup>, 刘 燕<sup>2</sup>

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 东北师范大学 理想信息技术研究院, 吉林 长春 130117)

**摘要:** 针对一类非线性奇异摄动系统, 基于自适应动态规划算法提出了一种新型的近似最优控制设计方法. 该方法基于奇异摄动系统的快、慢Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程, 从初始性能指标开始, 通过神经网络的近似和控制律与性能指标的逐步更新迭代, 最终收敛到最优的性能指标, 而不用直接求解复杂的HJB方程. 同时给出了该算法的收敛性证明, 并且也证明了由此得到的组合控制是近似最优的. 仿真实例验证了该方法的有效性.

**关键词:** 奇异摄动系统; 自适应动态规划; 快慢分解; 组合控制

中图分类号: TP273 文献标识码: A

### Suboptimal control of a class of nonlinear singularly perturbed systems

CAO Ning<sup>1</sup>, ZHANG Hua-guang<sup>1</sup>, LUO Yan-hong<sup>1</sup>, FENG De-zhi<sup>1</sup>, LIU Yan<sup>2</sup>

(1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;

2. Ideal Institute of Information and Technology, Northeast Normal University, Changchun Jilin 130117, China)

**Abstract:** Based on adaptive dynamic programming, a novel suboptimal control method for a class of nonlinear singularly perturbed systems is proposed. According to the slow/fast Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) equations, the initial performances converge to the optimal performances by neural network approximation and the iteration between control laws and performance indices. It avoids solving the complex HJB equations directly. The convergence of the algorithm is proved and the obtained composite control is shown to be suboptimal. Simulation results demonstrate the effectiveness.

**Key words:** singularly perturbed systems; adaptive dynamic programming; slow-fast decomposition; composite control

## 1 引言(Introduction)

奇异摄动系统的最优控制问题一直是人们广泛关注的课题之一<sup>[1~3]</sup>. 其中有关线性奇异摄动系统的最优控制问题已经取得一系列的成果<sup>[4]</sup>. 而对于非线性奇异摄动系统因其复杂性, 目前的研究成果并不多. 主要的研究方法就是先将非线性系统进行降阶分解再分别设计最优控制器. 其中文献[5]从微分几何的角度将最优控制器由快、慢不变流形精确表达. 文献[6]采用摄动方法和泰勒展开方法来求解离散非线性奇异摄动系统的最优控制. 这些方法的计算量较大且需要求解复杂的偏微分方程, 这给直接求解奇异摄动系统的最优控制问题带来了很大困难. 为了克服这些困难, 本文提出了一种新型的近似最优控制设计方法. 该方法依据奇异摄动系统的快、慢HJB方程, 从初始性能指标函数开始迭代, 经过控制律和性能指标的逐步更新, 最终收敛到系统的最优性能指标, 而不需要直接求解复杂的HJB方程, 从而有效的减少了计算量, 提高了控制效率. 并且完整的给出了本文算法的收敛性证明. 同时为了便于迭代算法的实现, 本文采用神经网络结构来近

似性能指标, 进而得到了系统的近似最优控制律.

## 2 问题描述及前期准备(Problem description and previous preparation)

考虑如下类非线性奇异摄动系统:

$$\dot{x}_1 = f_{11}(x_1) + f_{12}(x_1)x_2 + g_1(x_1)u, \quad (1a)$$

$$\epsilon \dot{x}_2 = f_{21}(x_1) + f_{22}(x_1)x_2 + g_2(x_1)u. \quad (1b)$$

其中:  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ 为系统的状态变量,  $u \in \mathbb{R}^m$ 为系统的控制输入.  $0 < \epsilon \ll 1$ 为摄动参数. 函数 $f_{ij}$ 和 $g_i$ 可微, 并且满足 $f_{11}(0) = 0$ ,  $f_{21}(0) = 0$ , 即保证 $(0, 0)$ 为系统的平衡点. 假设 $f_{22}$ 对所有的 $x_1$ 可逆, 且系统在紧集 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ 上是可镇定的.

本文的目标是设计系统(1)的最优控制器来最小化如下形式的性能指标:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (2)$$

其中:  $x = [x_1 \ x_2]^T$ ,  $Q = [C_1 \ C_2]^T [C_1 \ C_2] \geq 0$ ,  $R > 0$ .

