

H_∞ 回路成形中的 μ 综合法

何 朕, 姜晓明, 孟范伟, 王广雄

(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 黑龙江 150001)

摘要: H_∞ 控制理论中的回路成形设计和 μ 综合都已经是定型的设计方法. 最近有文献提出一种将这两种设计方法结合起来处理弱阻尼谐振模态参数摄动的新方法. 但是实际设计表明, 二者的结合并没有达到预期的效果. 本文分析指出, 回路成形本质上是一种鲁棒稳定性设计, 其 H_∞ 范数指标的逆就是系统的稳定裕度. 而 μ 综合只是一种鲁棒性能的设计工具. μ 综合与回路成形结合只是反映在稳定裕度上, 而并不影响设计所允许的摄动大小. 所以在回路成形设计中没有必要再加进 μ 综合法. 文中附有算例.

关键词: H_∞ 回路成形; 稳定裕度; μ 综合; 鲁棒性能; 弱阻尼模态

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

μ -synthesis in H-infinity loop-shaping design

HE Zhen, JIANG Xiao-ming, MENG Fan-Wei, WANG Guang-xiong

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Heilongjiang Harbin 150001, China)

Abstract: Both loop-shaping design and μ -synthesis are standard design tools of the H-infinity control theory. Recently, a novel design method combining μ -synthesis with loop-shaping is proposed for dealing with the parameter uncertainty of the lightly damped mode. However, the practical design shows that such combination fails to provide the expected result. We point out that the loop-shaping design is essentially a method for robust stability, because the inverse of the resulting H-infinity norm is the stability margin of the system. However, the μ -synthesis is a real tool for designing the robust performance. The combination of μ -synthesis with loop-shaping determines only the stability margin, but not the size of the allowable perturbation. Therefore, there is no need to add an extra procedure of μ -synthesis to the loop shaping design. A design example is presented for explanation.

Key words: H-infinity loop shaping; stability margin; μ -synthesis; robust performance; lightly damped

1 引言(Introduction)

H_∞ 控制理论中的回路成形设计^[1-2]和 μ 综合^[3-4]都已经是定型的设计方法. H_∞ 回路成形是以允许的(标称)互质摄动的范数 $\|\Delta\|_\infty$ 为设计指标, 如果 $\|\Delta\|_\infty \leq 0.2$ ^[2,5]就认为设计具有鲁棒性. 但是因为不是在给定的摄动范围下的鲁棒设计, 最近有文献提出将回路成形与 μ 综合结合起来解决参数摄动下的鲁棒设计问题, 而且是作为一种新方法来提出的^[5]. 但是实际设计表明, 二者的结合并没有达到预期的效果. 这是因为以往的一些文献并未认真探讨过这些方法的实质, 只从字面上来了解这些方法, 因而存在认识上的误区. 本文将分析这两种方法的基本特点, 指出即使另有参数摄动, 回路成形设计中也没必要再加进 μ 综合, 并通过算例来进行对比说明.

2 回路成形的鲁棒性(Robustness of the loop shaping design)

H_∞ 回路成形法中的对象是用互质分解来描述

的. 例如, 若采用右互质分解(r.c.f), 则对象就是

$$G = NM^{-1}, N, M \in RH_\infty, \quad (1)$$

式中的对象 G 是已经按高低频段要求进行“成形”, 即已加入相应权函数后的传递函数. 当对象是用互质因子来表示时, 摄动的对象就用互质因子的加性摄动来表示, 即

$$G_\Delta = (N + \Delta_N)(M + \Delta_M)^{-1}, \quad (2)$$

式中 $\Delta_N, \Delta_M \in H_\infty$ 为稳定的传递函数. 图1中 G_Δ 就是这个用互质因子摄动来表示的(摄动)对象. 从图1可见, 这个对象的不确定性是1入2出, 对应的矩阵表达式为

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{bmatrix}. \quad (3)$$

这种不确定性就称为互质因子不确定性.

