

用四元数状态切换无迹卡尔曼滤波器估计的飞行器姿态

乔相伟, 周卫东, 吉宇人

(哈尔滨工程大学 自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 在较大初始姿态误差角下, 针对捷联惯导/CCD星敏感器(strap-inertial navigation system/CCD star sensor, SINS/CCD)姿态估计系统扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF)算法精度下降的问题, 提出了基于四元数的状态切换无迹卡尔曼滤波算法. 通过状态实时切换降低了全维无迹卡尔曼滤波(unscented Kalman filter, UKF)的维数, 减小了计算复杂度, 提高了系统的实时性. 文中采用基于特征向量求解的代价函数法计算四元数均值避免了UKF算法中四元数规范化的限制; 利用乘性误差四元数表示姿态更新点与估计点之间的距离, 解决了四元数协方差阵奇异性问题. 仿真实验结果表明: 与EKF相比, 该算法在精度上有较大提高; 与全维UKF算法和修正罗德里格斯参数UKF算法相比, 该算法精度相当但估计时间均有不同程度的减少.

关键词: 姿态估计; 状态切换无迹卡尔曼滤波; 四元数; 均值四元数; 乘性误差四元数

中图分类号: U666.12 **文献标识码:** A

Aircraft attitude estimation based on quaternion state-switching unscented Kalman filter

QIAO Xiang-wei, ZHOU Wei-dong, JI Yu-ren

(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: To deal with the divergence phenomenon of extended Kalman filter (EKF) in SINS/CCD attitude estimation, we put forward a state-switching unscented Kalman filter (UKF) based on quaternion (Q-SUKF). By switching the states in real-time, the dimensions of the full-dimension UKF algorithm are effectively reduced, the computation complexity is decreased and the timeliness is improved. To avoid the quaternion normalization limitation in UKF algorithm, a cost function based on the eigenvector resolution is derived to compute the average quaternion. To deal with the singularity of the quaternion covariance, we employ the multiplicative quaternion error to represent the distance between quaternion update points and the estimation points. The simulation results show that the proposed algorithm provides higher estimation precision than the EKF algorithm, and achieves almost the same estimation precision as the full-dimension UKF and Modified Rodrigues parameter UKF. Furthermore, this algorithm needs shorter estimation time than all other algorithms mentioned above.

Key words: attitude estimation; state-switching unscented Kalman filter; quaternion; average quaternion; multiplicative quaternion error

1 引言(Introduction)

飞行器姿态确定问题是飞行器导航定位中的关键性问题之一. 常用的姿态误差模型主要有欧拉角模型、等效旋转矢量、罗德里格斯参数以及四元数模型^[1-2]. 其中四元数模型应用最广, 然而四元数因为存在参数冗余, 势必受到规范化的限制, 如何克服这种限制, 使其能够顺利应用于非线性滤波算法成为目前四元数非线性滤波中研究的热点问题^[3-4]. 对此, Murrell和Markley等人提出了乘性四元数扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF)算法, 通过构造乘性误差四元数来计算四元数协方差, 不仅避免了四元数规范化的限制, 而且解决了四元数协方差奇异性问题^[5-6], 但是EKF算法本质是对

非线性函数的一阶泰勒展开, 当非线性度较强时EKF算法的高阶截断误差就会较大程度地影响滤波的精度和稳定性. 针对此, 众多学者进行了大量的研究. 其中, Julier和Uhlman提出的基于UT(unscented transformation)变换的UKF(unscented Kalman filter)算法因为避免了Jacobin矩阵的计算且估计精度至少达到二阶以上, 所以广泛应用于各种非线性系统中^[7-8]. 在此基础上, 武元新等人又提出了全维状态UKF算法^[9], 通过将过程噪声和量测噪声引入状态变量之中, 进行滤波计算进一步提高了状态估计的精度. 然而这种算法同时也带来了状态变量维数倍增的问题, 一定程度地增加了滤波的计算量, 影响了系统的实时性. 针对此, 本文给出了一种系统过程

与量测过程不相关时的状态切换UKF算法, 通过在时间更新和量测更新阶段切换不同的滤波状态来降低滤波的维数, 从而达到减小计算量的目的. 将四元数应用于UKF算法还存在一个四元数均值计算问题. 由于四元数为旋转矢量, 直接进行数学意义上的四则运算不仅将破坏其规范化限制而且无法得到理想的姿态更新值. 对此, Crassidis提出了罗德里格斯参数与四元数相结合的UKF算法^[10], 通过参数之间的相互转换, 既发挥了四元数计算简单的优点, 又避免了四元数的规范化限制. 但这种相互转化一定程度地增加了计算负担, 延长了姿态确定的时间. 针对此, Markley等提出姿态矩阵代价函数法, 将四元数均值问题转换为类似Wahba的代价函数极值问题, 成功解决了四元数加权均值规范化问题^[11-13]. 基于此, 本文提出了一种基于四元数的状态切换UKF算法(Q-SUKF), 针对较大初始姿态误差角的飞行器姿态仿真实验表明, 与EKF相比该算法具有更高的滤波精度和稳定性, 与全维状态UKF算法和文献^[10]的算法相比, 系统实时性也都得到了不同程度的提高.

