文章编号: 1000−8152(2011)12−1779−07

非参数不确定时滞系统的重复控制

金　奎[1], 孙明轩[1], 吴忻生[2]

(1. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023; 2. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 针对非参数不确定时滞系统, 给出能够实现跟踪误差本身沿整个周期完全跟踪的重复控制器设计. 针对系统不确定特性的界函数已知和未知两种情形, 分别分析闭环系统的稳定性与收敛性. 控制器中学习部分采用完全饱和形式, 使得参数估计囿于一预先给定的范围内. 该控制律可保证闭环系统内所有信号有界以及跟踪误差本身趋于零. 数值仿真表明算法的有效性.

关键词: 非参数不确定; 时滞; 重复控制

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Repetitive control for a class of time-delay systems with non-parametric uncertainties

JIN Kui[1], SUN Ming-xuan[1], WU Xin-sheng[2]

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China
2. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: This paper presents a repetitive control design for a class of time-delay systems with non-parametric uncertainties. The global stability of the learning system and the asymptotic convergence of the tracking error are established for cases of both known and unknown bounded functions of system uncertainties, respectively. The estimated parameters are always confined to a pre-defined region by the fully saturated learning algorithms. The repetitive control scheme can guarantee that all the signals in the closed-loop system are bounded and the tracking error will converge to zero as time approaches infinity. The numerical simulation is also carried out to demonstrate the effectiveness of the presented learning scheme.

Key words: non-parametric uncertainties; time-delay; repetitive control

1　引言(Introduction)

重复控制技术[1]适于周期参考轨迹的跟踪及周期干扰的抑制. 大多文献讨论重复控制系统的频域分析和设计, 文献[2, 3]基于Lyapunov-like方法给出了重复控制的时域设计方法. 迭代学习控制[4]是与重复控制[5,6]并行发展的领域, 前者采用迭代学习机制, 每次重复运行时需要进行初始定位操作; 后者采用周期学习机制, 系统连续运行, 无需进行初始定位. 尽管二者存在不同之处, 但它们的学习机制都是利用系统重复运行获得的输出误差来修正控制输入, 获得当前运行的控制输入, 以实现系统沿整个作业区间零误差跟踪的控制目标.

到目前为止, 已发表学习控制文献大多要求系统非线性不确定特性能够被参数化. 文献[2, 7]较早引入Lyapunov-like函数分析系统性能. 文献[8]针对机器人系统, 设计重复控制律证明了系统的稳定性和收敛性. 文献[9]讨论不采用任何限幅机制的情形, 所提出的重复控制律只能保证闭环系统变量的平方在周期上的积分有界以及跟踪误差的平方在周期上的积分趋于零. 文献[5, 6, 10]采用饱和参数估计的方法解决了闭环系统变量本身有界以及跟踪误差本身收敛的的问题. 文献[11]讨论了一类高阶非线性参数系统自适应重复控制问题.

对于非参数不确定非线性系统, 已发表大量的鲁棒控制设计方面的结果[12]. 相对来说, 鲁棒学习控制方面的研究结果较少. 文献[13]设计变结构迭代学习控制器, 采用差分形式的学习律, 最终实现跟踪误差的完全收敛. 文献[14]针对非参数不确定系统, 所给出的重复控制律同样只能保证闭环系统变量的平方在周期上的积分有界以及跟踪误差的平方在周期上的积分趋于零. 文献[15]考虑与文献[14]相同的系统, 与文献[5, 6, 10]饱和参数估计方法不同, 该文不需在估计参数中引入饱和函数, 所设计的自适应控制器保证了闭环系统变量本身有界以及跟踪误差

收稿日期: 2010−05−26; 收修改稿日期: 2011−03−16.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60874041, 61174034).

本身收敛. 文献[16]利用状态反馈线性化的方法研究了在无限时间区间上周期作业的跟踪控制问题. 文献[17]设计鲁棒学习控制器, 利用控制器中的鲁棒部分保证系统稳定性, 利用学习控制部分有效消除系统跟踪误差. 上述文献都没有考虑系统存在时滞的情形.

实际中, 时滞经常出现在各种工程系统中, 时滞的存在往往会影响系统的控制性能, 甚至会导致系统不稳定. 文献[18]对时滞系统进行深入研究, 但仅仅局限在传统方法框架内. 文献[19]针对非线性参数时滞系统, 设计自适应重复控制律.

本文研究非参数不确定时滞系统的重复控制问题. 针对系统不确定特性界函数已知的情形, 基于Lyapunov-like函数设计自适应重复控制器. 针对系统不确定特性界函数未知的情形, 设计鲁棒重复控制器. 不确定特性采用饱和参数估计算法, 使得参数估计囿于一预先给定范围. 设计的重复控制器保证闭环系统内所有变量本身有界以及跟踪误差本身趋于零.

2 问题的提出(Problem formulation)

考虑下述不确定时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+B[f(x(t),x(t-\tau),t)+u(t)], \\ \qquad\qquad t\geqslant 0, \\ x(t)=\chi(t),\ t\in[-\tau,0], \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$是可测的系统状态变量, $u\in\mathbb{R}$是控制变量; $f(x(t),x(t-\tau),t)\in\mathbb{R}$为系统中不确定项, 特别指出, 系统不确定性具有周期性, 即对于任意给定的x_1,x_2, 满足$f(x_1,x_2,t)=f(x_1,x_2,t-T_1)$, T_1已知; 时滞τ为已知常数, 连续函数$\chi(t), t\in[-\tau,0]$表示系统(1)的初始条件; 矩阵$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$和$B\in\mathbb{R}^n$具有如下形式:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注 1 大部分文献中往往要求系统的不确定特性可被参数化, 本文考虑的是非参数不确定性, 未采取任何参数化措施. 由于存在时滞, 针对系统(1)设计重复控制器比文献[14, 15]更复杂. 本文所考虑的系统实际上是文献[14, 15]的推广. 例如, 当不存在时滞时($\tau=0$), 系统(1)与文献[14, 15]中系统相同.