设将图1分为不确定性部分 Δ 和标称部分 $F_1(P, K)$, 其中的 P 是 G_Δ 中除去 (Δ_N, Δ_M) 的余下部

分所构成的广义对象. 设 $F_1(P, K)$ 的 H_∞ 范数为 γ ,

$$\|F_1(P, K)\|_\infty = \gamma. \tag{4}$$

并设互质因子不确定性的范数为 ε ,

$$\|\Delta\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{bmatrix} \right\|_\infty = \varepsilon. \tag{5}$$

根据小增益定理, 当 $\varepsilon < \gamma^{-1}$ 时, 系统就应该是稳定的.

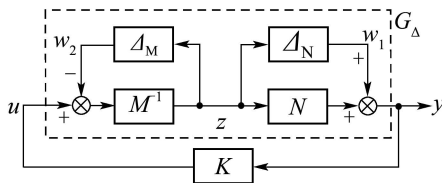


图1 互质因子不确定性的系统

Fig. 1 System with coprime factor uncertainty

注意到, 式(1)一般采用标称互质分解(normalized coprime factorization)^[1], 故 $\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$ 是内矩阵. 传递函数阵左乘一个内矩阵后, 其 H_∞ 范数是不变的^[6-7], 即

$$\|F_1(P, K)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} F_1(P, K) \right\|_\infty.$$

所以求解 H_∞ 问题时, 可以将图1中的输出 z 右乘传递函数 N 阵和 M 阵, 成为两个输出 $[z_1 \ z_2]^T$, 如图2所示. 系统的范数指标为

$$\|T_{zw}\|_\infty = \gamma, \tag{6}$$

式中 T_{zw} 是 $[w_1 \ w_2]^T$ 到 $[z_1 \ z_2]^T$ 的传递函数阵. γ 的逆, 即 γ^{-1} 代表了回路成形系统的稳定裕度. 稳定裕度反映了设计的鲁棒性, 对回路成形来说, 如果 γ 值不大于 $4 \sim 5$, 就认为此回路成形的设计具有鲁棒性^[1, 5].

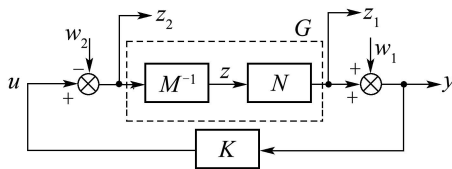


图2 H_∞ 设计时的系统

Fig. 2 System for H_∞ design

鲁棒(稳定)性对任何控制系统的设计都是要求的, 因为数学模型不可能与实际对象完全一致, 任何设计都应该允许对象有一定的摄动, 否则这个设计是不能用的. 在经典理论时期, 这种鲁棒性反映为幅值裕度和相位裕度. 随着认识的深入, 还要求一个设计对未建模动态具有鲁棒稳定性. 在 H_∞ 设计中, 这个鲁棒稳定性的条件是

$$\|W_2 T\|_\infty \leq 1, \tag{7}$$

式中: W_2 是乘性不确定性的界函数(权函数), T 是系统的闭环传递函数.

但是乘性不确定性有一定的局限性. 例如, 对于弱阻尼系统来说, 如果谐振模式的频率 ω_0 有摄动, 就无法用乘性不确定性的界来进行限定^[1]. 另外, 乘性不确定性也不适用于不稳定的摄动, 为此提出了可以描述更大一类不确定性的互质因子摄动(图1)^[1-2]. 互质因子摄动既可概括未建模动态, 也可以概括参数不确定性. 互质因子不确定系统可等价变换为图2的形式. 图2对应的不确定性已是一个2入2出的4块结构, 更具普遍性^[8]. 设用 Δ_{LS} 表示这个2入2出的不确定性, 则可将图2进一步简化成图3. 图3表明, H_∞ 回路成形设计除高低频段的成形要求外, 就是一个单一的鲁棒稳定性问题, 是互质因子摄动 Δ_{LS} 下的鲁棒稳定性问题. 文献[8]将这4块不确定性系统的 $\|T_{zw}\|_\infty^{-1} = \gamma^{-1}$ 定义为稳定裕度(stability margin). H_∞ 范数在一般的 H_∞ 设计中都是一种性能指标, 不过在 H_∞ 回路成形设计中这却是一个鲁棒稳定性的指标. 这个概念对正确认识回路成形法很是重要.

