

## 多时滞线性系统的控制参数优化方法

陈 宁<sup>1</sup>, 沈晓瑜<sup>1</sup>, 桂卫华<sup>1</sup>, 阳春华<sup>1</sup>, 王凌云<sup>2</sup>

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 三峡大学 电气与新能源学院, 湖北 宜昌 443002)

**摘要:** 采用控制参数化方法研究具有连续状态不等式约束和多重状态及控制时滞的线性系统优化控制问题. 通过把时滞系统动态模型中的控制量表示成关于时间的分段常数函数, 把每个控制参数看作决策变量, 将多时滞系统的控制问题转化为数学规划问题. 推导出在连续状态不等式约束条件下的目标函数和约束函数对于待求参数的梯度公式, 并用序列二次规划算法求出其最优控制量. 最后, 将该优化算法应用于湿法炼锌净化过程中. 仿真结果表明, 锌粉的添加量可以有效地减少, 从而避免了资源的浪费.

**关键词:** 时滞系统; 多重状态和控制时滞; 控制参数化; 序列二次规划算法

**中图分类号:** TP273+.1      **文献标识码:** A

## Control parameterization method of linear systems with multiple time-delays

CHEN Ning<sup>1</sup>, SHEN Xiao-yu<sup>1</sup>, GUI Wei-hua<sup>1</sup>, YANG Chun-hua<sup>1</sup>, WANG Ling-yun<sup>2</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;

2. School of Electrical Engineering and Renewable Energy, China Three Gorges University, Yichang Hubei 443002, China)

**Abstract:** This paper studies the optimal control method using the control parameterization for a class of optimal control problems involving linear systems subject to continuous state inequality constraints where both the state and the control are allowed to have different time delays. The control of the dynamic system is approximated by a piecewise constant function whose magnitudes are taken as decision vectors. Then, formulae are derived for computing the gradients of the cost and constraint functions. On this basis, a computational method for finding the optimal control is obtained by using the sequential quadratic programming (SQP) algorithm. This computational method is applied to the purification process of zinc hydrometallurgy. The numerical simulation shows that the amount of zinc powder added can be decreased significantly so that the wastage of resources is avoided.

**Key words:** time delayed system; multiple state and control delays; control parameterization; sequential quadratic programming algorithm

### 1 引言(Introduction)

目前, 优化已经从纯学术理论研究逐渐发展成为能对工业起到巨大推动作用的一门技术<sup>[1,2]</sup>, 它能提高企业经济效益、降低生产成本, 已成为工业企业保持竞争力的主要技术手段. 在实际工程系统中, 时滞现象尤其是多时滞现象普遍存在. 例如在冶金工业中, 生产原料从工序入口处输入, 产品(中间产品)从工序出口处输出, 由于流量的影响或不同控制点到工序出口处的距离不同, 使得物料传质输送所需要的时间也不同. 此外, 生产过程中的很多性能指标不能在线检测, 只能通过离线人工分析化验得到, 不同的指标化验所需的时间也不相同, 这些都造成了状态时滞和控制时滞的多重性, 而它是导致实际系统控制效率降低甚至使系统不稳定的重要因素之

一. 因此, 研究多时滞系统的优化控制问题更能为企业的实际生产过程提供有效的参考, 从而更具有实际应用价值.

目前解决优化控制问题的算法主要有解析法和数值方法. 解析法包括变分法<sup>[3]</sup>和动态规划方法<sup>[4]</sup>. 文献[3]针对单时滞系统, 而文献[4]针对控制输入具有多重时滞的线性系统. 但实际问题是比较复杂的动态优化问题, 一般不能得到其解析解, 需要采用数值方法将无限维的优化问题近似离散为欧氏空间的优化问题, 以分段离散的曲线逼近最优控制轨线.

优化控制问题的数值方法, 包括控制参数化方法<sup>[5]</sup>、迭代动态规划方法<sup>[6]</sup>、同步策略正交配置法<sup>[7]</sup>和智能优化方法<sup>[8]</sup>. 迭代动态规划方法通常用在化工过程的优化控制中, 但这种方法的计算量非

常大;同步策略正交配置法将动态优化问题近似为具有等式和不等式约束的非线性规划问题,然后利用对代数模型同时进行收敛和优化的方法进行求解,然而在允许的精度下,产生的非线性规划问题规模很大,不易求解;智能优化方法的某些算法求解效率很高(如蚁群算法),但往往出现求解不稳定或准确性差的问题.因此,研究者纷纷把目光转向在工业应用中占优势的控制参数化方法的研究上.控制参数化方法是一种有效的优化控制的数值求解方法,其主要思想是把时间区间 $[0, T]$ 分割成一些子区间,而控制量用分段常数函数近似,并且每段常数控制量在对应的区间切换点瞬间切换.这样就可以把无限维优化问题转化为有限维优化问题来处理,并采用数学规划方法求解.由于这种方法易于应用,能解决很多实际问题,因此已经运用到时滞系统的优化求解中.文献[9]采用罚函数法研究了一类具有不等式约束的优化控制组合和优化参数选择问题.文献[10]考虑了一类目标函数中含有变切换时间点的优化控制问题,通过将其转换为具有多特征时间点的优化控制问题从而得以解决.而文献[11]就运用含有多特征时间点的优化控制方法解决了癌症化疗法中的服用药物时间安排的问题.文献[12]也通过研究基于多特征点的时滞优化控制问题来求得系统最优的模型参数和控制参数.