2 飞行器姿态确定模型(The aircraft attitude deterministic model)

2.1 姿态四元数微分方程(The attitude quaternion differential equation)

定义姿态四元数 q 为一四维向量:

$$q \equiv [q_0 \ \rho^T]^T, \quad (1)$$

其中 $\rho \equiv [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ 为向量部分; q_0 为标量部分. 有

$$q^T q = \|q\|^2 = \rho^T \rho + q_0^2 = 1. \quad (2)$$

由四元数表示的姿态矩阵如下:

$$A(q) = (q_0^2 - \rho^T \rho) I_{3 \times 3} + 2\rho\rho^T + 2q_0 \langle \rho \times \rangle, \quad (3)$$

其中: $I_{3 \times 3}$ 为 3×3 的单位矩阵, $\langle \rho \times \rangle$ 为斜对称矩阵, 有

$$\langle \rho \times \rangle = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

四元数微分方程由下式表示^[14]:

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \omega = \frac{1}{2} \Omega(\omega) \cdot q, \quad (4)$$

$$\text{其中 } \Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2 传感器模型(The sensor model)

本文采用光纤陀螺来提取角速度, 其输出模型可表示为^[14]:

$$\omega_g = \omega - b - \eta_a, \quad (5)$$

$$\dot{b} = \eta_b, \quad (6)$$

其中 ω_g 为实际的陀螺输出值, ω 为真实值, b 为陀螺漂移, η_a 和 η_b 分别是均值为0, 方差为 σ_a^2 和 σ_b^2 的高斯白噪声.

2.3 CCD星敏感器量测模型建立(The CCD star sensor measurement model)

本文直接采用CCD星敏感器的四元数输出来测量陀螺的姿态, 其模型如下:

$$q_s = \delta q \otimes q, \quad (7)$$

其中 δq 对应的是星跟踪器的量测噪声, 可表示为 η_s , 是均值为零方差为 σ_s^2 的高斯白噪声.

3 状态切换UKF算法(The state switching UKF algorithm)

3.1 UKF算法(The UKF algorithm)

假设离散系统状态方程和观测方程为:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k(x_k, w_k, k), \\ z_k = h(x_k, v_k, k), \end{cases} \quad (8)$$

其中: x_k 为 $n \times 1$ 维状态向量, z_k 为 $m \times 1$ 维观测向量, 系统噪声 w_k 和观测噪声 v_k 分别为协方差为 Q_k 和 R_k 的高斯白噪声.

UKF具体步骤如下:

1) 状态参数初始化.

假定初始状态和方差分别为: $\hat{x}_0 = E(x_0)$, $P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$, 则全维初始状态和方差分别为: $\hat{x}_0^a = E[x_0^a] = [\hat{x}_0^T \ 0 \ 0]^T$,

$$P_0^a = E[(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_0 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 \end{bmatrix}.$$

2) 时间更新.

在 $k-1$ 时刻sigma点选取

$$\chi_{k-1}^a = [\hat{x}_{k-1}^a \hat{x}_{k-1}^a \pm \sqrt{(L+\lambda)P_{k-1}^a}], \quad (9)$$

对应的均值权值和方差权值选取:

$$\begin{cases} \omega_0^m = \frac{\lambda}{L+\lambda}, \\ \omega_0^c = \frac{\lambda}{L+\lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta), \\ \omega_i^m = \omega_i^c = \frac{1}{2(L+\lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2L. \end{cases} \quad (10)$$

这里 χ_{k-1}^a 和 ω_i 分别代表sigma点及其对应的权值, $L = 2n + m$, $\lambda = \alpha^2(2n + m + \kappa) - 2n - m$. α 表示尺度参数. κ 为冗余量, 通常设置为0. β 用于引入先验状态信息^[7].

通过非线性状态方程 $\chi_{k|k-1}^a = f(\chi_{k-1}^x, \chi_{k-1}^w)$, 状态预测均值和方差得以确定:

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} \omega_i^m \chi_{i,k|k-1}^a, \quad (11)$$

$$P_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} \omega_i^c [\chi_{i,k|k-1}^a - \hat{x}_{k|k-1}] [\chi_{i,k|k-1}^a - \hat{x}_{k|k-1}]^T. \quad (12)$$

3) 量测更新.