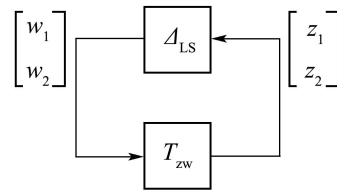


图3 H_∞ 回路成形的结构图

Fig. 3 Schematic diagram of the H_∞ loop shaping design

注意到互质因子摄动可以包含谐振模式的参数摄动等一大类摄动^[1], 当用回路成形法设计时只要稳定裕度(γ^{-1})满足要求, 系统对谐振模式的摄动也是鲁棒稳定的. 所以从理论上讲, 回路成形法设计时没有必要再将谐振模式的参数摄动单独列出来, 另外再加一个 μ 综合. 不过从另一方面来说, 如果将影响鲁棒稳定性的最大因素单独列出来, 在回路成形法中加进 μ 综合^[5], 能否得到一个更好的设计? 见下一节的分析.

3 μ 综合(μ -synthesis)

μ 综合是用来处理鲁棒性能(robust performance)的设计问题的. 假设系统的性能是用灵敏度 S 来表示的, $S = (I + GK)^{-1}$, 则在 H_∞ 设计中就是对其加权的范数小于1来进行求解, 即 $\|W_1 S\|_\infty < 1$. 如果对象有摄动, 就要求 $\|W_1 S_\Delta\|_\infty < 1$, 这就是鲁棒性能问题. 式中 S_Δ 为摄动后系统的灵敏度函数. 图4是一般情况下的鲁棒性能问题的框图, 图中的 M 是已包含有控制器 K 的系统. 设

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

其中: M_{11} 是系统中与不确定性块 Δ 相连的部分, 如果 M_{11} 与 Δ 所构成的回路是稳定的, 则就称这个系统是鲁棒稳定的; 式中 M_{22} 是没有摄动时的名义系统的性能传递函数, 例如, 可以是加权的灵敏度 W_1S . M 与 Δ 所构成的上线性分式变换式为

$$F_u(M, \Delta) = M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}, \quad (9)$$

式(9)是含有不确定性 Δ 的表示系统性能的传递函数. 鲁棒性能问题就是要求其范数指标

$$\|F_u(M, \Delta)\|_\infty < 1.$$

这个性能要求可以用一个摄动块 Δ_P 来表示(图4虚线所示), $\bar{\sigma}(\Delta_P) \leq 1$. 将摄动块归并到一起, 图4就可整理成图5的形式, 并定义新的摄动块为

$$\tilde{\Delta} = \text{diag}\{\Delta, \Delta_P\}. \quad (10)$$

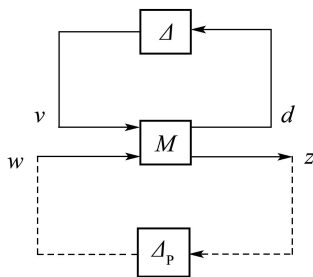


图4 鲁棒性能问题的框图

Fig. 4 Block diagram of the robust performance problem

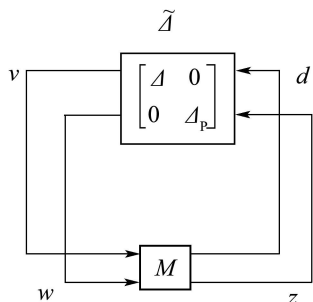


图5 鲁棒性能问题中的 $\tilde{\Delta}$

Fig. 5 $\tilde{\Delta}$ in the robust performance problem

现在这个摄动块是一种块对角的结构, 这样的不确定性称为结构不确定性(structured uncertainty). 结构不确定性的系统(图5), 如果仍采用 H_∞ 范数条件 $\|M\|_\infty < 1$ 作为鲁棒稳定性条件就有了保守性. 为此需要定义一个新的函数来代替奇异值函数 $\bar{\sigma}(M)$, 这就是结构奇异值 $\mu(M)$ ^[3-4], 下面是结构奇异值理论中的一个主要定理, 因为这已经是一个定型的定理, 所以不再给出证明.

定理 1 鲁棒性能定理^[4,6-7].