本文采用控制参数化的思想,研究具有多重状态和控制时滞的线性系统的优化控制问题.通过把时滞系统动态模型中的控制量表示成关于时间的分段常数函数,把每个控制参数看作决策变量,将多时滞系统的控制问题转化为数学规划问题.推导出目标函数和约束函数对控制量的梯度公式,用序列二次规划算法求出最优数值解,并将其应用到湿法冶炼净化过程锌粉量的优化控制中.

## 2 问题描述(Problem description)

考虑一类在固定时间区间 $[0, T]$ 上,具有多时滞的动态系统可以由如下常微分方程描述:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + \sum_{k=1}^{m_1} A_k \mathbf{x}(t - \alpha_k) + \sum_{k=1}^{m_2} B_k \mathbf{u}(t - \beta_k) = \mathbf{f}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \alpha_1), \dots, \mathbf{x}(t - \alpha_{m_1}), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t - \beta_1), \dots, \mathbf{u}(t - \beta_{m_2})], \quad (1a)$$

其中:  $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} = [u_1 \ \dots \ u_r]^T \in \mathbb{R}^r$  分别为状态向量和控制向量,且有  $\mathbf{f} = [f_1 \ \dots \ f_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_k$  为状态时滞,且满足  $0 < \alpha_k < T$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_1$ ,  $\beta_k$  为控制时滞,且满足  $0 < \beta_k < T$ ,  $k = 1, 2, \dots, m_2$ , 设  $0 < \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{m_1} < T$ ,  $0 < \beta_1 \leq \dots \leq \beta_{m_2} < T$ , 把  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}, \beta_1, \dots, \beta_{m_2}$  从

小到大排序,用  $h_i (i = 1, 2, \dots, l)$  表示排序后的时滞,其中  $1 \leq l \leq m_1 + m_2$ , 即  $h_1$  为最小值,  $h_l$  为最大值,当  $l = m_1 + m_2$  时,表示  $\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}, \beta_1, \dots, \beta_{m_2}$  均不相等.  $A, B, A_1, \dots, A_{m_1}, B_1, \dots, B_{m_2}$  分别为适当维数的矩阵.

微分方程(1a)中的状态量和控制量的初始条件函数为

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t), \quad \mathbf{u}(t) = \gamma(t), \quad t \in [-h_l, 0); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (1b)$$

其中:  $\varphi(t) = [\varphi_1(t) \ \dots \ \varphi_n(t)]^T$  和  $\gamma(t) = [\gamma_1(t) \ \dots \ \gamma_r(t)]^T$  分别是定义在区间  $[-h_l, 0)$  上, 空间  $\mathbb{R}^n$  和  $\mathbb{R}^r$  中给定的分段连续函数,  $\mathbf{x}^0$  是空间  $\mathbb{R}^n$  中给定的初始值向量.

定义

$$U_1 = \{\mathbf{v} = [v_1 \ \dots \ v_r]^T \in \mathbb{R}^r : (\mathbf{E}^i)^T \mathbf{v} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, q\}, \quad (2a)$$

$$U_2 = \{\mathbf{v} = [v_1 \ \dots \ v_r]^T \in \mathbb{R}^r : c_i \leq v_i \leq d_i, \quad i = 1, \dots, r\}, \quad (2b)$$

其中:  $\mathbf{E}^i$  为  $r$  维向量,  $b_i, c_i$  和  $d_i$  为实数.

假设  $U = U_1 \cap U_2$ , 显然,  $U$  是  $\mathbb{R}^r$  空间中的一个紧凸子集. 设  $\mathbf{u} = [u_1 \ \dots \ u_r]^T$  在区间  $[-h_l, T]$  内是边界可测函数, 并满足  $t \in [-h_l, 0)$  时,  $\mathbf{u}(t) = \gamma(t)$ ;  $t \in [0, T]$  时,  $\mathbf{u}(t) \in U$ , 则  $\mathbf{u}$  被称为容许控制. 设  $\mathcal{U}$  为一类所有容许控制的集合. 对每个控制量  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ , 设  $\mathbf{x}(\cdot | \mathbf{u})$  为对应的向量值函数, 满足初始条件(1b)且绝对连续, 并且在  $[0, T]$  上满足微分方程(1a). 显然, 该函数也是动态系统(1)相应于  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  的状态解. 因此, 多时滞优化控制问题可以表述如下:

**问题 1(P1)** 给定动态系统(1), 求解控制量  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ , 使得目标函数

$$g_0(\mathbf{u}) = \Phi_0(\mathbf{x}(T | \mathbf{u})) + \int_0^T \mathcal{L}_0[t, \mathbf{x}(t | \mathbf{u}), \mathbf{x}(t - \alpha_1 | \mathbf{u}), \dots, \mathbf{x}(t - \alpha_{m_1} | \mathbf{u}), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t - \beta_1), \dots, \mathbf{u}(t - \beta_{m_2})] dt \quad (3)$$

最小, 并且满足规范型的不等式约束条件

$$g_i(\mathbf{u}) = \Phi_i(\mathbf{x}(T | \mathbf{u})) + \int_0^T \mathcal{L}_i[t, \mathbf{x}(t | \mathbf{u}), \mathbf{x}(t - \alpha_1 | \mathbf{u}), \dots, \mathbf{x}(t - \alpha_{m_1} | \mathbf{u}), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t - \beta_1), \dots, \mathbf{u}(t - \beta_{m_2})] dt \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

其中  $\Phi_i$  和  $\mathcal{L}_i, i = 0, 1, \dots, N$  为给定的实值函数.