由于摄动参数 $\epsilon$ 的存在, 系统方程将会产生很高的阶数以及一些病态的数值特性. 这给直接求解最

收稿日期: 2010-03-30; 收修改稿日期: 2010-07-12.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50977008, 60821063, 61034005); 国家重点基础研究发展计划资助项目(2009CB320601); 国家高技术  
研究发展专项资助项目(2009AA04Z127).

优控制问题带来了许多困难, 因此本文将系统(1)进行分解.

首先, 令  $\epsilon = 0$ , 则系统(1b)可化为

$$x_{2s} = -f_{22}^{-1}(x_{1s})f_{21}(x_{1s}) - f_{22}^{-1}(x_{1s})g_2(x_{1s})u_s. \quad (3)$$

将式(3)代入系统(1a)中, 得到慢子系统

$$\dot{x}_{1s} = F_s(x_{1s}) + G_s(x_{1s})u_s, \quad (4)$$

且

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \end{bmatrix} = p(x_{1s}) + q(x_{1s})u_s, \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} F_s(x_{1s}) &= f_{11}(x_{1s}) - f_{12}(x_{1s})f_{22}^{-1}(x_{1s})f_{21}(x_{1s}), \\ G_s(x_{1s}) &= g_1(x_{1s}) - f_{12}(x_{1s})f_{22}^{-1}(x_{1s})g_2(x_{1s}), \\ p(x_{1s}) &= C_1x_{1s} - C_2f_{22}^{-1}(x_{1s})f_{21}(x_{1s}), \\ q(x_{1s}) &= -C_2f_{22}^{-1}(x_{1s})g_2(x_{1s}). \end{aligned}$$

因此, 慢系统的性能指标为

$$J_s = \int_0^\infty L_s(x_{1s}, u_s)dt, \quad (6)$$

其中

$$L_s = p^T p + 2p^T q u_s + u_s^T q^T q u_s + u_s^T R u_s.$$

由最优控制理论可知, 慢系统的最优控制  $u_s^*$  和最优性能指标  $J_s^*$  之间满足如下的 HJB 方程:

$$0 = \frac{\partial J_s^{*T}}{\partial x_{1s}} (F_s + G_s u_s^*) + L_s(x_{1s}, u_s^*), \quad (7)$$

且

$$u_s^* = -\frac{1}{2} (q^T q + R)^{-1} (G_s^T \frac{\partial J_s^*}{\partial x_{1s}} + 2q^T p). \quad (8)$$

取  $x_{2f} = x_2 - x_{2s}$ ,  $u_f = u - u_s$ , 并假设  $x_{2s}$  保持不变, 代入式(1b), 得到快子系统

$$\epsilon \dot{x}_{2f} = F_f(x_1)x_{2f} + G_f(x_1)u_f, \quad (9)$$

其中

$$F_f(x_1) = f_{22}(x_1), \quad G_f(x_1) = g_2(x_1).$$

这里将  $x_1$  看做独立的参变量.

此时快系统的性能指标为

$$J_f = \int_0^\infty L_f(x_{2f}, u_f)dt, \quad (10)$$

其中

$$L_f = x_{2f}^T C_2^T C_2 x_{2f} + u_f^T R u_f.$$

同样地, 快系统的最优控制  $u_f^*$  和最优性能指标  $J_f^*$  之间满足如下的 HJB 方程:

$$0 = \frac{\partial J_f^{*T}}{\partial x_{2f}} (F_f + G_f u_f^*) + L_f(x_{2f}, u_f^*), \quad (11)$$

其中

$$u_f^* = -\frac{1}{2} R^{-1} G_f^T \frac{\partial J_f^*}{\partial x_{2f}}. \quad (12)$$

由  $u_s^*$ ,  $u_f^*$  可得到系统(1)的组合控制

$$u_c^* = u_s^* + u_f^*. \quad (13)$$

由文献[1]可知, 系统的组合控制与最优控制  $u^*$  之间只相差  $\epsilon$  的高阶无穷小, 即  $u_c^* = u^* + O(\epsilon)$ . 因此  $u_c^*$  可看成系统的近似最优控制. 然而, 一般情况下偏微分方程(7)(11)很难甚至不能直接求解, 这给  $u_c^*$  的获得也带来了很大的困难. 下面基于自适应动态规划算法来近似求解这个最优控制问题.