$F_u(M, \Delta)$ 稳定, 且 $\|F_u(M, \Delta)\|_\infty < 1, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ 的充要条件是

$$\|\mu(M)\|_\infty < 1, \quad (11)$$

式中

$$\|\mu(M)\|_\infty := \sup_\omega \mu[M(j\omega)]. \quad (12)$$

根据定理1, 一般是用 μ 综合法来求解这个鲁棒性能问题的式(11). μ 计算中用的是 μ 的上界

$$\mu(M) \leq \inf_D \bar{\sigma}[DM D^{-1}]. \quad (13)$$

式(13)表明, 如果求得标定阵 D 后, 这个奇异值 $\bar{\sigma}$ 的问题就可采用常规的 H_∞ 优化的算法来求得控制器 K . 这种 $D-K$ 迭代算法就称为 μ 综合^[3,7,9].

当采用 H_∞ 回路成形法时, 回路成形中的性能, 即范数指标 $\|T_{zw}\|_\infty^{-1}$ 表示的是一种稳定裕度. 所以在回路成形中加进 μ 综合, 只是多考虑了一个参数摄动后的稳定裕度. 现在来具体说明 H_∞ 回路成形中加进 μ 综合的问题. 文献[5]所研究的问题中有弱阻尼谐振模态频率 ω_0 的摄动, 这是参数不确定性问题, 所以提出在回路成形设计中再加上这个参数不确定性. 图6所示就是相应的框图, 图中 Δ 表示这里的谐振模态的参数摄动. 图6中 M 中的(2, 2)块 M_{22} 就是回路成形设计中输入到输出的传递函数 T_{zw} , 而 Δ_{LS} 就是回路成形中的互质摄动(见图3). 不过因为 μ 综合中各摄动块的范数都是1(见定理1), 对 Δ_{LS} 作归一化处理后, 就要在回路成形的通道中乘上 $\gamma^{-1}I$.

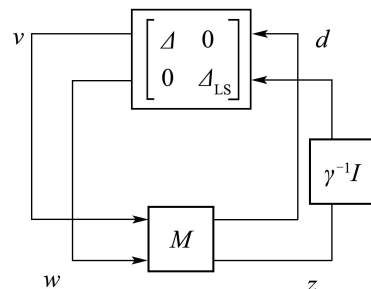


图6 回路成形加 μ 综合的设计框图

Fig. 6 Block diagram of the H_∞ loop shaping design plus μ -synthesis

这里对加进 μ 综合问题的讨论思路是, 先不考虑参数摄动, 按常规的 H_∞ 回路成形设计得一控制器 K_1 , 相应的稳定裕度为 γ_1^{-1} . 将这个控制器 K_1 闭环后分析该系统实际上可允许的参数变化范围, 设为 $|\Delta_1|$. 然后以这个 $|\Delta_1|$ 作为给定摄动的大小, 采用回路成形加 μ 综合来进行设计. 具体做法是调整图6中的 γ 值, 使最终的 $\mu(M) \rightarrow 1$ (见定理1), 设这时对应的 γ 为 γ_2 , 所得的控制器为 K_2 . 这个鲁棒性能问题肯定是有解的, 而且现在处理的是摄动后的性能, 当然要比上面名义系统的性能(γ_1^{-1})要差一些, 即 $\gamma_2^{-1} < \gamma_1^{-1}$ (虽然差别不是太大). 现在的问题是, 加上 μ 综合

后能否使允许的摄动范围 $|\Delta| > |\Delta_1|$? 答案是否定的. 因为即使是鲁棒性能问题(图6), 当 $\Delta = 0$ 时则是名义系统, 而原来的 Δ_1 本是名义系统所能做到的最大值.

综上所述可以看到, 当有参数摄动时, H_∞ 回路成形设计中也并没有必要再将 μ 综合结合进来. 常规回路成形设计所允许的摄动大小是回路成形法所能做到的最大值, 即使加上 μ 综合也不可能再扩大其(允许的)摄动范围.