量测更新阶段sigma点选取:

$$\chi_{k-1}^{*a} = [\hat{x}_{k|k-1} \quad \hat{x}_{k|k-1} \pm \sqrt{(L+\lambda)P_{k|k-1}}], \quad (13)$$

通过非线性量测方程 $\xi_{k|k-1} = h(\chi_{k-1}^{*a}, \chi_{k-1}^v)$, 得到量测预测均值及方差:

$$\hat{z}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} \omega_i^m \xi_{i,k|k-1}^*, \quad (14)$$

$$P_{zz,k} = \sum_{i=0}^{2L} \omega_i^{(c)} (\xi_{i,k|k-1}^* - \hat{z}_{k|k-1}) (\xi_{i,k|k-1}^* - \hat{z}_{k|k-1})^T, \quad (15)$$

$$P_{xz,k} = \sum_{i=0}^{2L} \omega_i^c (\chi_{i,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1}) (\xi_{i,k|k-1}^* - \hat{z}_{k|k-1})^T. \quad (16)$$

4) 状态更新.

状态增益矩阵:

$$K_k = P_{xz,k} P_{zz,k}^{-1}. \quad (17)$$

状态更新值:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - \hat{z}_{k|k-1}). \quad (18)$$

状态误差方差矩阵:

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{zz,k}^{-1} K_k^T. \quad (19)$$

3.2 状态切换UKF算法(The state switching UKF algorithm)

由上述全维状态UKF算法可知, 量测噪声也参与了状态预测的过程, 事实上, 大多数情况下量测过程与状态过程是不相关的, 量测噪声在状态预测过程中并没有得到更新只是单纯地增加了滤波的计算量, 为此本文给出一种状态切换的UKF滤波算法, 以减小UKF算法的计算量, 提高滤波的实时性. 其具体步骤如下:

状态预测过程因为观测噪声没有参与, 选取状态变量为 $L_1 = 2n$ 维, 即

$$x_{k-1}^{ax} = [\hat{x}_{k-1}^T \quad \hat{w}_{k-1}^T]^T, \quad P_{k-1}^{ax} = \begin{bmatrix} P_{k-1} & 0 \\ 0 & Q_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

对应的均值及方差权值为

$$\begin{cases} \omega_0^m = \frac{\lambda}{L_1 + \lambda}, \\ \omega_0^c = \frac{\lambda}{L_1 + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta), \\ \omega_i^m = \omega_i^c = \frac{1}{2(L_1 + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2L_1. \end{cases} \quad (21)$$

依照前面的UKF算法步骤, 进行时间更新得到状

态的一步预测均值和方差, 分别为:

$$\hat{x}_{k|k-1}^{ax} = \sum_{i=0}^{2L_1} \omega_i^m \chi_{i,k|k-1}^{ax}, \quad (22)$$

$$P_{k|k-1}^{ax} = \sum_{i=0}^{2L_1} \omega_i^c [\chi_{i,k|k-1}^{ax} - \hat{x}_{k|k-1}^{ax}] [\chi_{i,k|k-1}^{ax} - \hat{x}_{k|k-1}^{ax}]^T. \quad (23)$$

量测更新过程中, 由于过程噪声不参与更新, 切换状态量为 $L_2 = n + m$ 维:

$$x_k^{az} = [\hat{x}_{k|k-1}^T \quad \hat{v}_k^T]^T, \quad P_{k|k-1}^{az} = \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^x & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}. \quad (24)$$

对应的均值及方差权值选取为

$$\begin{cases} \omega_0^m = \frac{\lambda}{L_2 + \lambda}, \\ \omega_0^c = \frac{\lambda}{L_2 + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta), \\ \omega_i^m = \omega_i^c = \frac{1}{2(L_2 + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2L_2. \end{cases} \quad (25)$$

量测更新得到的量测一步预测均值及量测方差和互方差计算如全维UKF算法所述.

由上面状态切换算法可知, 在时间更新和量测更新滤波过程中状态维数分别由 $2n + m$ 维减小为 $2n$ 维和 $n + m$ 维, 对应的sigma点分别由全维的 $4n + 2m + 1$ 个点减小为 $4n + 1$ 个点和 $2n + 2m + 1$ 个点. 这就大大减小了全维UKF算法的计算量, 提高了系统的实时性.