定义标量b的饱和函数

$$\mathrm{sat}(b)=\begin{cases} -\bar{b},\ b<-\bar{b}, \\ b,\quad -\bar{b}\leqslant b\leqslant\bar{b}, \\ \bar{b},\quad b>\bar{b}, \end{cases} \tag{2}$$

式中$\bar{b}>0$为饱和函数限幅值. 本文选取$f_{\max}$作为饱和函数的限幅值.

选取正实数$c_i(i=1,2,\cdots,n)$, 使得$p(s)=s^n+c_ns^{n-1}+\cdots+c_2s+c_1$是Hurwitz多项式, 记

$$A_c=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & \cdots & -c_n \end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}.$$

A_c为相应的Hurwitz矩阵. 存在对应的正定矩阵$P\in\mathbb{R}^{n\times n}, Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$使$PA_c+A_c^{\mathrm{T}}P=-Q$, 其中$P$可调整. 设$l_Q$为矩证$Q$的最小特征值, 存在$Q$, 使$l_Q\geqslant 2$.

给定一周期参考信号$x_{\mathrm{r}}=(x_{\mathrm{r}1},x_{\mathrm{r}2},\cdots,x_{\mathrm{r}n})\in C^1[-\tau,\infty)$, 周期$T_2$已知. 那么函数$f(x_{\mathrm{r}},x_{\mathrm{r}}(t-\tau),t)$也是周期的, 设周期为$T$, T为T_1和T_2的最小公倍数, 且存在一已知的常数$f_{\max}$, 它满足

$$\sup_{t\in[0,T]}|f(x_{\mathrm{r}}(t),x_{\mathrm{r}}(t-\tau),t)|\leqslant f_{\max}.$$

注 2 在实际工业控制中, 被控对象往往被要求执行周期轨迹的跟踪任务, 如逆变电源质量控制、电力系统周期负荷扰动补偿及硬盘/光盘等. 系统中的不确定性都会呈现周期性特点. 重复控制适于解决周期作业的被控对象的控制问题. 本文选取周期函数$f(x_{\mathrm{r}}(t),x_{\mathrm{r}}(t-\tau),t)$作为被学习量, 针对系统(1)设计自适应重复控制器, 以此来达到对周期参考信号$x_{\mathrm{r}}(t)$的跟踪.

定义跟踪误差$e=x-x_{\mathrm{r}}$, 由式(1)得到系统跟踪误差方程为

$$\dot{e}=Ae+B[f(x(t),x(t-\tau),t)+u-\dot{x}_{\mathrm{r}n}]. \tag{3}$$

令

$$\Delta f(x(t),x(t-\tau),t)= \\ f(x(t),x(t-\tau),t)-f(x_{\mathrm{r}}(t),x_{\mathrm{r}}(t-\tau),t). \tag{4}$$

那么系统跟踪误差方程可转化为

$$\dot{e}=A_ce+B[c^{\mathrm{T}}e+\Delta f(x(t),x(t-\tau),t)+ \\ f(x_{\mathrm{r}}(t),x_{\mathrm{r}}(t-\tau),t)+u-\dot{x}_{\mathrm{r}n}]. \tag{5}$$

为了实现上述目标, 本文作下面假设:

假设 1 未知光滑函数$f(x(t),x(t-\tau),t)$满足

$$|f(x(t),x(t-\tau),t)-f(x_{\mathrm{r}}(t),x_{\mathrm{r}}(t-\tau),t)|\leqslant \\ \alpha_1(x(t),x(t-\tau),t)\|x(t)-x_{\mathrm{r}}(t)\|+ \\ \alpha_2(x(t),x(t-\tau),t)\|x(t-\tau)-x_{\mathrm{r}}(t-\tau)\|, \tag{6}$$

其中: $\alpha_1(x(t),x(t-\tau),t)$和$\alpha_2(x(t),x(t-\tau),t)$即为系统不确定特性的界函数.

3 自适应重复控制(Adaptive repetitive control)

这一节针对系统不确定特性的界函数已知情形

设计自适应重复控制器.

学习参数更新采用完全饱和学习律

$$\begin{cases}\hat{f}_{\rm r}(t)=\mathrm{sat}(\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)),\\ \hat{f}_{\rm r}^{*}(t)=\hat{f}_{\rm r}(t-T)+\omega(t)e^{\rm T}PB,\\ \hat{f}_{\rm r}^{*}(t)=0,\ t\in[-T,0],\end{cases} \tag{7}$$

其中$\omega(t)$为学习增益. 定义为

$$\omega(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \gamma\dfrac{t}{T}, & 0\leqslant t\leqslant T,\\ \gamma, & t>T.\end{cases}$$

本文选取$f_{\max}$作为饱和函数的限幅值, 由饱和函数的定义知学习参数$\hat{f}_{\rm r}(t)$被限制在预先的范围$[-f_{\max},f_{\max}]$内.