4 算例(Design example)

这里结合回路成形中的一个典型例子^[1]来进行说明. 例题的背景是卫星的姿态控制. 设本例中有一刚性模态和一个挠性模态, 其状态空间方程为

$$\begin{cases} P_0 : \dot{x} = A_0x + B_0u, \\ y = C_0x, \end{cases} \quad (14)$$

式中: u 是控制力矩(N·m), y 是滚转角(rad), 相应的状态阵为

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix},$$

$$B_0^T = [0 \ 1.7319 \times 10^{-5} \ 0 \ 3.7859 \times 10^{-4}],$$

$$C_0 = [1 \ 0 \ 1 \ 0],$$

其中挠性模态的频率 $\omega_0 = 1.539$ rad/s, 阻尼比 $\zeta = 0.003$. 如果挠性模态的频率有摄动, 则其状态阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -[\omega_0(1+w_\delta\delta)]^2 - 2\zeta\omega_0(1+w_\delta\delta) & \end{bmatrix} =$$

$$A_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2\omega_0^2w_\delta & -2\zeta\omega_0w_\delta \end{bmatrix} =$$

$$K_1 = W_c K_\infty = \frac{22707(s+0.4)(s^2+0.2795s+0.04545)(s^2+0.1797s+1.041)}{s(s+4.417)(s+0.4048)(s^2-0.08855s+0.1365)}.$$

图8所示为控制器的幅频特性.

现在来分析此名义系统回路成形设计后的鲁棒性, 即允许的 ω_0 的摄动范围. 分析的框图如图6和图7所示, 根据小增益定理要求 $\bar{\sigma}(M_{11}) < 1$. 图9所示是式(15)中当摄动权系数 $w_\delta = 0.08$ 时所得的传递函数 M_{11} 的奇异值Bode图, 其最大值 $0.986 < 1$. 说明所设计的系统当谐振频率 ω_0 摄动 $\pm 8\%$ 时仍

$$A_0 + B_1\Delta C_1, \quad (15)$$

式中 w_δ 为摄动的权系数. 如果摄动为8%, 则 $w_\delta = 0.08$, 而 δ 则是不确定性部分, $|\delta| \leq 1$. 式(15)的第2个等号是忽略了展开式中的二次微小量而得到的.

图7是回路成形设计时的系统框图. 图中 P_0 是名义对象(见式(14)), $P_0 + \Delta P$ 的状态阵是与式(15)相对应的. W_c 是为了使系统高低频段特性满足指定(开环)回路特性而加的权函数. $G_s = P_0W_c$ 称为成形对象, 是 H_∞ 回路成形设计时的广义对象. 图中 K_∞ 是回路成形设计所得的 H_∞ 控制器. 最终的控制器 $K_1 = W_c K_\infty$. 本例中取

$$W_c = 10000 \frac{s+0.4}{s}. \quad (16)$$

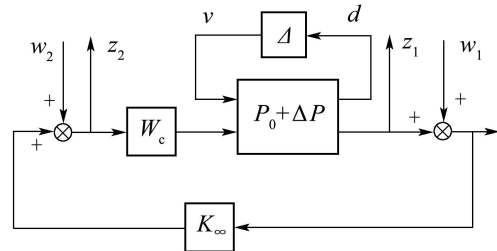


图7 回路成形设计时的系统

Fig. 7 System in the loop shaping design

这里分两种情形来进行设计. 第一种情形是只采用名义对象的特性 P_0 (见式(14))来进行回路成形设计, 设计后再来分析允许的 ω_0 的摄动范围, 设为 $|\Delta_1|$. 第2种情形是设指定的摄动范围 $|\Delta| = |\Delta_1|$, 按图7的回路成形加 μ 综合来进行设计, 并进行比较.

第1种名义系统的 H_∞ 回路成形设计是一种常规的 H_∞ 优化设计, 得到从 $[w_1 \ w_2]^T$ 到 $[z_1 \ z_2]^T$ 的传递函数阵 T_{zw} 的 H_∞ 范数为

$$\|T_{zw}\|_\infty = \gamma_1 = 2.4817$$

这里 $\gamma_1 < 4$, 满足回路成形对 γ 值范围的要求, 说明这个系统具有成形所要求的(开环)回路特性, 且具有鲁棒稳定性. 设用 K_1 来表示这第一种设计所得的控制器:

是稳定的.