### 3 近似最优控制器设计 (Suboptimal controller design)

本节将给出近似最优控制器的设计步骤及其结合神经网络的具体实现算法.

#### 3.1 算法设计 (Algorithm design)

首先考虑慢系统(4)及其性能指标(6), 选定一初始性能指标  $J_s^{(0)}$ , 根据式(8)得到初始控制律

$$u_s^{(0)} = -\frac{1}{2} (q^T q + R)^{-1} (G_s^T \frac{\partial J_s^{(0)}}{\partial x_{1s}} + 2q^T p), \quad (14)$$

这里  $J_s^{(0)}$  的选择需保证  $u_s^{(0)}$  能够使系统(4)镇定. 基于初始控制律  $u_s^{(0)}$ , 对初始状态  $x_0$  可获得系统(4)的一个状态轨迹  $x_{1s}^{(0)}(x_0, \cdot)$ . 再根据  $x_{1s}^{(0)}(x_0, \cdot)$  和  $u_s^{(0)}$  由下式可以得到性能指标的更新:

$$J_s^{(1)} = \int_0^\infty L_s(x_{1s}^{(0)}(x_0, t), u_s^{(0)})dt. \quad (15)$$

如此进行下去, 控制律  $u_s^{(i)}$  和性能指标  $J_s^{(i+1)}$  在式(16)与式(17)之间迭代:

$$u_s^{(i)} = -\frac{1}{2} (q^T q + R)^{-1} (G_s^T \frac{\partial J_s^{(i)}}{\partial x_{1s}} + 2q^T p), \quad (16)$$

$$J_s^{(i+1)} = \int_0^\infty L_s(x_{1s}^{(i)}(x_0, t), u_s^{(i)})dt. \quad (17)$$

同样地, 对快系统(9)和性能指标(10), 若快系统在第  $i$  步迭代时的性能指标为  $J_f^{(i)}$ , 则相应的控制律为

$$u_f^{(i)} = -\frac{1}{2} R^{-1} G_f^T \frac{\partial J_f^{(i)}}{\partial x_{2f}}. \quad (18)$$

在此控制律的作用下, 可得到快系统的状态轨迹  $x_{2f}^{(i)}(x_0, \cdot)$ , 因此又可进一步获得性能指标的更新:

$$J_f^{(i+1)} = \int_0^\infty L_f(x_{2f}^{(i)}(x_0, t), u_f^{(i)})dt, \quad (19)$$

可以证明, 由此得到的  $J_s^{(i)}$ ,  $J_f^{(i)}$  最终收敛到最优值  $J_s^*$ ,  $J_f^*$ .

**定理 1** 若初始控制律  $u_s^{(0)}$ ,  $u_f^{(0)}$  是稳定的, 则对任意  $i = 1, 2, \dots$ , 由式(16)和式(18)获得的控制律  $u_s^{(i)}$ ,  $u_f^{(i)}$  也是稳定的. 同时随着  $i \rightarrow \infty$ ,  $J_s^{(i)} \rightarrow J_s^*$ ,

$J_f^{(i)} \rightarrow J_f^*$ , 且  $u_s^{(i)} \rightarrow u_s^*$ ,  $u_f^{(i)} \rightarrow u_f^*$ .

证 证明过程采用数学归纳法.

首先, 对于慢系统,  $u_s^{(0)}$  显然是稳定的. 假设  $u_s^{(i)}$  稳定, 易知式(17)等价于迭代HJB方程(20):

$$\frac{\partial J_s^{(i+1)T}}{\partial x_{1s}} (F_s + G_s u_s^{(i)}) = -L_s(x_{1s}, u_s^{(i)}). \quad (20)$$

令  $x_{1s} = x_{1s}^{(i+1)}(x_0, \cdot)$ , 容易得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_s^{(i+1)T}}{\partial x_{1s}} F_s(x_{1s}^{(i+1)}) = \\ - \frac{\partial J_s^{(i+1)T}}{\partial x_{1s}} G_s(x_{1s}^{(i+1)}) u_s^{(i)} - L_s(x_{1s}^{(i+1)}, u_s^{(i)}). \end{aligned} \quad (21)$$