选取自适应重复控制律为

$$\begin{cases}u(t)=-\hat{f}_{\rm r}(t)-c^{\rm T}e+\dot{x}_{\rm rn}-u_1(t),\\ u_1(t)=\dfrac{1}{2}[2+\alpha_1^2(x(t),x(t-\tau),t)+\\ \qquad \alpha_2^2(x(t),x(t-\tau),t)]e^{\rm T}PB.\end{cases} \tag{8}$$

定理 1 对于满足假设1的系统(1), 给定参考信号$x_{\rm r}$, 系统不确定特性界函数$\alpha_1(x(t),x(t-\tau),t)$与$\alpha_2(x(t),x(t-\tau),t)$已知, 参数更新律(7)和自适应重复控制律(8)可使闭环系统变量$\hat{f}_{\rm r}(t),e(t),u(t),\dot{e}(t)$在$[0,\infty)$上本身有界, 同时系统跟踪误差本身收敛, 即$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0$.

证 I) 为了分析方便, 取$\gamma=1$. 首先证明系统变量在$t\in[0,T]$上的有界性. 选取正定函数$V_1(t)$为

$$V_1(t)=\frac{1}{2}e^{\rm T}Pe+\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}\|e(\nu)\|^2{\rm d}\nu,\ t\in[0,T]. \tag{9}$$

根据式(5), 对$V_1(t)$进行求导

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t)=&-\frac{1}{2}e^{\rm T}Qe+\frac{1}{2}\|e(t)\|^2-\frac{1}{2}\|e(t-\tau)\|^2+\\ &e^{\rm T}PB[c^{\rm T}e+\Delta f(x(t),x(t-\tau),t)+\\ &f(x_{\rm r}(t),x_{\rm r}(t-\tau),t)+u-\dot{x}_{\rm rn}].\end{aligned} \tag{10}$$

利用不等式$ab\leqslant\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}b^2,\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, 并结合假设1, 则

$$\begin{aligned}&e^{\rm T}PB\Delta f(x(t),x(t-\tau),t)\leqslant\\ &|e^{\rm T}PB|(\alpha_1\|e(t)\|+\alpha_2\|e(t-\tau)\|)\leqslant\\ &\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{2}|e^{\rm T}PB|^2+\frac{1}{2}\|e(t)\|^2+\frac{1}{2}\|e(t-\tau)\|^2.\end{aligned} \tag{11}$$

将式(7)(8)(11)代入式(10), 得

$$\dot{V}_1(t)\leqslant-\frac{l_Q}{2}\|e(t)\|^2+f_{\max}^2. \tag{12}$$

因为$l_Q\geqslant0$, 将式(12)化简为

$$\dot{V}_1(t)\leqslant f_{\max}^2. \tag{13}$$

易知, $\dfrac{1}{2}e^{\rm T}(0)Pe(0)$及$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\tau}^{0}\|e(\nu)\|^2{\rm d}\nu$有界. 从而$V_1(0)$有界, 由式(13)知

$$V_1(t)\leqslant V_1(0)+f_{\max}^2T. \tag{14}$$

进而知$V_1(t)$有界, $t\in[0,T]$. 根据式(9)知系统跟踪误差$e(t)$有界, 由式(7)知$\hat{f}_{\rm r}(t),u(t)$的有界性, 进而由式(3)知, 跟踪误差导数$\dot{e}(t)$是有界的. 易得, $\dfrac{1}{2}e^{\rm T}(T)Pe(T)$与$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{T-\tau}^{T}\|e(\nu)\|^2{\rm d}\nu$也是有界的. 因此, 系统变量$e(t),\hat{f}_{\rm r}(t),u(t),\dot{e}(t)$在$[0,T]$上有界.

II) 其次证明系统变量在$[T,\infty)$上的有界性, 选取正定函数$V_2(t)$:

$$\begin{aligned}V_2(t)=&\frac{1}{2}\int_{t-T}^{t}(\hat{f}_{\rm r}(\sigma)-f(x_{\rm r}(\sigma),x_{\rm r}(\sigma-\\ &\tau),\sigma))^2{\rm d}\sigma+\frac{1}{2}e^{\rm T}Pe,\ t\geqslant T.\end{aligned} \tag{15}$$

利用等式$(a-b)^2-(a-c)^2=(c-b)(2a-b-c),\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, 并对$V_2(t)$进行求导, 则

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t)=&-\frac{1}{2}e^{\rm T}Qe+e^{\rm T}PB[c^{\rm T}e+\Delta f(x(t),x(t-\\ &\tau),t)+f(x_{\rm r}(t),x_{\rm r}(t-\tau),t)+u-\dot{x}_{\rm rn}]+\\ &[\hat{f}_{\rm r}(t)-\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)][\hat{f}_{\rm r}(t)-f(x_{\rm r}(t),x_{\rm r}(t-\\ &\tau),t)]+[\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)-\hat{f}_{\rm r}(t-T)][\hat{f}_{\rm r}(t)-\\ &f(x_{\rm r}(t),x_{\rm r}(t-\tau),t)]-\frac{1}{2}[\hat{f}_{\rm r}(t)-\hat{f}_{\rm r}(t-T)]^2.\end{aligned}$$