图10是阶跃扰动0.3 N·m下系统的响应. 图10中曲线1是名义系统的响应, 曲线2对应 ω_0 正摄动8%, $\omega_0 + \Delta\omega = 1.62$ rad/s, 而曲线3对应 ω_0 负摄动8%, $\omega_0 - \Delta\omega = 1.416$ rad/s. 本例中摄动后的系统仍是稳定的. 因为小增益定理并不包含相位信息, 实际系统在 $\omega_0 + \Delta\omega = 1.76$ rad/s和 $\omega_0 - \Delta\omega =$

1.05 rad/s时才出现等幅振荡。

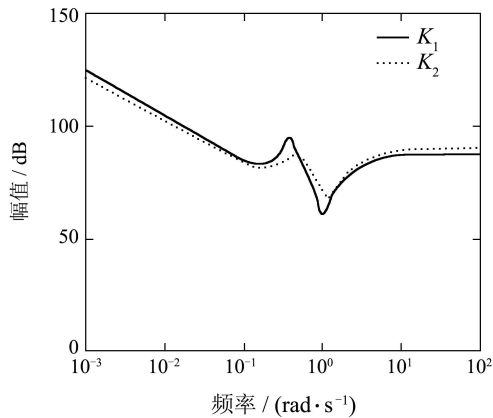


图8 控制器Bode图

Fig. 8 Bode plots of the Controller

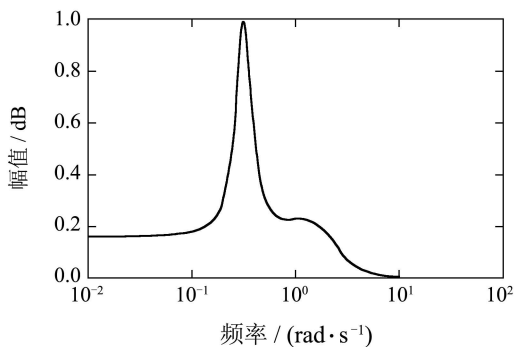


图9 M_{11} 的最大奇异值图

Fig. 9 Maximum singular value plot of M_{11}

$$K_2 = W_c K_\mu = \frac{-31075(s + 0.4)(s^2 + 0.2573s + 0.03278)(s^2 + 0.3155s + 1.407)}{s(s + 4.97)(s + 0.4055)(s^2 - 0.3247s + 0.2211)}$$

图8中同时绘有此控制器的幅频特性. 比较 K_1 和 K_2 可以看到, 二者并无实质性差别. 系统在阶跃扰动下的响应特性也与图10相似(图略). 这个 μ 综合是在摄动 $w_\delta = 0.08$ 下设计的, 其结果是 $\gamma_2^{-1} = 0.3 < \gamma_1^{-1}$. 可见将 ω_0 的摄动考虑进来时, 稳定裕度会有所下降. 如果扩大摄动的范围(例如 $w_\delta > 0.08$), 那么图6中的 γ^{-1} 还要减小, 即系统的稳定裕度还要降下来. 这个例子说明, 标称对象下的稳定裕度是一个值, 如果将模态摄动($\Delta\omega_0$)包括进来考虑, 那么稳定裕度就要减小, 这是很自然的. μ 综合可以用来计算这个减小的稳定裕度. 这就是 μ 综合在设计中所起的作用, 而 H_∞ 回路成形加 μ 综合并没有改变回路成形所得出的允许摄动的范围.