因此,

$$\begin{aligned} \frac{dJ_s^{(i+1)}}{dt}(x_{1s}^{(i+1)}(x_0, t)) = \\ \frac{\partial J_s^{(i+1)T}}{\partial x_{1s}} F_s(x_{1s}^{(i+1)}) + \frac{\partial J_s^{(i+1)T}}{\partial x_{1s}} G_s(x_{1s}^{(i+1)}) u_s^{(i+1)} = \\ - L_s(x_{1s}^{(i+1)}, u_s^{(i)}) - \frac{\partial J_s^{(i+1)T}}{\partial x_{1s}} G_s(x_{1s}^{(i+1)}) u_s^{(i)} + \\ \frac{\partial J_s^{(i+1)T}}{\partial x_{1s}} G_s(x_{1s}^{(i+1)}) u_s^{(i+1)} = \\ - p^T [I - q(q^T q + R)^{-1} q^T] p - \\ \frac{1}{4} \frac{\partial J_s^{(i+1)T}}{\partial x_{1s}} G_s(q^T q + R)^{-1} G_s^T \frac{\partial J_s^{(i+1)}}{\partial x_{1s}} - \\ \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial J_s^{(i+1)}}{\partial x_{1s}} - \frac{\partial J_s^{(i)}}{\partial x_{1s}} \right]^T G_s(q^T q + R)^{-1} G_s^T \times \\ \left[ \frac{\partial J_s^{(i+1)}}{\partial x_{1s}} - \frac{\partial J_s^{(i)}}{\partial x_{1s}} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

因为  $R > 0$ , 由Schur补, 易知

$$q^T q + R - q^T q > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & q \\ q^T & q^T q + R \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow$$

$$I - q(q^T q + R)^{-1} q^T > 0.$$

显然式(22)中最后一个等式的第1项小于0.

于是, 对  $x_{1s}^{(i+1)}(x_0, t) \neq 0$ ,

$$\frac{dJ_s^{(i+1)}}{dt}(x_{1s}^{(i+1)}(x_0, t)) < 0.$$

因此  $J_s^{(i+1)}$  是慢系统的Lyapunov函数, 从而  $u_s^{(i+1)}$  是稳定控制.

所以, 对任意  $i = 1, 2, \dots$ , 由式(16)得到的控制律  $u_s^{(i)}$  都是稳定的.

另外,

$$\begin{aligned} \frac{dJ_s^{(i+1)}}{dt}(x_{1s}^{(i)}(x_0, t)) = \\ p^T q(q^T q + R)^{-1} (G_s^T \frac{\partial J_s^{(i)}}{\partial x} + 2q^T p) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^T p - \frac{1}{4} (G_s^T \frac{\partial J_s^{(i)}}{\partial x} + 2q^T p)^T (q^T q + R)^{-1} \times \\ (G_s^T \frac{\partial J_s^{(i)}}{\partial x} + 2q^T p). \end{aligned} \quad (23)$$

根据式(22), 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [J_s^{(i+1)} - J_s^{(i)}](x_{1s}^{(i)}(x_0, t)) = \\ \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial J_s^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial J_s^{(i-1)}}{\partial x} \right]^T G_s(q^T q + R)^{-1} G_s^T \times \\ \left[ \frac{\partial J_s^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial J_s^{(i-1)}}{\partial x} \right] > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

由于  $x_{1s}^{(i)}(x_0, t)$  最终收敛到0, 因此  $J_s^{(i+1)} - J_s^{(i)}$  也收敛到0, 再根据式(24), 从而有  $J_s^{(i+1)} < J_s^{(i)}$ . 因此, 序列  $\{J_s^{(i)}\}_0^\infty$  是单调递减的, 且有下界  $J_s^*$ . 所以  $\{J_s^{(i)}\}_0^\infty$  是收敛的. 假设其收敛于  $J_s^{(\infty)}$ , 则  $J_s^{(\infty)}$  满足迭代HJB方程(20).

$$\frac{\partial J_s^{(\infty)T}}{\partial x_{1s}} (F_s + G_s u_s^{(\infty)}) = -L_s(x_{1s}, u_s^{(\infty)}), \quad (25)$$

即为慢系统的HJB方程(7). 根据最优控制的唯一性, 易得  $J_s^{(\infty)} = J_s^*$ . 从而  $u_s^{(\infty)} = u_s^*$ .