设集合  $\mathcal{F}$  包含  $\mathcal{U}$  中所有满足约束式(4)的元素. 那么集合  $\mathcal{F}$  中的元素被称为可行控制量,  $\mathcal{F}$  则被称为一类可行控制量. 同时, 需要假设如下条件成立:

A1)  $\varphi : [-h_l, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\gamma : [-h_l, 0) \rightarrow \mathbb{R}^r$ ;  $\Phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, N$ ;  $\mathcal{L}_i : [0, T] \times \mathbb{R}^{n+m_1 n} \times$

$\mathbb{R}^{r+m_2r} \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, N;$

A2) 对每个  $i = 0, 1, \dots, N$ , 对于任意紧子集  $V \subset \mathbb{R}^r$ , 存在一个正的常数  $K$  使得

$$|\mathcal{L}_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m_1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_2})| \leq K(1 + |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}_1| + \dots + |\mathbf{y}_{m_1}|)$$

对所有的  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m_1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_2}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{n+m_1n} \times V \times V^{m_2}$  成立;

A3) 对每个  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m_1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_2}) \in \mathbb{R}^{n+m_1n} \times \mathbb{R}^{r+m_2r}$ ,  $\mathcal{L}_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m_1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_2})$  在  $[0, T]$  上是分段连续的, 并且在每个时刻  $t \in [0, T]$ , 关于向量  $\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m_1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_2}$  中的元素是连续可微的;

A4) 对每个  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $\Phi_i$  关于  $\mathbf{x}$  连续可微.  $\varphi$  和  $\gamma$  在  $[-h_i, 0)$  上是分段连续的.

但是, 在大多数实际物理过程中, 约束条件通常由如下连续状态不等式约束条件表示:

$$h_i(t, \mathbf{x}(t|\mathbf{u})) \geq 0, \forall t \in [0, T], i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

其中  $h_i (i = 1, \dots, N)$  为定义在  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  上的实值函数.

基于此, 含有连续状态不等式约束的多时滞优化控制问题可以表述如下:

**问题 2 (P2)** 给定多时滞动态系统(1), 求解控制量  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ , 使得目标函数(3)最小, 并且满足连续状态不等式约束条件式(5).

由于存在连续状态不等式约束, 问题(P2)不能直接求解, 但可以采用约束转换方法, 将该约束条件近似为一系列规范型的不等式约束<sup>[5]</sup>. 对每个  $i = 1, \dots, N$ , 定义

$$g_{i,\varepsilon}(\mathbf{u}) = \delta + \int_0^T \mathcal{L}_{i,\varepsilon}(t, \mathbf{x}(t|\mathbf{u})) dt \geq 0, \quad (6)$$

其中:

$$\mathcal{L}_{i,\varepsilon}(t, \mathbf{x}(t|\mathbf{u})) = \begin{cases} h_i, & h_i < -\varepsilon, \\ -\frac{(h_i - \varepsilon)^2}{4\varepsilon}, & -\varepsilon \leq h_i \leq \varepsilon, \\ 0, & h_i > \varepsilon. \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$  为控制近似估计精确度的调节参数,  $\delta > 0$  为控制连续状态不等式约束式(5)可行度的调节参数. 因此, 含有连续状态不等式约束的多时滞优化控制问题可以被近似转化为一系列的优化控制问题.

**问题 3 (P2( $\varepsilon, \delta$ ))** 给定多时滞动态系统(1), 求解控制量  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ , 使得目标函数式(3)最小, 并且满足规范型不等式约束式(6).

显然, 对每个参数  $\varepsilon$  和  $\delta$ , 问题(P2( $\varepsilon, \delta$ )) 表现为问题(P1)的形式. 对任意  $\varepsilon > 0$ , 如果  $\delta$  足够小, 对应的优化问题(P2( $\varepsilon, \delta$ )) 的解将会满足连续状态不等式约束(5), 证明可见文献[5]的第8章.

### 3 多时滞系统的求解算法(Algorithm of multiple time-delayed systems)

本文将采用控制参数化方法来求解这类具有连续状态不等式约束的多时滞系统的优化控制问题. 控制参数化方法是把动态模型中的控制量设置成关于时间的分段常数函数, 每一个时间子区间对应一个控制参数, 通过数值优化方法求出这些控制参数, 从而实现对动态系统的最优控制. 该方法的优点是通用性和算法容易实施. 为采用数学规划方法求解问题(P2( $\varepsilon, \delta$ )), 本文需要首先求得  $g_i(\mathbf{u}) (i = 0, 1, \dots, N)$  关于控制量  $\mathbf{u}$  的梯度公式, 然后即可根据相应的算法来求解多时滞系统的优化控制问题, 当求得动态系统的状态值、协态值、目标函数值、约束函数值和各自的梯度值后, 采用数值计算方法, 在编写主程序的基础上, 采用基于序列二次规划算法的NLPQLP算法代码<sup>[13]</sup>, 即可优化求解这类问题.