当$|\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)|\leqslant f_{\max}$时, 有$\hat{f}_{\rm r}(t)=\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)$, 则

$$[\hat{f}_{\rm r}(t)-\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)][\hat{f}_{\rm r}(t)-f(x_{\rm r}(t),x_{\rm r}(t-\tau),t)]=0.$$

当$\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)\geqslant f_{\max}$时, 有$\hat{f}_{\rm r}(t)=f_{\max}$, 则

$$[\hat{f}_{\rm r}(t)-\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)][\hat{f}_{\rm r}(t)-f(x_{\rm r}(t),x_{\rm r}(t-\tau),t)]\leqslant0.$$

当$\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)<f_{\max}$时, 有$\hat{f}_{\rm r}(t)=-f_{\max}$, 则

$$[\hat{f}_{\rm r}(t)-\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)][\hat{f}_{\rm r}(t)-f(x_{\rm r}(t),x_{\rm r}(t-\tau),t)]\leqslant0.$$

由上面分析知, 有不等式成立, 即

$$[\hat{f}_{\rm r}(t)-\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)][\hat{f}_{\rm r}(t)-f(x_{\rm r}(t),x_{\rm r}(t-\tau),t)]\leqslant0.$$

进而$\dot{V}_2(t)$可化简为

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t)\leqslant&-\frac{1}{2}e^{\rm T}Qe+e^{\rm T}PB[\Delta f(x(t),x(t-\tau),t)+\\ &c^{\rm T}e+f(x_{\rm r}(t),x_{\rm r}(t-\tau),t)+u-\dot{x}_{\rm rn}]+\\ &[\hat{f}_{\rm r}^{*}(t)-\hat{f}_{\rm r}(t-T)][\hat{f}_{\rm r}(t)-\\ &f(x_{\rm r}(t),x_{\rm r}(t-\tau),t)].\end{aligned} \tag{16}$$

将式(7)(8)代入式(16), 得

$$\begin{aligned}\dot{V}_2\leqslant&-\frac{1}{2}e^{\rm T}Qe-|e^{\rm T}PB|^2+\\ &\frac{1}{2}(\|e(t)\|^2+\|e(t-\tau)\|^2).\end{aligned} \tag{17}$$

选取正定函数$V_3(t)$:

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t} \|e(\nu)\|^2 \mathrm{d}\nu. \tag{18}$$

对$V_3(t)$进行求导, 并根据式(17)(18), 得

$$\dot{V}_3 \leqslant -(\frac{l_Q}{2}-1)\|e\|^2. \tag{19}$$

于是

$$V_3(t) \leqslant V_3(T) - (\frac{l_Q}{2}-1)\int_T^t \|e(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau. \tag{20}$$

由式(20)知, 正定函数$V_3(t)$在$[T,\infty)$上单调递减, 证明它有界只需证明$V_3(T)$的有界性. 从I)知, $\frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}(T)\cdot Pe(T)$和$\frac{1}{2}\int_{T-\tau}^{T}\|e(\nu)\|^2\mathrm{d}\nu$有界, 只需证明

$$\frac{1}{2}\int_0^T (\hat{f}_{\mathrm{r}}(t) - f(x_{\mathrm{r}}(t), x_{\mathrm{r}}(t-\tau), t))^2 \mathrm{d}t$$

的有界性. 而

$$\frac{1}{2}\int_0^T (\hat{f}_{\mathrm{r}}(t) - f(x_{\mathrm{r}}(t), x_{\mathrm{r}}(t-\tau), t))^2 \mathrm{d}t \leqslant 2f_{\max}^2 T.$$

从而知$V_3(T)$和$V_3(t)$的有界性. 进而由式(15)和式(18)知, 系统跟踪误差$e(t)$是有界的. 再由式(7)(8)知, $\hat{f}_{\mathrm{r}}(t), u(t)$有界. 由式(3)知$\dot{e}(t)$的有界性. 因此, 系统变量$e(t)$, $\hat{f}_{\mathrm{r}}(t)$, $u(t)$, $\dot{e}(t)$在$[T,\infty)$上是有界的.

III) 最后证明系统跟踪误差本身收敛.

根据式(20), 记$t = iT + t_0$,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} V_2(t) \leqslant V_2(T) - (\frac{l_Q}{2}-1)\lim_{t\to\infty}\int_T^t \|e\|^2\mathrm{d}\tau = \\ V_2(T) - (\frac{l_Q}{2}-1)\int_T^{T+t_0}\|e\|^2\mathrm{d}\tau - \\ (\frac{l_Q}{2}-1)\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{i-1}\int_{jT+t_0}^{(j+1)T+t_0}\|e\|^2\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

由级数收敛的必要条件知

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-T}^{t}\|e\|^2\mathrm{d}\tau = 0.$$

在II)已证明$\dot{e}(t)$在$[T,\infty)$上是有界的, 则$e(t)$在$[T,\infty)$上是一致连续的. 由Barbalat引理[5]可知, 系统跟踪误差本身收敛, 即$\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$.

由I)II)知, 系统变量$e(t)$, $\hat{f}_{\mathrm{r}}(t)$, $u(t)$, $\dot{e}(t)$在$[0,\infty)$上是有界的. 由III)知系统跟踪误差的收敛性.

证毕.

该节讨论了当系统不确定特性的界函数$\alpha_1(x, x(t-\tau), t)$和$\alpha_2(x, x(t-\tau), t)$已知时系统(1)的自适应重复控制问题, 但当界函数$\alpha_1(x(t), x(t-\tau), t)$和$\alpha_2(x(t), x(t-\tau), t)$未知时, 应用上述方法显得无能为力.