同理可推导出快系统的类似结果, 只是控制律与性能指标的迭代采用式(18)(19)的形式. 证毕.

### 3.2 神经网络近似(Neural network approximation)

采用如下的神经网络结构来近似慢系统第  $i$  步迭代时的性能指标函数  $J_s^{(i)}$  [7~9]:

$$J_s^{(i)} = W_s^{(i)T} \Phi_s(x_{1s}), \quad (26)$$

其中:  $W_s^{(i)} = [w_{s1}^{(i)} \ w_{s2}^{(i)} \ \dots \ w_{sN_s}^{(i)}]^T$  表示待调整的权值向量,  $\Phi_s(x_{1s}) = [\phi_{s1} \ \phi_{s2} \ \dots \ \phi_{sN_s}]^T$  为基函数向量, 且各基函数  $\{\phi_{si}(x_{1s})\}_1^{N_s}$  之间线性独立,  $N_s$  表示基函数的个数. 采用同样的结构来对快系统的性能指标近似, 即  $J_f^{(i)} = W_f^{(i)T} \Phi_f(x_1, x_{2f})$ , 其中  $W_f^{(i)}$ ,  $\Phi_f$ ,  $N_f$  的含义相同.

为了获得慢系统在第  $i+1$  步时的性能指标  $J_s^{(i+1)}$ , 在状态轨迹  $x_{1s}^{(i)}(x_0, \cdot)$  中取  $r_s \geq N_s$  个状态点  $x_j^{(i)} = x_{1s}^{(i)}(x_0, t_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, r_s$ ), 分别计算以此为初始点的性能指标值  $J_s^{(i+1)}(x_j^{(i)})$ :

$$J_s^{(i+1)}(x_j^{(i)}) = \int_{t_j}^\infty L_s(x_{1s}^{(i)}(x_0, t), u_s^{(i)}) dt. \quad (27)$$

调整  $W_s^{(i+1)}$  使得  $J_s^{(i+1)}(x_j^{(i)}) = W_s^{(i+1)T} \Phi_s(x_j^{(i)})$  对每一个  $x_j^{(i)}$  均成立, 即满足如下等式:

$$\Gamma_s = \Psi_s W_s^{(i+1)}, \quad (28)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Gamma_s &= [J_s^{(i+1)}(x_1^{(i)}) \ \dots \ J_s^{(i+1)}(x_{r_s}^{(i)})]^T, \\ \Psi_s &= [\Phi_s(x_1^{(i)}) \ \dots \ \Phi_s(x_{r_s}^{(i)})]^T. \end{aligned}$$

根据最小二乘法, 更新神经网络权值  $W_s^{(i+1)}$ :

$$W_s^{(i+1)} = (\Psi_s^T \Psi_s)^{-1} \Psi_s^T \Gamma_s. \quad (29)$$

进而更新控制律

$$u_s^{(i+1)} = -\frac{1}{2}(q^T q + R)^{-1}(G_s^T \frac{\partial \Phi_s^T}{\partial x_{1s}} W_s^{(i+1)} + 2q^T p). \quad (30)$$

对快系统(9), 在第*i*次迭代的状态轨迹 $x_{2f}^{(i)}(x_0, \cdot)$ 中选取 $r_f \geq N_f$ 个状态点 $x_k^{(i)} = x_{2f}^{(i)}(x_0, t_k) (k = 1, 2, \dots, r_f)$ , 并且分别计算

$$J_f^{(i+1)}(x_k^{(i)}) = \int_{t_k}^{\infty} L_f(x_{2f}(x_0, t), u_f^{(i)}) dt. \quad (31)$$