#### 3.1 梯度公式(Gradient formula)

对每个  $i = 0, 1, \dots, N$ , 考虑协态系统(7a),

$$\frac{d(\boldsymbol{\lambda}^i(t))^\top}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, \quad (7a)$$

其边界条件为:

$$(\boldsymbol{\lambda}^i(T))^\top = \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{x}(T|\mathbf{u}))}{\partial \mathbf{x}}, \quad (7b)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^i(t) = 0, t > T, \quad (7c)$$

式(7a)中:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = & H_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}_1(t), \mathbf{z}_1(t), \dots, \mathbf{y}_{m_1}(t), \\ & \mathbf{z}_{m_1}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}_1(t), \mathbf{w}_1(t), \dots, \mathbf{v}_{m_2}(t), \\ & \mathbf{w}_{m_2}(t), \boldsymbol{\lambda}^i(t)), \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) = & \mathbf{x}(t - \alpha_1|\mathbf{u}), \dots, \mathbf{y}_{m_1}(t) = \mathbf{x}(t - \alpha_{m_1}|\mathbf{u}), \\ \mathbf{z}_1(t) = & \mathbf{x}(t + \alpha_1|\mathbf{u}), \dots, \mathbf{z}_{m_1}(t) = \mathbf{x}(t + \alpha_{m_1}|\mathbf{u}), \\ \mathbf{v}_1(t) = & \mathbf{u}(t - \beta_1), \dots, \mathbf{v}_{m_2}(t) = \mathbf{u}(t - \beta_{m_2}), \\ \mathbf{w}_1(t) = & \mathbf{u}(t + \beta_1), \dots, \mathbf{w}_{m_2}(t) = \mathbf{u}(t + \beta_{m_2}), \\ \boldsymbol{\lambda}_{\alpha_1}^i(t) = & \boldsymbol{\lambda}^i(t + \alpha_1), \dots, \boldsymbol{\lambda}_{\alpha_{m_1}}^i(t) = \boldsymbol{\lambda}^i(t + \alpha_{m_1}), \\ \boldsymbol{\lambda}_{\beta_1}^i(t) = & \boldsymbol{\lambda}^i(t + \beta_1), \dots, \boldsymbol{\lambda}_{\beta_{m_2}}^i(t) = \boldsymbol{\lambda}^i(t + \beta_{m_2}). \end{aligned}$$

定义哈密尔顿函数  $H_i$  为

$$\begin{aligned} H_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m_1}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{m_1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_2}, \\ \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m_2}, \boldsymbol{\lambda}^i, \boldsymbol{\lambda}_{\alpha_1}^i, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{\alpha_{m_1}}^i, \boldsymbol{\lambda}_{\beta_1}^i, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{\beta_{m_2}}^i) = \\ \mathcal{L}_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m_1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_2}) + \\ \sum_{k=1}^{m_1} \mathcal{L}_i(t + \alpha_k, \mathbf{x}(t + \alpha_k), \mathbf{y}_1(t + \alpha_k), \dots, \\ \mathbf{y}_{m_1}(t + \alpha_k), \mathbf{u}(t + \alpha_k), \mathbf{v}_1(t + \alpha_k), \dots, \\ \mathbf{v}_{m_2}(t + \alpha_k)) e^{(T-t-\alpha_k)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{m_2} \mathcal{L}_i(t + \beta_k, \mathbf{x}(t + \beta_k), \mathbf{y}_1(t + \beta_k), \dots, \\
& \mathbf{y}_{m_1}(t + \beta_k), \mathbf{u}(t + \beta_k), \mathbf{v}_1(t + \beta_k), \dots, \\
& \mathbf{v}_{m_2}(t + \beta_k))e(T - t - \beta_k) + (\boldsymbol{\lambda}^i)^\top \cdot \\
& \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m_1}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_2}) + \\
& \sum_{k=1}^{m_1} (\boldsymbol{\lambda}_{\alpha_k}^i)^\top \mathbf{f}(t + \alpha_k, \mathbf{x}(t + \alpha_k), \mathbf{y}_1(t + \alpha_k), \dots, \\
& \mathbf{y}_{m_1}(t + \alpha_k), \mathbf{u}(t + \alpha_k), \mathbf{v}_1(t + \alpha_k), \dots, \\
& \mathbf{v}_{m_2}(t + \alpha_k))e(T - t - \alpha_k) + \\
& \sum_{k=1}^{m_2} (\boldsymbol{\lambda}_{\beta_k}^i)^\top \mathbf{f}(t + \beta_k, \mathbf{x}(t + \beta_k), \mathbf{y}_1(t + \beta_k), \dots, \\
& \mathbf{y}_{m_1}(t + \beta_k), \mathbf{u}(t + \beta_k), \mathbf{v}_1(t + \beta_k), \dots, \\
& \mathbf{v}_{m_2}(t + \beta_k))e(T - t - \beta_k), \quad (8)
\end{aligned}$$

其中 $e(\cdot)$ 为单位阶跃函数,且在区间 $[T - \alpha_i, T]$  ( $i = 1, \dots, m_1$ )上,设 $\mathbf{z}_1(t) = 0, \dots, \mathbf{z}_{m_1}(t) = 0$ 成立;相应地,在区间 $[T - \beta_i, T]$  ( $i = 1, \dots, m_2$ )上,设 $\mathbf{w}_1(t) = 0, \dots, \mathbf{w}_{m_2}(t) = 0$ 成立.