4 四元数状态切换UKF算法(The quaternion state switching UKF algorithm)

4.1 均值四元数(The average quaternion)

向量加权均值的一般算法如下^[15]:

$$\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i q_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i}. \quad (26)$$

由式(26)算法可知, 如果四元数均值计算也采取上述方法, 那么得到的均值四元数将不再满足规范化约束; 之所以如此, 主要是因为四元数本质是旋转矢量而非普通向量. 为此, 早在60年代Wahba就提出了构造函数代价求解四元数均值问题, 基于这种思想文献学者们提出了各种不同的算法. 其中文献[12]直接以姿态矩阵为对象来求解加权均值四元数的方法因为不涉及矩阵的奇异值分解使得算法相对简单而得到较为的广泛应用. 该算法具体如下^[12]:

构造姿态矩阵代价函数如下:

$$\bar{q} = \arg \min_{\|q\|=1} \sum_{i=1}^N \omega_i \|A(q) - A(q_i)\|_F^2, \quad (27)$$

其中: $A(q)$ 是由滤波四元数构成的正交姿态矩阵, $\|\cdot\|_F^2$ 为Frobenius范数. q_i 为更新四元数sigma点.

由Frobenius范数定义及姿态矩阵的正交性可以得到

$$\|A(q) - A(q_i)\|_F^2 = 6 - 2\text{tr}[A(q)^T A(q_i)]. \quad (28)$$

将式(29)代入式(27)可得

$$\bar{q} = \arg \min_{\|q\|=1} \sum_{i=1}^N \omega_i \{6 - 2\text{tr}[A(q)^T A(q_i)]\}, \quad (29)$$

从而四元数均值可转化为求如下代价函数值最大时的向量解:

$$\begin{aligned} \bar{q} = \arg \max_{\|q\|=1} \sum_{i=1}^N \omega_i \text{tr}[A(q)^T A(q_i)] = \\ \arg \max_{\|q\|=1} \text{tr}[A(q)^T B], \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $B = \sum_{i=1}^N \omega_i A(q_i)$.

将式(2)代入式(31), 则式(31)可表示为如下二次型形式为

$$\bar{q} = \arg \max_{\|q\|=1} q^T K q, \quad (31)$$

其中 $K = 4M - \omega_i I_{4 \times 4}$, 考虑到本文均值权值和为1, 从而有

$$K = 4M - I_{4 \times 4}, \quad M = \sum_{i=1}^N \omega_i q_i q_i^T, \quad (32)$$

从而均值四元数 \bar{q} 即为矩阵 K 最大特征值对应的特征向量.

4.2 四元数状态切换 UKF 算法(The quaternion state switching UKF algorithm)

考虑到四元数UKF算法中扰动四元数点sigma选取时的规范化限制, 本文状态变量中四元数部分只选取其向量部分来表示. 从而加入噪声之后的系统全维状态变量可表示为

$$x^a = [x^T \ x_n^T]^T = [\rho^T \ b^T \ \eta_a^T \ \eta_b^T \ \eta_s^T]^T,$$

其中: x_n 为噪声部分, x 为 n 维状态变量, 由四元数和陀螺漂移组成.

1) 初始化.

$$\hat{x}_0^a = E(x_0^a) = [\hat{\rho}_0^T \ \hat{b}_0^T \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (33)$$

$$P_0^a = E[(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_s^2 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

2) 时间更新.

时间更新过程中状态变量选取为

$$x_{k-1}^{ax} = [\rho_{k-1}^T \ b_{k-1}^T \ \eta_{a_{k-1}}^T \ \eta_{b_{k-1}}^T]^T, \quad (35)$$

其中的扰动sigma点选取为:

$$\delta\chi_{i,k-1}^{ax} = (\sqrt{(L_1 + \lambda)P_{k-1}^{ax}})_i, \quad (36)$$

其中: $L_1 = 2n$, P_{k-1}^{ax} 为 $k-1$ 时刻状态误差方差矩阵 P_{k-1} 和过程噪声矩阵 Q_{k-1} 组成的扩维方差阵.

将扰动sigma点分为姿态部分和非姿态部分

$$\delta\chi_{i,k-1}^{ax} = \begin{bmatrix} \delta\chi_{i,k-1}^\rho \\ \delta\chi_{i,k-1}^{ex} \end{bmatrix}.$$

由于滤波更新过程是由四元数进行传递, 所以姿态部分sigma点选取为四元数点. 假定 $k-1$ 时刻四元数估计值为 \hat{q}_{k-1} , 扰动四元数为 $\delta\hat{q}_{i,k-1}$, 则四元数部分的sigma点可表示为

$$\begin{aligned} \chi_{i,k-1}^q = [\hat{q}_{i,k-1} \ \delta\hat{q}_{i,k-1} \otimes \hat{q}_{i,k-1} \ \delta\hat{q}_{i,k-1}^{-1} \otimes \hat{q}_{i,k-1}], \\ i = 0, 1, \dots, 2L_1, \end{aligned} \quad (37)$$