根据式(32)调整 $W_f^{(i+1)}$ 即得性能指标 $J_f^{(i+1)}$ :

$$W_f^{(i+1)} = (\Psi_f^T \Psi_f)^{-1} \Psi_f^T \Gamma_f, \quad (32)$$

其中:

$$\Gamma_f = [J_f^{(i+1)}(x_1^{(i)}) \ \dots \ J_f^{(i+1)}(x_{r_f}^{(i)})]^T, \\ \Psi_f = [\Phi_f(x_1^{(i)}) \ \dots \ \Phi_f(x_{r_f}^{(i)})]^T,$$

从而得到 $u_f^{(i+1)}$ :

$$u_f^{(i+1)} = -\frac{1}{2}R^{-1}G_f^T \frac{\partial \Phi_f^T}{\partial x_{2f}} W_f^{(i+1)}. \quad (33)$$

综上所述, 可得到奇异摄动系统的基于神经网络的近似最优控制算法.

**算法 1** 1) 初始化 $J_s^{(0)}, J_f^{(0)}$ , 且保证由此确定的初始控制律 $u_s^{(0)}, u_f^{(0)}$ 是稳定的.

2) 在控制律 $u_s^{(i)}, u_f^{(i)} (i = 1, 2, \dots)$ 作用下从任意 $x_0$ 运行系统, 得到状态轨迹 $x_{1s}^{(i)}(x_0, \cdot), x_{2f}^{(i)}(x_0, \cdot)$ .

3) 更新性能指标函数 $J_s^{(i+1)}, J_f^{(i+1)}$ . 在状态轨迹中分别取不同的点, 并计算该点的性能指标值即 $J_s^{(i+1)}(x_j^{(i)}), J_f^{(i+1)}(x_k^{(i)})$ . 根据式(29)(32)调整权值 $W_s^{(i+1)}, W_f^{(i+1)}$ , 并由式(30)(33)更新控制律 $u_s^{(i+1)}, u_f^{(i+1)}$ .

4) 若满足 $\|W_s^{(i+1)} - W_s^{(i)}\| \leq \beta_s, \|W_f^{(i+1)} - W_f^{(i)}\| \leq \beta_f$ , 结束循环. 否则,  $i = i + 1$ 并返回步骤2).

**注 1** 为了保证式(29)(32)中矩阵逆的存在, 选取的各状态值 $x_j^{(i)}, x_k^{(i)}$ 应尽量远离零点<sup>[8]</sup>.

**注 2** 由定理1可知, 初始稳定控制 $u_s^{(0)}, u_f^{(0)}$ 能够保证每次迭代得到的控制律 $u_s^{(i)}, u_f^{(i)}$ 都是稳定的. 因此算法1可以在线实现.

**注 3** 神经网络中基函数 $\Phi$ 可以是多项式、双曲正切函数等. 本文采用的是多项式型, 即由 $\sum_{j=1}^{N/2} (\sum_{k=1}^{n/2} x_k)^{2j}$ 中的各项组成<sup>[10]</sup>.

最后, 根据组合控制原理, 得到 $u_c^{(\infty)} = u_s^{(\infty)} + u_f^{(\infty)}$ . 定理2保证了 $u_c^{(\infty)}$ 是近似最优的.

**定理 2** 对任意小的正常数 $\alpha$ , 存在 $N_s, N_f$ 使得

$u_c^{(\infty)}$ 满足 $\|u_c^{(\infty)} - u^*\| \leq \alpha$ .

**证** 由定理1可知, 只要选取合适的 $N_s, N_f$ , 随着 $i \rightarrow \infty, u_s^{(i)} \rightarrow u_s^*, u_f^{(i)} \rightarrow u_f^*$ , 即 $\forall \alpha_s, \alpha_f, \exists i$ , 使得 $\|u_s^{(i)} - u_s^*\| \leq \alpha_s, \|u_f^{(i)} - u_f^*\| \leq \alpha_f$ .

因此, 只要 $\epsilon$ 足够小以保证 $\alpha - |O(\epsilon)| > 0$ , 就有 $\|u_c^{(\infty)} - u^*\| \leq \alpha - |O(\epsilon)|, \forall \alpha$ . 从而,

$$\|u_c^{(\infty)} - u^*\| = \|u_c^{(\infty)} - u_c^* + u_c^* - u^*\| \leq \|u_c^{(\infty)} - u_c^*\| + \|u_c^* - u^*\| \leq \alpha - |O(\epsilon)| + |O(\epsilon)| = \alpha.$$

证毕.