为求解动态系统(1),本文需要把区间 $[0, T]$ 分割成 $[0, h_l], [kh_l, (k+1)h_l], k = 1, \dots, \eta - 1, [\eta h_l, T]$ ,其中 $\eta = \text{INT}(\frac{T}{h_l})$ ,之后,本文还需要根据不同的时滞,把这样每一个子区间细分为 $l$ 个小区间,如把 $[0, h_l]$ 分为 $[0, h_1], [h_j, h_{j+1}], j = 1, \dots, l - 1$ ,以此类推.在每个小区间里分别求解状态微分方程.

为求解协态系统(7),本文需要把区间 $[0, T]$ 分割成 $[T - h_l, T], [T - (k+1)h_l, T - kh_l], k = 1, \dots, \eta - 1, [0, T - \eta h_l]$ ,其中 $\eta = \text{INT}(\frac{T}{h_l})$ ,同样,本文也需要根据不同的时滞,把这样每一个子区间细分为 $l$ 个小区间,如把 $[T - h_l, T]$ 这个子区间分为 $[T - h_1, T], [T - h_j, T - h_{j-1}], j = 2, 3, \dots, l$ ,以此类推.在每个小区间里分别逆向求解协态微分方程.

**定理 1** 设 $\mathbf{u}$ 为集合 $\mathcal{U}$ 中的任意控制量,  $\Delta \mathbf{u}$ 为定义在 $[-h_l, T]$ 上的边界可测函数,并且对每个时刻 $t \in [0, T]$ ,存在 $\Delta \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ ,同时对 $t \in [-h_l, 0]$ ,存在 $\Delta \mathbf{u}(t) = 0$ ,则函数 $g_i$ 对控制量的方向导数为

$$\begin{aligned}
\Delta g_i(\mathbf{u}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{g_i(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}) - g_i(\mathbf{u})}{\varepsilon} \right\} = \\
\frac{dg_i(\mathbf{u} + \varepsilon \Delta \mathbf{u})}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial g_i(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} = \\
\int_0^T \frac{\partial \bar{H}_i(t)}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}(t) dt, \quad (9)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{H}_i(t) &= H_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m_1}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{m_1}, \mathbf{u}, \\
& \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_2}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m_2}, \boldsymbol{\lambda}^i, \boldsymbol{\lambda}_{\alpha_1}^i, \dots, \\
& \boldsymbol{\lambda}_{\alpha_{m_1}}^i, \boldsymbol{\lambda}_{\beta_1}^i, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{\beta_{m_2}}^i).
\end{aligned}$$

证明过程可参考文献[5].

### 3.2 近似问题(Approximate problem)

利用控制参数化方法<sup>[5]</sup>构造近似问题时,需要把区间 $[0, T]$ 分割为 $p$ 个子区间 $[\tau_{j-1}, \tau_j], j = 1, \dots, p$ ,而控制量可以近似为如下形式的分段常数函数:

$$\mathbf{u}^p(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t \in [-\beta_{m_2}, 0), \\ \sum_{j=1}^p \boldsymbol{\sigma}^{p,j} \chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j]}(t), & t \in [0, T], \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\tau_j (j = 0, 1, \dots, p - 1)$ 为不连续点,即区间切换点.  $\chi_I$ 表示区间 $I$ 的指示函数,定义如下:

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1, & t \in I, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (11)$$

设集合 $\mathcal{U}^p$ 是满足上述条件所有分段常控制量的集合,定义 $\boldsymbol{\sigma}^p = [(\boldsymbol{\sigma}^{p,1})^\top \dots (\boldsymbol{\sigma}^{p,p})^\top]^\top$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{p,j} = [\sigma_1^{p,j} \dots \sigma_r^{p,j}]^\top, j = 1, \dots, p$ 且 $\boldsymbol{\sigma}^{p,j} \in U$ . 设 $\Omega$ 为 $\mathbb{R}^{rp}$ 空间中的子集,且有 $\boldsymbol{\sigma}^p \in \Omega$ . 显然,  $\mathbf{u}^p$ 是由控制参数 $\boldsymbol{\sigma}^p$ 决定的. 对每个控制量 $\mathbf{u}^p \in \mathcal{U}^p$ ,存在唯一的控制参数向量 $\boldsymbol{\sigma}^p \in \Omega$ 满足关系式(11). 反之,对应于每个控制参数向量 $\boldsymbol{\sigma}^p \in \Omega$ ,存在唯一的控制量 $\mathbf{u}^p \in \mathcal{U}^p$ .