其中: $\delta\hat{q}_{i,k-1}(i) = [\delta\chi_{i,k-1}^{q_0} \ (\delta\chi_{i,k-1}^\rho)^T]^T$, $\delta\chi_{i,k-1}^{q_0}$ 为扰动四元数 $\delta\hat{q}_{i,k-1}$ 的标量部分, 由下式算得:

$$\delta q_{i,k-1} = \sqrt{1 - (\delta\chi_{i,k-1}^\rho)^T \delta\chi_{i,k-1}^\rho}. \quad (38)$$

非四元数部分sigma点选取如下:

$$\begin{aligned} \chi_{i,k-1}^{ex} = [\hat{x}_{i,k-1}^{ex} \ \hat{x}_{i,k-1}^{ex} \pm \delta\chi_{i,k-1}^{ex}], \\ i = 0, 1, \dots, 2L_1, \end{aligned} \quad (39)$$

上述sigma点对应的均值权值和方差权值由式(20)表示.

四元数时间更新通过 $\chi_{i,k|k-1}^q = \Omega_k(\hat{\omega}_{k-1})\chi_{i,k-1}^q$ 计算. 其中:

$$\Omega_k(\hat{\omega}_{k-1}) = \begin{bmatrix} \mathcal{H} & \hat{\psi}_{k-1} \\ -\hat{\psi}_{k-1}^T & \cos(\frac{1}{2}\|\hat{\omega}_{k-1}\|\Delta t) \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$\mathcal{H} = \cos(\frac{1}{2}\|\hat{\omega}_{k-1}\|\Delta t)I_{3 \times 3} - [\hat{\psi}_{k-1} \times],$$

$$\hat{\omega}_{k-1} = \hat{\omega}_{k-1}\tilde{\omega}_{k-1} - \hat{b}_{k-1},$$

$$\hat{\psi}_{k-1} = \frac{\sin(\frac{1}{2}\|\hat{\omega}_{k-1}\|\Delta t)\hat{\omega}_{k-1}}{\|\hat{\omega}_{k-1}\|},$$

$\tilde{\omega}_{g,k-1}$ 为 $k-1$ 时刻的陀螺输出测量值, \hat{b}_{k-1} 为 $k-1$ 时刻的陀螺漂移的估计值.

非四元数部分时间更新为

$$\chi_{i,k|k-1}^{ex} = \chi_{i,k-1}^{ex}. \quad (41)$$

四元数一步预测均值计算按式(32)进行, 可得

$$\hat{q}_{k|k-1} = \arg \max \chi_{i,k|k-1}^q K(\chi_{i,k|k-1}^q)^T. \quad (42)$$

非四元数部分状态预测均值为

$$\hat{x}_{k|k-1}^{ex} = \sum_{i=0}^{2L_1} \omega_i^m \chi_{i,k|k-1}^{ex}. \quad (43)$$

为避免四元数协方差阵奇异性, 采用误差四元数 $\delta\chi_{i,k|k-1}^q$ 来表示四元数时间更新点与均值点之间

的距离, 即

$$\delta\chi_{i,k|k-1}^q = \hat{q}_{k|k-1} \otimes (\chi_{i,k|k-1}^q)^{-1}. \quad (44)$$

从而姿态部分预测误差方差阵为

$$P_{k|k-1}^\rho = \sum_{i=0}^{2L_1} \omega_i^c \delta\chi_{i,k|k-1}^\rho (\delta\chi_{i,k|k-1}^\rho)^\top, \quad (45)$$

其中 $\delta\chi_{i,k|k-1}^\rho$ 为预测误差四元数的向量部分.

非四元数部分预测误差协方差矩阵为

$$P_{k|k-1}^{ex} = \sum_{i=0}^{2L_1} \omega_i^c (\chi_{i,k|k-1}^{ex} - \hat{x}_{k|k-1}^{ex}) (\chi_{i,k|k-1}^{ex} - \hat{x}_{k|k-1}^{ex})^\top. \quad (46)$$

3) 测量更新.

在测量更新部分由于过程噪声未参与其中, 切换系统状态为

$$x_{k|k-1}^{az} = [\hat{\rho}_{k|k-1}^\top \hat{b}_{k|k-1}^\top \hat{\eta}_{s_{k-1}}^\top]^\top. \quad (47)$$

测量更新过程中sigma点选取, 其中扰动点选取为

$$\delta\chi_{i,k|k-1}^{az} = \sqrt{(L_2 + \lambda) P_{k|k-1}^{az}}, \quad (48)$$

其中: $L_2 = n + m$, $P_{k|k-1}^{az}$ 是由时刻 k 的状态预测误差方差阵 $P_{k|k-1}$ 和量测噪声阵 R_k 构成的扩维方差阵.