#### 4 仿真研究(Simulation research)

考虑如下形式的非线性奇异摄动系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \epsilon \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -\sin x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (34)$$

其中 $\epsilon = 0.01$ . 设计最优控制器 $u$ 使得性能指标(2)达到最小, 其中 $Q = 2I_2, R = 1$ .

首先采用形如式(26)的神经网络结构来近似快慢性能指标, 其中基函数向量分别取为

$$\Phi_s = [x_{1s}^2 \ x_{1s}^4 \ x_{1s}^6 \ x_{1s}^8]^T, \Phi_f = x_{2f}^2.$$

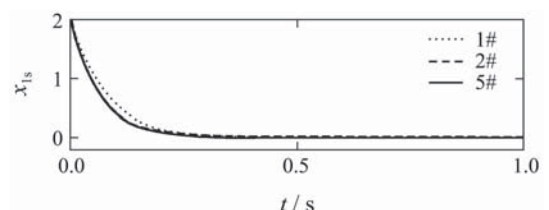
初始权值选为

$$W_s = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, W_f = 0,$$

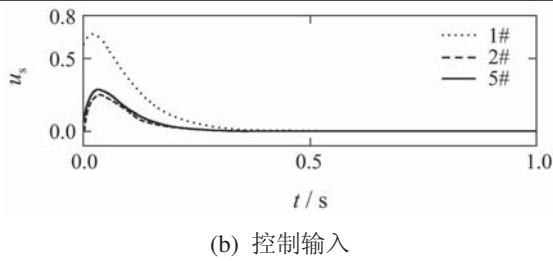
从而可求得两个子系统的初始控制律 $u_s^{(0)}, u_f^{(0)}$ . 根据式(27)(31), 计算获得 $J_s^{(1)}, J_f^{(1)}$ 在不同状态点的值, 进而由式(29)(32)更新权值 $W_s^{(1)}, W_f^{(1)}$ . 如此进行下去, 直到权值收敛到稳定值

$$W_s^* = [0.8917 \ -0.0181 \ 0 \ 0]^T, \\ W_f^* = 0.7258.$$

根据式(30)和(33)分别求得两个子系统的最优控制律, 进而得到组合控制即系统的近似最优控制, 仿真结果如图1~3所示. 图1, 2表示的是不同迭代次数时慢系统和快系统的状态轨迹和控制输入曲线. 可以看出, 随着迭代次数的增加, 曲线逐渐收敛且速度较快. 图3则表示将组合控制作用到奇异摄动系统中时得到的状态轨迹和控制输入曲线. 由此可见本文提出的算法对非线性奇异摄动系统是有效的.

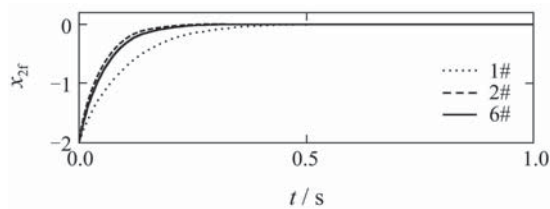


(a) 状态轨迹

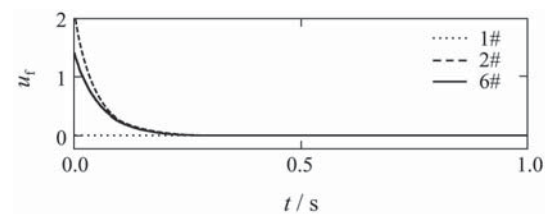


(b) 控制输入

图1 不同迭代次数时慢系统状态轨迹和控制输入  
Fig. 1 State and input trajectories of slow system at different iteration times