5 结论(Conclusion)

互质因子摄动可以概括包括谐振模态在内的参数摄动和未建模动态. H_∞ 回路成形法处理的就是系统对这类摄动的鲁棒稳定性问题. H_∞ 回路成

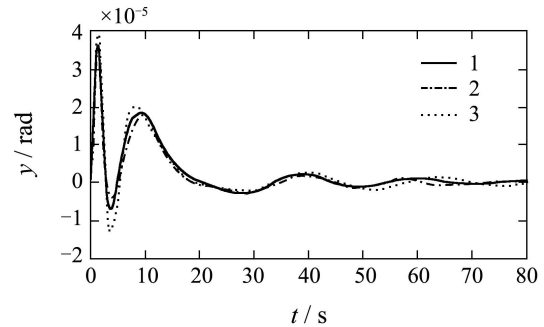


图10 系统在阶跃扰动下的响应

Fig. 10 Responses of the system under step disturbance

第2个设计就是回路成形加 μ 综合的设计. μ 综合中需要将不确定性 Δ_{LS} 进行归一化处理, 所以在信号通道上要乘以 $\gamma^{-1}I$ (见图6). 本例中将第一种设计中所得的允许摄动 $\Delta\omega/\omega_0 = 8\%$ 作为设计的给定值, 即取式(15)中的 $w_\delta = 0.08$, 并取图6信号通道中的衰减倍数

$$\gamma^{-1} = \gamma_1^{-1} = 1/2.4817.$$

根据这套数据, 采用 $D-K$ 迭代算法^[9]进行 μ 综合的结果是 $\mu_{\max} = 1.231 > 1$, 不满足定理1的结构奇异值小于1的要求. 为此修改图6中的衰减倍数

$$\gamma^{-1} = \gamma_2^{-1} = 0.3,$$

再次进行 $D-K$ 迭代, 得 $\mu_{\max} = 0.98 < 1$. 设计所得的控制器为

形中的设计指标就是这种鲁棒稳定性问题中的稳定裕度. μ 综合只是用来处理系统的鲁棒性能, 而 μ 综合中鲁棒性能的“性能”, 在回路成形法中就是指稳定裕度. 所以回路成形加进 μ 综合后只是对稳定裕度的值有影响, 并不能改善允许摄动的范围. 由此可见, 当用 H_∞ 回路成形法设计时, 除未建模动态外, 即使另有参数摄动, 也没有必要在回路成形法中再加 μ 综合. 因为回路成形法如果按规定的 γ 来设计, 对所有的这些摄动均具有鲁棒性. 这就是本文想要给出的结论.

参考文献(References):

- [1] MCFARLANE D, GLOVER K. Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions[M] // *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. New York: Springer Verlag, 1989, 138.
- [2] MCFARLANE D, GLOVER K. A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(6): 759 - 769.

- [3] STEIN G, DOYLE J. Beyond singular values and loop shapes[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1991, 14(1): 5 – 16.
- [4] PACKARD A, DOYLE J. The complex structured singular value[J]. *Automatica*, 1993, 29(1): 71 – 109.
- [5] LANZON A, TSIOTRAS P. A combined application of H_∞ loop shaping and μ -synthesis to control high-speed flywheels[J]. *IEEE Control Systems Technology*, 2005, 13(5): 766 – 777.
- [6] ZHOU K, DOYLE J C, GLOVER K. *Robust and Optimal Control*[M]. New York: Prentice-Hall, 1996.
- [7] 王广雄, 何朕. 应用 H_∞ 控制[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2010.
(WANG Guangxiong, HE Zhen. *Applied H_∞ Control*[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2010.)
- [8] LANZON A, PAPAGEORGIOU G. Distance measures for uncertain linear systems: a general theory[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(7): 1532 – 1547.
- [9] 何朕, 姜晓明, 孟范伟, 等. μ 综合中的 $D-K$ 迭代算法[J]. 电机与控制学报. 2010, 14(9):31 – 35.

(HE Zhen, JIANG Xiaoming, MENG Fanwei, et al. $D - K$ iteration algorithm for μ -synthesis[J]. *Electric Machines and Control*, 2010, 14(9): 31 – 35.)

作者简介:

何朕 (1972—), 女, 教授, 主要研究方向为 H_∞ 控制理论、控制系统的鲁棒设计, E-mail: hezhen@hit.edu.cn;

姜晓明 (1985—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为控制系统的鲁棒设计, E-mail: jiangxmdlmu@163.com;

孟范伟 (1981—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为控制系统的鲁棒设计, E-mail: heumfw@163.com;

王广雄 (1933—), 男, 教授, 主要研究方向为 H_∞ 控制理论、控制系统的鲁棒设计, E-mail: gxwang@hit.edu.cn.