4 鲁棒重复控制(Robust repetitive control)

这一节讨论系统不确定特性界函数$\alpha_1(x, x(t-\tau), t)$和$\alpha_2(x, x(t-\tau), t)$未知的情形, 但前提是需要已知不确定特性的范数界, 即$\|f(x(t), x(t-\tau), t)\| \leqslant \rho(x(t), x(t-\tau), t)$, 其中$\rho(x(t), x(t-\tau), t)$是已知的. 在鲁棒控制[12]中, 不确定特性的范数界经常是假定已知的.

学习参数更新采用完全饱和学习律

$$\begin{cases}\hat{f}_{\mathrm{r}}(t) = \mathrm{sat}(\hat{f}_{\mathrm{r}}^*(t)), \\ \hat{f}_{\mathrm{r}}^*(t) = \hat{f}_{\mathrm{r}}(t-T) + \omega(t)e^{\mathrm{T}}PB, \\ \hat{f}_{\mathrm{r}}^*(t) = 0, t\in[-T, 0].\end{cases} \tag{21}$$

参数更新律同第3节, 学习增益$\omega(t)$也与第3节相同.

选取鲁棒重复控制律为

$$\begin{cases}u(t) = u_{\mathrm{r}}(t) - \hat{f}_{\mathrm{r}}(t) - c^{\mathrm{T}}e + \dot{x}_{nr} - le^{\mathrm{T}}PB, \\ u_{\mathrm{r}}(t) = -\dfrac{\mu\rho}{|\mu|+\epsilon},\ \mu = e^{\mathrm{T}}PB\cdot\rho,\end{cases} \tag{22}$$

这里: $\rho = \rho(x(t), x(t-\tau), t)$为不确定特性的范数界, $u_{\mathrm{r}}(t)$为控制器中的鲁棒部分, $\hat{f}_{\mathrm{r}}(t)$为控制器中的学习部分, $\epsilon > 0$为可调参数, $l > 0$为已知足够大的常数.

定理 2 对于满足假设1的系统(1), 系统不确定特性界函数$\alpha_1(x, x(t-\tau), t)$和$\alpha_2(x, x(t-\tau), t)$未知, 给定参考信号$x_{\mathrm{r}}$, 参数更新律(21)和鲁棒重复控制律(22)可使得闭环系统变量$\hat{f}_{\mathrm{r}}(t)$, $e(t)$, $u(t)$, $\dot{e}(t)$在$[0,\infty)$上本身有界, 同时系统跟踪误差本身收敛, 即$\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$.

证 I) 首先证明系统变量在$t\in[0,\infty)$上的有界性. 选取正定函数$V_1(t)$:

$$V_1(t) = \frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}Pe,\ t\geqslant 0. \tag{23}$$

对$V_1(t)$进行求导, 则

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) \leqslant -\frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}Qe + e^{\mathrm{T}}PB(c^{\mathrm{T}}e + u - \\ \dot{x}_{\mathrm{r}n}) + |e^{\mathrm{T}}PB|\rho.\end{aligned} \tag{24}$$

将式(21)(22)代入式(24), 得

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) \leqslant -\frac{1}{2}l_Q\|e\|^2 - l(|e^{\mathrm{T}}PB| - \frac{f_{\max}}{2l})^2 + \\ \frac{f_{\max}^2}{4l} + \epsilon.\end{aligned} \tag{25}$$

定义有界闭集$M_\varepsilon, \varepsilon > 0$, M_ε^c是M_ε的补集

$$\begin{aligned}M_\varepsilon = \{e: \frac{1}{2}l_Q\|e\|^2 + l(|e^{\mathrm{T}}PB| - \frac{f_{\max}}{2l})^2 \leqslant \\ \frac{f_{\max}^2}{4l} + \epsilon + \varepsilon\}.\end{aligned}$$

用反证法. 假设系统跟踪误差 $e(t)$ 发散, 则 $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) \to \infty$. 根据极限的定义, 必存在有界量$t_M$, 使得$e\in M_\varepsilon^c, t\geqslant t_M$. 当系统跟踪误差在集合$M_\varepsilon^c$中, 有$\dot{V}_1(t) \leqslant -\varepsilon$, 进而

$$\lim_{t\to\infty} V_1(t) \leqslant V_1(t_M) - \lim_{t\to\infty}\int_{t_M}^{t} \varepsilon \mathrm{d}\nu \to -\infty,$$

而$V_1(t) \geqslant 0$, 故得矛盾. 因此系统跟踪误差$e(t)$是有界的. 显然从式(21)(22)可知, $\hat{f}_{\mathrm{r}}(t), u(t)$有界. 又由式(3)知$\dot{e}(t)$有界性.

由有界性证明得, 界函数$\alpha_1(x(t), x(t-\tau), t)$及$\alpha_2(x(t), x(t-\tau), t)$是有界的. 进而满足

$$|f(x, x(t-\tau), t) - f(x_{\mathrm{r}}, x_{\mathrm{r}}(t-\tau), t)| \leqslant l_1\|e(t)\| + l_2\|e(t-\tau)\|, \tag{26}$$

l_1, l_2为有界的正常数.