因此,原规范型的优化控制问题(P2( $\varepsilon, \delta$ ))的近似问题(P2( $\varepsilon, \delta$ )( $p$ ))可以表述如下:

问题(P2( $\varepsilon, \delta$ )( $p$ ))求解一控制参数向量 $\boldsymbol{\sigma}^p \in \Omega$ ,使得目标函数

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_0(\boldsymbol{\sigma}^p) &= \Phi_0(\mathbf{x}(T)) + \int_0^T \tilde{\mathcal{L}}_0(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \alpha_1), \dots, \\
& \mathbf{x}(t - \alpha_{m_1}), \mathbf{u}^p(t), \mathbf{u}^p(t - \beta_1), \dots, \\
& \mathbf{u}^p(t - \beta_{m_2})) dt \quad (12)
\end{aligned}$$

最小,并且满足规范型不等式约束条件(6),其中 $\tilde{\mathcal{L}}_0$ 由 $\mathcal{L}_0$ 得到.

为求解问题(P2( $\varepsilon, \delta$ )( $p$ )),利用定理1,可推导出如下定理:

**定理 2** 对每个 $i = 0, 1, \dots, N, j = 1, \dots, p$ ,函数 $\tilde{g}_i(\boldsymbol{\sigma}^p)$ 关于控制参数 $\boldsymbol{\sigma}^{p,j}$ 的梯度公式为

$$\frac{\partial \tilde{g}_i(\boldsymbol{\sigma}^p)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{p,j}} = \int_I \frac{\partial \bar{H}_i(t)}{\partial \mathbf{u}} dt. \quad (13)$$

这样,近似问题(P2( $\varepsilon, \delta$ )( $p$ ))就可以转化为有限维的优化问题来求解.

### 4 数值仿真(Numerical simulation)

据文献[12]可知,上述方法可以应用于湿法炼锌中的净化沉淀硫酸锌溶液中金属杂质离子过程,其中主要是钴离子和镉离子. 硫酸锌溶液净化过程是一个状态量和控制量均具有多个时滞的过程,溶液从进入净化过程的第一个反应槽的入口开始,需要在反应槽中停留一段时间,才会流到最后一个反应槽的出口,这样就使得在最后一个反应槽出口测得的离子浓度实际上反映的是该段时间以前的离子浓

度变化情况. 根据生产数据分析, 溶液在反应槽中的停留时间主要受流量影响, 虽然平均流量基本上会稳定在  $200 \text{ m}^3/\text{h}$ , 但实际流量会在一定的范围内波动, 不同的流量造成了溶液的不同时滞, 即测得的钴离子和镉离子的浓度同时时滞  $1 \text{ h}$  和同时时滞  $2 \text{ h}$ . 而锌粉的下料量是操作工根据反应槽出口每小时化验的钴和镉离子浓度来不断调整的, 因此, 控制量也存在时滞, 平均时滞为  $1 \text{ h}$ . 这样就需要运用多时滞问题的解决办法. 另外, 净化反应十分复杂, 反应的环境也比较恶劣, 不确定因素很多, 因此, 为了保证锌产品的质量, 往往添加过量的锌粉, 这样就造成了锌粉的大量浪费, 实际生产中并不可取.

锌-钴和锌-镉的置换反应可由如下形式的多时滞动态反应模型来描述<sup>[12]</sup>:

$$V \frac{dx_1(t)}{dt} = Qx_{10} - Qx_1(t-2) + \alpha x_2(t-2) - k_1 U_1(t-1)x_1(t-1), \quad (14a)$$

$$V \frac{dx_2(t)}{dt} = Qx_{20} - Qx_2(t-2) + \beta x_1(t-2) - k_2 U_2(t-1)x_2(t-1), \quad (14b)$$

其中:  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  分别表示反应槽出口的钴离子和镉离子浓度;  $x_{10}$  和  $x_{20}$  分别表示反应槽入口的钴和镉离子浓度,  $x_{10} = 0.01 \text{ g/L}$ ,  $x_{20} = 0.1 \text{ g/L}$ ;  $Q$  和  $V$  分别表示溶液平均流量和体积,  $Q = 200 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $V = 400 \text{ m}^3$ ;  $x_1(t-2)$  和  $x_2(t-2)$  分别表示 2 小时前的出口钴离子浓度和镉离子浓度,  $x_1(t-1)$  和  $x_2(t-1)$  分别表示 1 小时前的出口钴离子浓度和镉离子浓度;  $U_1(t)$  和  $U_2(t)$  分别表示向反应槽添加的对应钴离子和镉离子参与反应的锌粉量; 首先求得最优模型参数, 即  $k_1 = 5.46 \times 10^{-4}$ ,  $k_2 = 3.66 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha = 9.54$ ,  $\beta = 1.415 \times 10^3$ , 由文献<sup>[14,15]</sup>可知, 锌粉反应表面积与重量之间的关系  $U = 1740 \text{ m}^2/\text{kg} \times G \text{ kg}$ . 因此, 一旦求得最优的锌粉反应表面积后, 即可根据反应表面积与重量之间的线性关系, 迅速得到参与反应的锌粉重量, 从而为生产提供操作指导.