将其分为姿态部分和非姿态部分为

$$\delta\chi_{i,k|k-1}^{az} = \begin{bmatrix} \delta\chi_{i,k|k-1}^\rho \\ \delta\chi_{i,k|k-1}^{ez} \end{bmatrix}.$$

姿态四元数sigma点选取为

$$\chi_{i,k|k-1}^q = [\hat{q}_{k|k-1} \quad \delta\chi_{i,k|k-1}^q \otimes \hat{q}_{k|k-1} \quad \delta\chi_{i,k|k-1}^q \otimes \hat{q}_{k|k-1}], \quad (49)$$

其中 $\delta\chi_{i,k|k-1}^q$ 取值类似于时间更新中的扰动四元数取值, 由下式得到:

$$\begin{cases} \delta\chi_{i,k|k-1}^q = [\delta\chi_{i,k|k-1}^{q_0} \quad (\delta\chi_{i,k|k-1}^\rho)^\top]^\top, \\ \delta\chi_{i,k|k-1}^{q_0} = \sqrt{1 - (\delta\chi_{i,k|k-1}^\rho)^\top \delta\chi_{i,k|k-1}^\rho}. \end{cases} \quad (50)$$

星敏传感器输出的白噪声四元数形式为

$$\chi_{i,k}^{q_{ns}} = [\sqrt{1 - (\delta\chi_{i,k}^{q_{ns}})^\top \delta\chi_{i,k}^{q_{ns}}} \quad (\delta\chi_{i,k}^{q_{ns}})^\top]^\top. \quad (51)$$

非四元数部分sigma点选取为

$$\chi_{i,k|k-1}^{ez} = [\hat{x}_{k|k-1}^{ez} \quad \hat{x}_{k|k-1}^{ez} \pm \delta\chi_{i,k|k-1}^{ez}]. \quad (52)$$

其中, $\hat{x}_{k|k-1}^{ez}$ 由陀螺漂移预测均值和量测噪声组成, 从而可表示为

$$\hat{x}_{k|k-1}^{ez} = [\hat{b}_{k|k-1}^\top \quad 0]^\top. \quad (53)$$

四元数量测更新为

$$Z_{i,k|k-1}^q = \chi_{i,k}^{q_{ns}} \otimes \chi_{i,k|k-1}^q. \quad (54)$$

四元数量测预测均值计算按公式(32)进行:

$$\hat{z}_{k|k-1}^q = \arg \max Z_{i,k|k-1}^q K(Z_{i,k|k-1}^q)^\top. \quad (55)$$

由于量测量只有四元数, 所以系统状态量测误差方差矩阵为

$$\delta Z_{i,k|k-1}^q = \hat{z}_{k|k-1}^q \otimes (Z_{i,k|k-1}^q)^{-1}, \quad (56)$$

$$P_{zz,k} = P_{z,k|k-1}^\rho =$$

$$\sum_{i=0}^{2L_2} \omega_i^c \delta Z_{i,k|k-1}^\rho (\delta Z_{i,k|k-1}^\rho)^\top. \quad (57)$$

由于白噪声估计值最好为零, 所以状态更新只考虑姿态部分和陀螺漂移部分, 从而其互协方差矩阵可由下式计算得到:

$$P_{xz,k} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{2L_2} \omega_i^c \delta x_{k|k-1}^\rho [\delta Z_{i,k|k-1}^\rho]^\top \\ \sum_{i=0}^{2L_2} \omega_i^c [\hat{\chi}_{i,k|k-1}^b - \hat{x}_{k|k-1}^b] [\delta Z_{i,k|k-1}^\rho]^\top \end{bmatrix}. \quad (58)$$

从而状态增益矩阵为

$$K_k = P_{xz,k} (P_{zz,k})^{-1}. \quad (59)$$

对应的状态误差量更新为

$$\delta \hat{x}_k = K_k \delta \hat{z}_{k|k-1}^\rho, \quad (60)$$

其中: $\delta \hat{x}_k = [\delta \hat{\rho}_k^\top \quad \delta \hat{b}_k^\top]^\top$, $\delta \hat{\rho}_k$ 为姿态估计误差四元数向量部分, $\delta \hat{z}_{k|k-1}^\rho$ 为量测误差四元数 $\delta \hat{z}_{k|k-1}^q = q_s \otimes (\hat{z}_{k|k-1}^q)^{-1}$ 的向量部分.