II) 其次证明系统跟踪误差的收敛性. 选取正定函数$V_2(t)$为

$$V_2(t)=\frac{1}{2}\int_{t-T}^{t}(\hat{f}_{\mathrm{r}}(\sigma)-f(x_{\mathrm{r}}(\sigma), x_{\mathrm{r}}(\sigma-\tau), \sigma))^2\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}Pe,\ t\geqslant T. \tag{27}$$

利用等式$(a-b)^2-(a-c)^2=(c-b)(2a-b-c), \forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, 并对$V_2(t)$进行求导, 则

$$\begin{aligned}&\dot{V}_2(t) = \\ &e^{\mathrm{T}}PB[c^{\mathrm{T}}e+\Delta f(x(t), x(t-\tau), t)-\dot{x}_{\mathrm{r}n}+ \\ &u+f(x_{\mathrm{r}}(t), x_{\mathrm{r}}(t-\tau), t)]+[\hat{f}_{\mathrm{r}}^*(t)- \\ &\hat{f}_{\mathrm{r}}(t-T)][\hat{f}_{\mathrm{r}}(t)-f(x_{\mathrm{r}}(t), x_{\mathrm{r}}(t-\tau), t)]+ \\ &[\hat{f}_{\mathrm{r}}(t)-\hat{f}_{\mathrm{r}}^*(t)][\hat{f}(t)-f(x_{\mathrm{r}}(t), x_{\mathrm{r}}(t-\tau), t)]- \\ &\frac{1}{2}[\hat{f}(t)-\hat{f}(t-T)]^2-\frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}Qe.\end{aligned} \tag{28}$$

将式(21)(22)代入式(28), $\dot{V}_2(t)$类似地可化简为

$$\dot{V}_2\leqslant-\frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}Qe+(\frac{l_1^2+l_2^2}{2}-l)|e^{\mathrm{T}}PB|^2+\frac{1}{2}(\|e(t)\|^2+\|e(t-\tau)\|^2),$$

其中l为足够大已知正常数, 它满足$l\geqslant\dfrac{l_1^2+l_2^2}{2}$, 则

$$\dot{V}_2\leqslant-\frac{1}{2}e^{\mathrm{T}}Qe+\frac{1}{2}(\|e(t)\|^2+\|e(t-\tau)\|^2). \tag{29}$$

选取正定函数$V_3(t)$:

$$V_3=V_2+\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}\|e(\nu)\|^2\mathrm{d}\nu. \tag{30}$$

对$V_3(t)$进行求导, 并根据式(27), 得

$$\dot{V}_3\leqslant-(\frac{l_Q}{2}-1)\|e\|^2, \tag{31}$$

于是

$$V_3(t)\leqslant V_3(T)-(\frac{l_Q}{2}-1)\int_{T}^{t}\|e(\tau)\|^2\mathrm{d}\tau. \tag{32}$$

设$t=iT+t_0$, 则

$$\lim_{t\to\infty}V_2(t)\leqslant V_2(T)-(\frac{l_Q}{2}-1)\int_{T}^{T+t_0}\|e\|^2\mathrm{d}\tau-(\frac{l_Q}{2}-1)\lim_{i\to\infty}\sum_{j=1}^{i-1}\int_{jT+t_0}^{(j+1)T+t_0}\|e\|^2\mathrm{d}\tau.$$

显然从I)可知$V_3(T)$是有界的. 进而根据式(32), $V_3(t)$在$[T,\infty)$是有界的. 由级数收敛的必要条件知

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-T}^{t}\|e\|^2\mathrm{d}\tau=0.$$

类似可得$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0$.　　证毕.

基于以上讨论, 鲁棒重复控制器中的鲁棒部分保证了闭环系统所有变量在$[0,\infty)$上有界, 学习部分可有效消除系统跟踪误差, 改善系统的跟踪性能. 与文献[14]不同, 本文采取饱和参数估计方法, 设计的重复控制能够保证闭环变量本身有界以及系统误差本身收敛.

注 3　若更新律为$\theta(t)=\theta(t-T)+\varpi(t)$, $\theta(t)$是更新参数, 变量$\varpi(t)$与系统跟踪误差有关. 当系统在$t=t_0+T$时更新存在干扰时, 即$\theta(t_0+T)=\theta(t_0)+\varpi(t_0+T)+\delta$, 若干扰$\delta$为不等于零, 则$\lim\limits_{i\to\infty}\theta(t)=\lim\limits_{i\to\infty}\{\theta(t_0)+\sum\limits_{j=1}^{i}\varpi(t_0+jT)+\sum\limits_{j=1}^{i}\delta\}\to\infty, t=iT+t_0$. 由此可得, 当系统存在干扰(即使很小)时, 采取上述更新律也可能会导致系统发散. 针对该问题, 本文采用全饱和更新律, 利用饱和函数sat(·)将更新参数限制于预先设计的界内, 保证鲁棒性. 关于限幅学习的更多讨论见文献[2,5,6,8,10].

5 仿真算例(An illustrative example)

本节选取一时滞系统来验证算法的有效性. 系统的动态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+B[x_1\sin x_2\sin t\cdot \mathrm{e}^{-(x_1^2(t-\tau)+x_2^2(t-\tau))}+u],\ t\in[0,\infty],\\ x_1=\sin t, x_2=\cos t,\ t\in[-\tau,0],\end{cases} \tag{33}$$

其中: 系统状态$x=[x_1\ \ x_2]^{\mathrm{T}}$, 给定期望输出轨迹$x_{\mathrm{r}}=[0.2\sin(2\pi t)\ \ 0.4\pi\sin(2\pi t)]^{\mathrm{T}}$, 周期$T=1$. 由式(30)知系统初态$x(0)=[0\ \ 1]^{\mathrm{T}}$. 本文的控制目标是设计重复控制律使得系统的输出跟踪上期望轨迹. 选取A_c, P, Q:

$$A_c=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix},$$

以及饱和函数限幅值$f_{\max}=5$. 记

$$J_k=\max_{t\in[(k-1)T,kT]}\{\max_{i=1,2}|e_i(t)|\}$$

为重复控制的性能指标, k代表周期数.