定义如下目标函数:

$$J_2 = (x_1(8) - \bar{x}_1(8))^2 + (x_2(8) - \bar{x}_2(8))^2 + \int_0^8 ((U_1(t))^2 + (U_2(t))^2) dt, \quad (15)$$

求解最优控制参数  $\sigma_1^i$  和  $\sigma_2^i$ , 其中  $i = 1, \dots, 8$ , 并满足如下连续状态不等式约束:

$$g_{j,\varepsilon}(x) = e - (x_j(t) - \bar{x}_j(t))^2 \geq 0, \quad t \in [0, 8], j = 1, 2, \quad (16)$$

其中  $\bar{x}_j(t)$  ( $j = 1, 2$ ) 为求得最优模型参数时钴离子和镉离子的浓度状态值;  $e > 0$  是给定误差边界, 在数值仿真中是已知量, 给定为  $e = 10^{-7}$ .

采用文献<sup>[5]</sup>中的约束转换方法, 上述每个连续状态不等式约束可以近似为一系列规范型不等式约束条件:

$$g_{j,\varepsilon}(x) = \delta + \int_0^8 \mathcal{L}_{j,\varepsilon}(t, x_j(t)) dt \geq 0, j = 1, 2, \quad (17)$$

其中:

$$\mathcal{L}_{j,\varepsilon}(t, x_j(t)) = \begin{cases} e - (x_j(t) - \bar{x}_j(t))^2, & g_{j,\varepsilon} < -\varepsilon, \\ \frac{(e - (x_j(t) - \bar{x}_j(t))^2 - \varepsilon)^2}{4\varepsilon}, & -\varepsilon \leq g_{j,\varepsilon} \leq \varepsilon, \\ 0, & g_{j,\varepsilon} > \varepsilon, \end{cases} \quad (18)$$

且有  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon$  和  $\delta$  为给定量, 初始值分别给定为  $\varepsilon^0 = 10^{-4}$ ,  $\delta^0 = 10^{-2}$ .

根据定理 1 和定理 2, 可分别推导出目标函数  $J_2$  以及两个规范型约束条件  $g_{1,\varepsilon}$  和  $g_{2,\varepsilon}$  关于控制参数  $\sigma_1^i$  和  $\sigma_2^i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) 的梯度公式.

利用已经求得的最优模型参数和已选定的相关仿真参数, 按照基于梯度的序列二次规划算法求解锌粉反应表面积的最优控制参数.

求得的对应用于控制量  $U_1$  的 8 个最优控制参数分别为:

$$\begin{aligned} \sigma_1^1 &= 1.86 \times 10^4, \sigma_1^2 = 1.53 \times 10^5, \\ \sigma_1^3 &= 1.03 \times 10^5, \sigma_1^4 = 4.96 \times 10^4, \\ \sigma_1^5 &= 6.96 \times 10^4, \sigma_1^6 = 7.15 \times 10^4, \\ \sigma_1^7 &= 9.05 \times 10^4, \sigma_1^8 = 1.08 \times 10^5. \end{aligned}$$

对应于控制量  $U_2$  的 8 个最优控制参数分别为:

$$\begin{aligned} \sigma_2^1 &= 5.78 \times 10^5, \sigma_2^2 = 3.61 \times 10^5, \\ \sigma_2^3 &= 2.71 \times 10^5, \sigma_2^4 = 4.37 \times 10^5, \\ \sigma_2^5 &= 5.16 \times 10^5, \sigma_2^6 = 4.49 \times 10^5, \\ \sigma_2^7 &= 4.56 \times 10^5, \sigma_2^8 = 4.92 \times 10^5. \end{aligned}$$

据锌粉颗粒重量与反应表面积之间的线性关系, 可得每小时对应钴和镉离子浓度应参与反应的总锌粉添加量, 其控制曲线如图 1 所示.

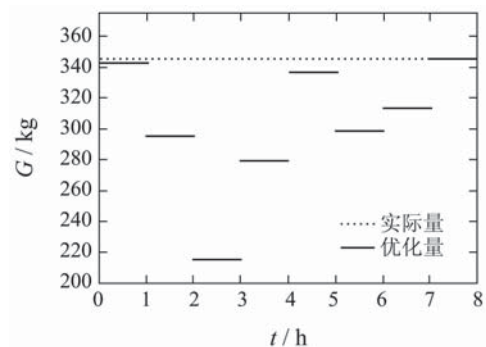


图 1 参与反应的总锌粉量

Fig. 1 Total zinc powder weight

从图1中可以看出,优化后每小时的总锌粉量明显比实际用量要少,最好的大约可以少130 kg,优化效果良好.采用多时滞优化控制方法求解最优控制参数的时候,会同时得到一组新的状态曲线,这组状态曲线应不过多偏离求解最优模型参数时得到的状态曲线,相应的钴和镉离子浓度状态曲线如图2和图3所示.虽然有些偏差,但是在 $10^{-3}$ 数量级内,总体的趋势也是对的,说明了算法的有效性.