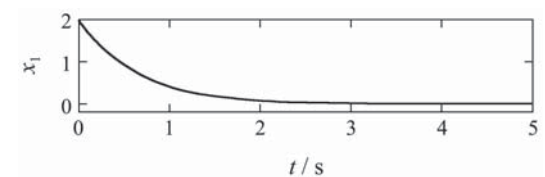


(a) 状态轨迹

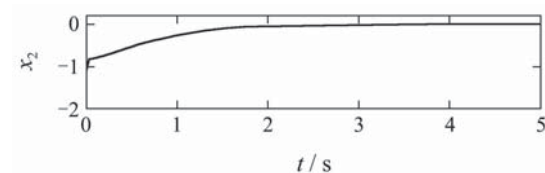


(b) 控制输入

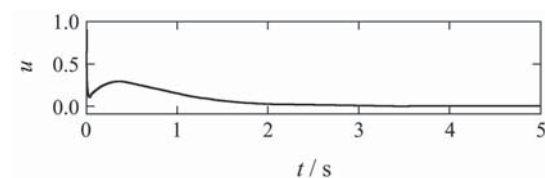
图2 不同迭代次数时快系统状态轨迹和控制输入  
Fig. 2 State and input trajectories of fast system at different iteration times



(a) 状态轨迹



(b) 状态轨迹



(c) 控制输入

图3 组合控制下的状态轨迹和控制输入  
Fig. 3 States and input trajectories with composite control

## 5 结语(Conclusion)

本文对一类非线性奇异摄动系统设计了近似最优控制器. 首先通过控制律和性能指标的迭代更新, 逐步逼近快慢两个子系统的最优控制, 从而避免了求解复杂的HJB方程, 并且给出了完整的收敛性证明. 然后根据组合控制原理, 得到原系统的近似最优控制. 最后仿真研究表明了该算法的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] 许可康. 控制系统中的奇异摄动[M]. 北京: 科学出版社, 1986.  
(XU Kekang. *Singular Perturbation in Control Systems*[M]. Beijing: Science Press, 1986.)
- [2] 刘华平, 孙富春, 何克忠, 等. 奇异摄动控制系统: 理论与应用[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(1): 1-7.  
(LIU Huaping, SUN Fuchun, HE Kezhong, et al. Survey of singularly perturbed control systems: theory and applications[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(1): 1-7.)
- [3] 钟宁帆, 孙敏慧, 邹云. 奇异摄动系统的 $H_\infty$ 控制: 基于奇异系统的方法[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 701-706.  
(ZHONG Ningfan, SUN Minhui, ZOU Yun.  $H_\infty$  control for singularly perturbed systems: a method based on singular system controller design[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 701-706.)
- [4] PRLJACA N, GAJIC Z. A method for optimal control and filtering of multitime-scale linear singularly-perturbed stochastic systems[J]. *Automatica*, 2008, 44(8): 2149-2156.
- [5] FRIDMAN E. Exact slow-fast decomposition of the nonlinear singularly perturbed optimal control problem[J]. *Systems & Control Letters*, 2000, 40(2): 121-131.
- [6] BOUYEKHF R, HAMI A E, MOUDNI A E. Optimal control of a particular class of singularly perturbed nonlinear discrete-time systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1097-1101.
- [7] TAMIMI A A, LEWIS F L, ABU-KHALAF M. Discrete-time nonlinear HJB solution using approximate dynamic programming: convergence proof[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, part B: Cybernetics*, 2008, 38(4): 943-949.
- [8] MURRAY J J, COX C J, LENDARIS G G, et al. Adaptive dynamic programming[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, 2002, 32(2): 140-153.
- [9] KIM Y J, KIM B S, LIM M T. Composite control for singularly perturbed bilinear systems via successive Galerkin approximation[J]. *IEEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 2003, 150(5): 483-488.
- [10] KIM Y J, LIM M T. Parallel optimal control for weakly coupled nonlinear systems using successive Galerkin approximation[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(6): 1542-1547.

## 作者简介:

曹宁 (1986—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为自适应运动规划、最优控制等, E-mail: ningcao@yeah.net;

张化光 (1959—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为网络控制、智能控制等, E-mail: zhanghuaguang@ise.neu.edu.cn;

罗艳红 (1981—), 女, 副教授, 主要研究方向为近似最优控制、神经网络控制等, E-mail: neuluo@gmail.com;

冯德志 (1983—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为非线性控制、模糊控制、最优控制, E-mail: fdzfdzfdz@163.com;

刘燕 (1986—), 女, 硕士研究生, 主要方向为软件工程、数据挖掘与数据分析等, E-mail: liuyan86318@gmail.com.