图1, 2为系统(33)在自适应重复控制律(8)和参数学习律(7)的仿真结果. 系统不确定特性满足

$$|f(x(t), x(t-\tau), t)-f(x_{\mathrm{r}}(t), x_{\mathrm{r}}(t-\tau), t)|\leqslant\alpha_1\|e(t)\|+\alpha_2\|e(t-\tau)\|,$$

界函数$\alpha_1=1+|x_1|$及$\alpha_2=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-0.5}|x_1|$. 图1表明,

指标J_k随着周期数增加不断减小, 第50个周期的系统跟踪误差的数量级为10^{-3}; 图2表明, 第50个周期的参数估计$p(t)=\hat{f}_{\rm r}(t)$和系统控制输入是有界的.

图3, 4为系统(33)在鲁棒重复控制律(22)和参数学习律(21)的仿真结果. 系统不确定特性满足

$$|f(x(t),x(t-\tau),t)|\leqslant|x_1|=\rho.$$

选取参数$\epsilon=0.5$及$l=2$. 图3表明, 指标J_k随着周期数增加不断减小, 第50个周期的系统跟踪误差的数量级为10^{-3}; 图4表明, 第50个周期的参数估计$p(t)=\hat{f}_{\rm r}(t)$和系统控制输入是有界的.

仿真图1～4表明: 在所设计的自适应重复控制律和鲁棒重复控制律作用下, 系统控制$u(t)$及参数估计有界, 系统跟踪误差收敛. 以上仿真结果与理论分析结果相符, 表明所提方法是可行的.

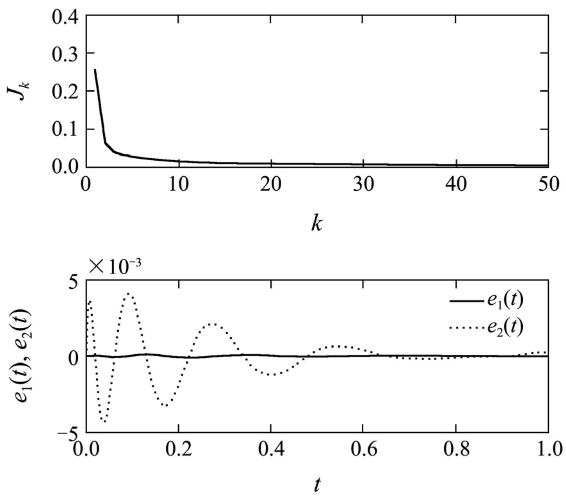

图 1 控制律(8)下的J_k和第50个周期跟踪误差

Fig. 1 Performance index J_k and the 50th cycle tracking error by control law of (8)

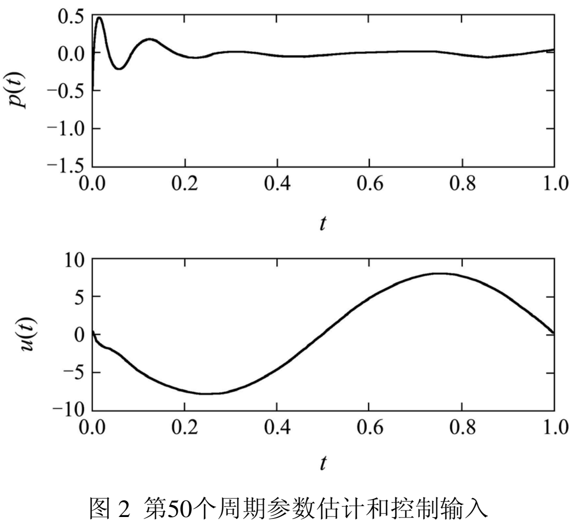

图 2 第50个周期参数估计和控制输入

Fig. 2 The 50th cycle estimated parameter and control input

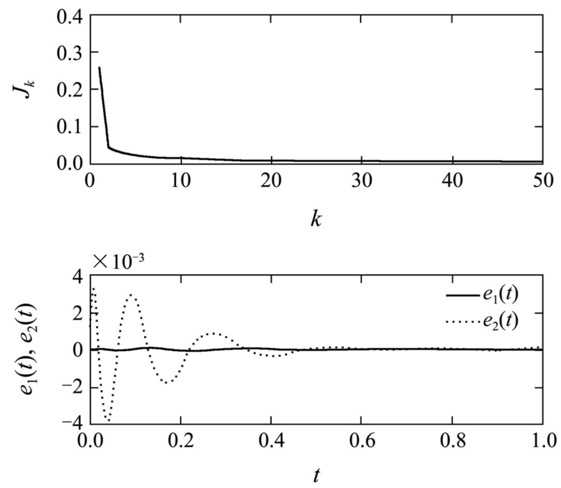

图 3 控制律(21)下的J_k和第50个周期跟踪误差

Fig. 3 Performance index J_k and the 50th cycle tracking error by control law of (21)