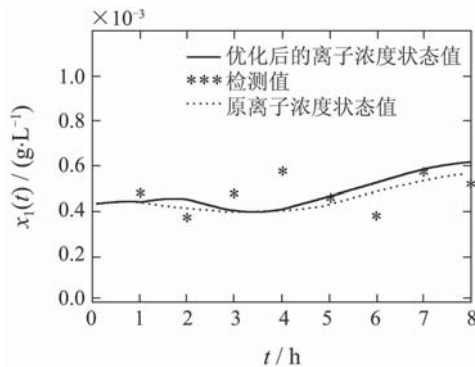


图2 钴离子浓度状态曲线

Fig. 2 Cobalt ion concentration

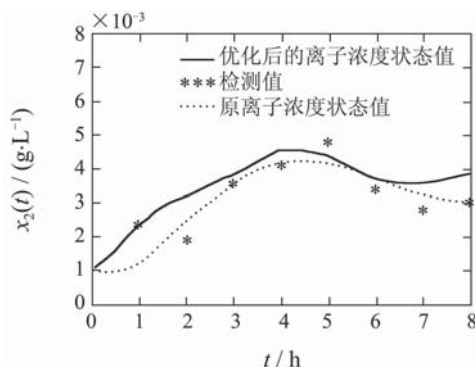


图3 镉离子浓度状态曲线

Fig. 3 Cadmium ion concentration

## 5 结论(Conclusion)

本文针对湿法炼锌净化过程中存在的多时滞问题提出其优化控制方法,并给出优化计算控制参数的梯度公式,同时描述它们的统一数值计算方法,这类优化控制问题最终是被转化为数学规划问题来求解的.整个优化过程都是利用基于梯度的SQP算法.由仿真结果可以看出,优化后的锌粉量比实际添加的锌粉量少很多,因此该优化控制方法可以为实际操作提供有效的指导.

## 参考文献(References):

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robotics by learning[J]. *Journal of Robotic System*, 1984, 12(2): 123 – 140.
- [2] BIEGLER L T, GROSSMANN I E. Retrospective on optimization[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2004, 28(8): 1169 – 1192.

- [3] CHACHUAT B, MITSOS A, BARTON P I. Optimal design and steady-state operation of micro power generation employing fuel cells[J]. *Chemical Engineering Science*, 2005, 60(16): 4535 – 4556.
- [4] MICHAELI B, JESUS R G. Optimal control for linear systems with multiple time delays in control input[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(1): 91 – 96.
- [5] TEO K L, GOH C J, WONG K H. *A Unified Computational Approach to Optimal Control Problems*[M]. New York: Longman Scientific and Technical, 1991.
- [6] LUUS R. Optimal control by dynamic programming using accessible grid points and region contraction[J]. *Hungarian Journal of Industrial Chemistry*, 1989, 17(4): 523 – 543.
- [7] BIEGLER L T. Solution of dynamic optimization problems by successive quadratic programming and orthogonal collocation[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1984, 8(3): 243 – 248.
- [8] RAJESH J, GUPTA K, KUSUMAKAR H K, et al. Dynamic optimization of chemical processes using ant colony framework[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 2001, 25(6): 583 – 595.
- [9] TEO K L, REHBOCK V, JENNINGS L S. A new computational algorithm for functional inequality constrained optimization problems[J]. *Automatica*, 1993, 29(3): 789 – 792.
- [10] TEO K L, LEE W R, JENNINGS L S, et al. Numerical solution of an optimal control problem with variable time points in the objective function[J]. *ANZIAM Journal*, 2002, 43(4): 463 – 478.
- [11] MARTIN R B. Optimal control drug scheduling of cancer chemotherapy[J]. *Automatica*, 1992, 28(6): 1113 – 1123.
- [12] WANG L Y, GUI W H, TEO K L, et al. Time delayed optimal control problems with multiple characteristic time points: computation and industrial applications[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2009, 5(4): 705 – 718.
- [13] SCHITTKOWSKI K. *NLPQLP: A Fortran Implementation of a Sequential Quadratic Programming Algorithm with Distributed and Non-monotone Line Search*[M]. Bayreuth: University of Bayreuth, 2004.
- [14] DREHER T M, NELSON A, DEMOPOULOS G P, et al. The kinetics of cobalt removal by cementation from an industrial zinc electrolyte in the presence of Cu, Cd, Pb, Sb and Sn additives[J]. *Hydrometallurgy*, 2001, 60(2): 105 – 116.
- [15] 张秋芳, 张宇光, 郭亚会. 硫酸锌溶液净化除钴锌粉粒度对单耗的影响[J]. *有色冶炼*, 1999, 28(6): 30 – 31.  
(ZHANG Qiufang, ZHANG Yuguang, GUO Yahui. Effect of zinc powder size for cobalt removal from zinc sulphate solution on unit consumption[J]. *Nonferrous Smelting*, 1999, 28(6): 30 – 31.)

## 作者简介:

陈宁 (1970—), 女, 教授, 博士, 主要研究方向为复杂大系统的分散鲁棒控制及工业大系统的建模与优化控制, E-mail: ningchen@mail.csu.edu.cn;

沈晓瑜 (1986—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为系统的优化控制方法及大系统分散鲁棒控制, E-mail: shxy-0501@163.com;

桂卫华 (1950—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为工业大系统递阶和分散控制理论及应用、鲁棒控制、优化控制、复杂生产过程建模与控制等, E-mail: gwh@mail.csu.edu.cn;

阳春华 (1965—), 女, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为复杂工业过程建模与优化控制、智能自动化控制系统与装置、智能信息处理技术等, E-mail: ychh@mail.csu.edu.cn;

王凌云 (1981—), 男, 博士, 主要研究方向为复杂工业过程的智能与优化控制方法、电力系统优化控制, E-mail: wly@ctgu.edu.cn.