从而四元数状态更新为

$$\hat{q}_k = \delta \hat{q}_k \otimes \hat{q}_{k|k-1}, \quad (61)$$

其中

$$\delta \hat{q}_k = [\sqrt{1 - \delta \hat{\rho}_k^\top \delta \hat{\rho}_k} \quad \delta \hat{\rho}_k^\top]^\top.$$

陀螺漂移更新为

$$\hat{b}_k = \hat{b}_{k|k-1} + \delta \hat{b}_k. \quad (62)$$

状态误差方差矩阵为

$$P_k = P_{k|k-1} - K_k P_{zz,k} K_k^\top, \quad (63)$$

其中 $P_{k|k-1}$ 为由姿态部分和陀螺漂移部分组成的状态预测误差方差矩阵可由下式表示:

$$P_{k|k-1} = \begin{bmatrix} P_{k|k-1}^\rho & \sum_{i=0}^{2L_1} \omega_i^c \delta\chi_{i,k|k-1}^\rho \mathcal{N}^\top \\ \sum_{i=0}^{2L_1} \omega_i^c \mathcal{N} (\delta\chi_{i,k|k-1}^\rho)^\top & P_{k|k-1}^b \end{bmatrix}, \quad (64)$$

其中:

$$P_{k|k-1}^b = \sum_{i=0}^{2L_1} \omega_i^c \mathcal{N} \mathcal{N}^\top, \quad \mathcal{N} = \hat{\chi}_{i,k|k-1}^b - \hat{b}_{k|k-1}.$$

5 仿真实验及分析(Simulation and analysis)

本文以软件SINS/CCD姿态估计系统为平台,开发语言主要是MATLAB和C++,主要包括:航迹仿真, CCD仿真,捷联惯性导航系统,滤波系统和姿态估计系统等.假定实验初始条件为:光纤陀螺测量白噪声为 0.02 ($^{\circ}/h$),驱动白噪声为 0.002 ($^{\circ}/h$),陀螺输出采样频率为 100Hz ,星敏感器采用两个光轴垂直安装,其输出频率为 1Hz ,飞行器初始姿态误差设定:横滚角,俯仰角,偏航角分别为 1° , 5° , 10° .初始陀螺漂移在三轴上分别为 1 ($^{\circ}/h$), 1 ($^{\circ}/h$), 1 ($^{\circ}/h$).星敏感器运动速率为 0.05 ($^{\circ}/s$),测量白噪声标准差为 $10''$.卡尔曼滤波器中的姿态和陀螺漂移估计值均设定为零.

根据以上仿真条件分别采用EKF, UKF, 状态切换UKF(SUKF)算法及文献[10]的修正罗德里格斯UKF算法(MUKF)进行仿真实验仿真结果见图1-3和表1.由图1可以看出,当初始姿态误差角较小取为 1° 时, EKF算法精度虽略低于UKF,但也取得了较高的估计精度:由图2、3可以看出当初始姿态误差角较大分别取为 5° 和 10° 时, EKF算法精度明显低于UKF,这是由于EKF算法在处理非线性时存在较大的高阶截断误差造成的.另外,由图1-3可以看出文章提出的SUKF算法和文献[10]的MUKF虽然在精度上和全维UKF算法相当,但在收敛时间上都减小,尤其是SUKF算法与全维UKF相比收敛时间缩短了大约三分之一,这是由于SUKF算法通过实时切换系统状态减小了状态的维数,降低了运算的复杂度.