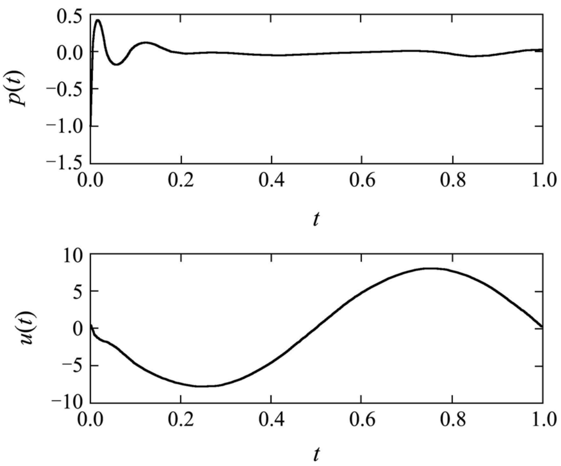

图 4 第50个周期参数估计和控制输入

Fig. 4 The 50th cycle estimated parameter and control input

6 结论(Conclusion)

本文讨论了一类非参数不确定时滞系统的重复控制设计问题. 针对系统不确定特性的界函数已知和未知两种情形, 分别设计自适应重复控制器和鲁棒重复控制器, 保证了闭环系统内所有变量本身有界以及系统跟踪误差本身收敛于零. 理论分析和仿真结果验证了该算法的有效性.

参考文献(References):

[1] HARA S, YAMAMOTO Y, OMATA T, et al. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(7): 659 – 668.

[2] SADEGH N, HOROWITZ R, KAO W W, et al. A unified approach to design of adaptive and repetitive controllers for robotic manipulators[J]. *ASME Journal of Dynamic Systems Measurement, and Control*, 1990, 4(112): 618 – 629.

[3] MESSNER W, HOROWITZ R, KAO W W, et al. A new adaptive learning law[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(2): 188 – 197.

[4] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robotics by learning[J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.

[5] SUN M X, GE S Z, MAREELS I M Y. Adaptive repetitive learning control of robotic manipulators without requirement for initial repositioning[J]. *IEEE Transactions on Automatic Robotics*, 2006, 22(3): 563 – 568.

[6] 孙明轩, 王郸维, 陈彭年. 有限区间非线性系统的重复学习控制[J]. 中国科学: 信息科学, 2010, 40(3): 433 – 444.
(SUN Mingxuan, WANG Danwei, CHEN Pengnian. Repetitive learning control of non-linear systems over finite intervals[J]. *Science China, Information Sciences*, 2010, 40(3): 433 – 444.)

[7] KUC T, NAM K, LEE J. An iterative learning control of robot manipulators[J]. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1990, 6(7): 835 – 841.

[8] DIXON W E, ZEREGEROGLU E, DAWSON D M, et al. Repetitive learning control: a Lyapunov-based approach[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2002, 32(4): 538 – 545.

[9] XU J X. A new periodic adaptive control approach for time-varying parameters with known periodicity[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(4): 579 – 583.

[10] SUN M X. A Barbalat-like lemma with its application to learning control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(9): 2222 – 2225.

[11] 孙云平, 李俊民, 李靖. 一类非线性参数化系统自适应重复学习控制[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(2): 228 – 232.
(SUN Yunping, LI Junmin, LI Jing. Adaptive repetitive learning control for a class of nonlinearly parameterized uncertain systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(2): 228 – 232.)

[12] QU Z H. Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties[J]. *Systems and Control Letters*, 1992, 3(18): 301 – 307.

[13] XU J X, QU Z H. Robust iterative learning control for a class of nonlinear systems[J]. *Automatica*, 1998, 34(8): 983 – 988.

[14] XU J X, YAN R. On repetitive learning for periodic tracking tasks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(11): 1842 – 1848.

[15] 陈彭年, 秦化淑. 不确定非线性系统的周期信号自适应跟踪[J]. 系统科学与数学, 2009, 29(10): 1343 – 1352.
(CHEN Pengnian, QIN Huashu. Adaptive tracking control of periodic signals for a class of uncertain nonlinear systems[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2009, 29(10): 1343 – 1352.)

[16] MARINO R, TOMEI P. An iterative learning control for a class of partially feedback linearizable systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(8): 1991 – 1996.

[17] 刘利, 孙明轩. 不确定时变系统的鲁棒学习控制算法[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(3): 323 – 328.
(LIU Li, SUN Mingxuan. Robust learning control algorithms for uncertain time-varying systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(3): 323 – 328.)

[18] SUN M X, WANG D W. Initial condition issues on iterative learning control for nonlinear systems with time delay[J]. *International Journal of Systems Science*, 2001, 32(11): 1365 – 1375.

[19] 陈为胜, 王元亮, 李俊民. 周期时变时滞非线性参数化系统的自适应学习控制[J]. 自动化学报, 2008, 34(12): 1556 – 1560.
(CHEN Weisheng, WANG Yuanliang, LI Junmin. Adaptive learning control for nonlinearly parameterized systems with periodically time-varying delays[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(12): 1556 – 1560.)

作者简介:

金 奎 (1985—), 男, 研究方向为学习控制, E-mail: zjszjk@163.com;

孙明轩 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为学习控制, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn.

吴忻生 (1961—), 男, 副教授, 研究方向为智能检测与智能控制、自动化技术应用, E-mail: auxswu@scut.edu.cn. 通讯作者.