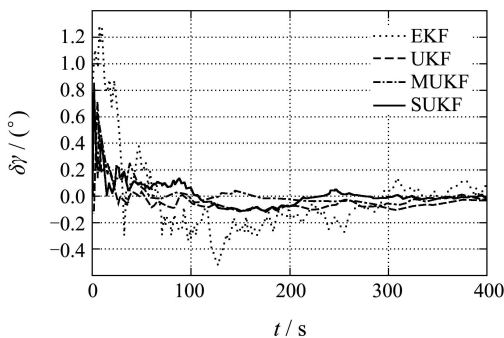


图1 横滚角姿态误差对比

Fig. 1 Comparison of roll angle errors

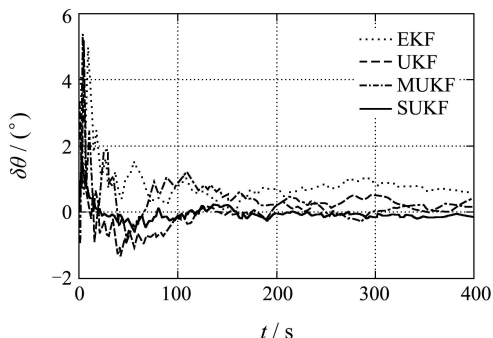


图2 俯仰角姿态误差对比

Fig. 2 Comparison of pitch angle errors

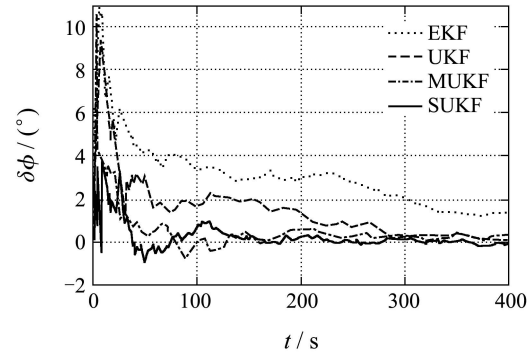


图3 偏航角姿态误差对比

Fig. 3 Comparison of yaw angle errors

由表1,平均一次滤波迭代所用时间也可以看出, SUKF算法与UKF算法减少了大约三分之一,与MUKF算法相比运算时间也有一定地降低,这是因为SUKF算法避免了MUKF算法中参数之间的频繁转换所造成的.

表1 平均一次迭代滤波所用时间

Table 1 Time consumption comparison of average one time iteration filters

滤波算法	EKF	UKF	MUKF	SUKF
所用时间/ms	2.603	11.436	8.348	4.672

6 结论(Conclusion)

为了解决全维姿态估计UKF算法实时性差的问题,本文提出了一种状态切换UKF算法,通过在时间更新和量测更新阶段选取不同的状态变量,降低滤波的维数,提高了系统的实时性.针对四元数无迹卡尔曼滤波算法中四元数规范化的限制,本文给出了一种基于四元数的状态切换UKF算法,考虑四元数为一旋转矢量,在旋转空间中解决了四元数的加权均值计算和方差计算问题,扩展了UKF算法的应用范围.最后,利用实验室SINS/CCD组合姿态估计系统为平台,进行了仿真实验,实验结果表明:与EKF算法相比, UKF算法在精度上有较大提高:与全维UKF算法和基于罗德里格斯参数的UKF算法相比, SUKF算法在实时性上都有一定地改善.

参考文献(References):

- [1] MARKELY F L. Attitude error representations for Kalman filtering[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 63(2): 311 - 317.
- [2] CHUNG D, LEE J. Strap-down INS error model for multi-position alignment[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1996, 32(4): 1362 - 1366.
- [3] SHUSTER M D. Constraint in attitude estimation part I: constrained estimation[J]. *Journal of the Astronautical Sciences*, 2003, 51(1): 51 - 74.

- [4] CHOUKROUN D, BAR-ITZHACK I, OSHMAN Y. A novel quaternion filter[J]. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2002, 2: AIAA - 02 - 4460
- [5] PSIAKI M L. The super-iterated extended Kalman filter[J]. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2004, 8: AIAA - 04 - 5418
- [6] SHUSTER M D. Kalman filtering of spacecraft attitude and the QUEST model[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, 13(3): 506 - 514.
- [7] JULIER S J, UHLMAN J. A new method for the nonlinear transformation of means and co-variances in filters and estimators[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(3): 477 - 482.
- [8] JULIER S J, UHLMAN J. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2004, 92(3): 401 - 422.
- [9] WU Y X, WU M P, HU D W. Unscented Kalman filtering for additive noise case augmented versus non-augmented[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(5): 357 - 360.
- [10] CRASSIDIS J L, MARKLEY F L. Unscented filtering for spacecraft attitude estimation[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 26(4): 536 - 542.
- [11] MOAKHER M. Means and averaging in the group of rotations[J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2002, 24(1): 1 - 16.
- [12] MARKLEY F L, CHENG Y, CRASSIDIS J L. Averaging quaternions[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30 (4): 1193 - 1196.
- [13] MARKLEY F L. Attitude determination using vector observations and the singular value decomposition[J]. *Journal of the Astronautical Sciences*, 1988, 36(3): 245 - 258.
- [14] OSHMAN Y, CARMÍ A. Attitude estimation from vector observations using genetic algorithm-embedded quaternion particle filter[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29(4): 879 - 891.
- [15] EGZIABHER D G. Design of multi-sensor attitude determination systems[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2004, 40(2): 627 - 649.

作者简介:

乔相伟 (1983—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为组合导航及信息融合技术, E-mail: qiaoxiangwei@126.com;

周卫东 (1966—), 男, 教授, 目前研究方向为组合导航技术及数据融合、容错技术, E-mail: zhouweidong@hrbeu.edu.cn;

吉宇人 (1986—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为传递对准及非线性滤波算法, E-mail: baziji@163.com.