

输入具有齿隙非线性特性的周期系统的自适应控制

朱 胜, 孙明轩, 何熊熊

(浙江工业大学 信息学院, 浙江 杭州 310023)

摘要: 针对一类输入含齿隙非线性动态特性的周期时变系统, 在周期不确定性可时变参数化的条件下设计自适应控制器. 对周期时变参数进行傅里叶级数展开, 并采用微分自适应律估计未知傅里叶系数和齿隙动态特性参数, 通过鲁棒方法消除截断误差和齿隙模型的有界误差项对系统性能的影响. 采用双曲函数替代符号函数确保控制器可微, 同时能有效抑制颤振. 引入 Δ 函数, 避免参数估计发散, 并保证系统输出渐近跟踪理想轨迹. 理论分析与仿真结果表明, 闭环系统所有信号有界.

关键词: 自适应控制; 输入齿隙特性; 非线性周期系统

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Adaptive control of a class of periodically time-varying nonlinear systems with input backlash

ZHU Sheng, SUN Ming-xuan, HE Xiong-xiong

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

Abstract: An adaptive controller is designed for a class of periodically time-varying systems with input backlash, when the periodical uncertainties can be parameterized. The unknown periodical parameters are expanded into a Fourier series; the coefficients of which and the unknown parameters of the backlash dynamics are estimated by using differential adaptive algorithms. A robust method is applied to eliminate the influences of truncation errors and bounded errors in the backlash model on the system performance. The sign function is replaced by the hyperbolic function to ensure the differentiability for the controller and to avoid the chattering. The introduction of Δ functions ensures the boundedness for the parameter estimates and the asymptotical convergence for the desired trajectory. The theoretical analysis and the numerical experiment show that all the signals in the closed-loop system remain bounded.

Key words: adaptive control; input backlash; periodically nonlinear systems

1 引言(Introduction)

齿隙非线性^[1]是不连续非线性特性的一种, 在传动装置、电磁驱动器、电子继电器电路等物理系统中普遍存在. 区别于死区^[2]和饱和特性^[3], 齿隙特性是一种动态特性, 类似于滞环特性^[4], 具有多值性和不可微的特点, 它的存在会给系统带来诸多不稳定因素, 影响系统的动态性能和稳态精度. 早在20世纪中期, 已有学者^[5]研究含齿隙特性的非线性系统的控制问题. 近年来, 随着现代控制理论的发展和成熟, 在解决齿隙非线性系统的控制器设计问题上产生了很多新方法. 一方面, 描述齿隙特性的数学模型在不断完善, 主要的有迟滞模型^[6]、死区模型^[7]、刚性冲击模型^[8]和弹性冲击模型^[9]; 另一方面, 对含齿隙特性系统的控制方法在不断发展, 如自适应逆方法^[1,10]、鲁棒自适应方法^[11]、模糊逻辑方法^[12]、神经网络方法^[13]等.

自适应控制通过微分自适应律能有效逼近未知定常参数, 但此方法不适用于对时变参数的估计. 周期参数是一种常见的时变参数, Inoue等^[14]在1981年提出重复控制方法, 通过设计周期学习律, 抑制周期干扰信号, 实现对周期参考信号的精确跟踪. 在处理不连续非线性方面, 文献^[15]设计双学习控制环, 输入非线性作为其中一环的控制对象, 所针对的非线性特性可以是死区、饱和等静态非线性, 但要求其输出可量测; 文献^[16]在死区输出不可量测的情形下, 设计学习控制器, 实现有界跟踪任务. 学习控制能有效处理有限区间上的时变参数和无限区间上的周期时变参数, 但当系统含齿隙等动态特性时, 差分形式的学习律无法给出参数估计的导数, 会给控制系统的仿真造成困难.

除学习控制外, 另有相关文献解决未知周期时变非线性系统的控制器设计问题^[17-20]. 文献^[21]采

用级数逼近方法处理时变参数, 并指出逼近误差会随迭代次数的增加而不断累加以至系统发散; 文献[22]针对周期时变系统, 基于S类函数设计自适应控制器, 给出几种不同的S类函数设计, 分析比较将其用于控制器设计时产生的不同效果。

本文针对齿隙非线性输入周期时变系统设计控制器, 利用傅里叶级数逼近未知周期时变参数, 各参数估计采用微分自适应律以确保得到控制的导数。结合鲁棒自适应方法消除截断误差项对系统性能的影响。在控制器设计中采用双曲函数保证控制器光滑可导的同时有效抑制颤振。引入函数 $\Delta(t)$ 确保参数估计有界, 同时使得系统输出误差收敛于0。仿真实例验证算法的有效性。

2 问题提出(Problem formulation)

考虑一类非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = \eta^T(t)\xi(x_1, \dots, x_n) + u(v(t)), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $t \in [0, \infty)$, $X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量, $u(v(t))$ 是具有齿隙非线性特性的系统输入, $y \in \mathbb{R}$ 是系统输出, $\xi(x_1, \dots, x_n)$ 是已知的光滑函数, $\eta^T(t) \in \mathbb{R}^n$ 是未知光滑向量函数。

假设1 $\eta(t) = \eta(t - T)$, 且周期 T 已知。

因为 $\eta(t)$ 在 $[0, T]$ 上是连续的, 所以它在 $[0, T]$ 上有界, 根据上述假设知其 $[0, \infty)$ 有界。因此, 可对 $\eta(t)$ 进行傅里叶级数展开, 即

$$\eta(t) = \Phi^T(t)\Theta + \epsilon(t), \quad (2)$$

其中:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \phi_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\left(\sum_{i=1}^n l_i\right) \times n}, \quad (3)$$

l_i 表示 $\eta(t)$ 的第 i 个参数的展开项数; $\phi_i(t) = [\varphi_1(t) \ \dots \ \varphi_{p_i}(t)]^T$, $1 \leq i \leq n$, 每项表示如下:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = 1, \\ \varphi_{2j} = \sqrt{2}\sin(2\pi jt/T), \\ \varphi_{2j+1}(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi jt/T), \\ j = 1, \dots, (l_i - 1)/2. \end{cases} \quad (4)$$

令 $\theta_i = [\theta_{i,1} \ \theta_{i,2} \ \dots \ \theta_{i,l_i}]^T$ 表示第 i 个参数的傅里叶系数, 那么有 $\Theta = [\theta_1^T \ \dots \ \theta_n^T]^T$ 。令 $\hat{\Theta}(t) = [\hat{\theta}_1^T(t) \ \dots \ \hat{\theta}_n^T(t)]^T$ 为 Θ 的估计。式(2)中的 $\epsilon(t) = [\epsilon_1(t) \ \dots \ \epsilon_n(t)]^T$ 是傅里叶级数展开后的误差项, 满足 $|\epsilon_i(t)| \leq \epsilon_{Mi}$, ϵ_{Mi} 由下式给出:

$$\epsilon_{Mi} = \begin{cases} 2\sqrt{2}B_i \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{N-2} \frac{N-2}{N-3}, l_i = 1, N > 3, \\ 2\sqrt{2}B_i \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{N-2} \frac{1}{N-3} \frac{1}{(l_i - 1)^{N-3}}, \\ l_i > 1, N > 3. \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$B_i = \sup_{0 \leq t \leq T} (|d^{N-2}\eta_i(t)/dt^{N-2}|).$$

令 $\bar{\epsilon} = \|\epsilon_{M1}, \dots, \epsilon_{Mn}\|$, 有 $\|\epsilon(t)\| \leq \bar{\epsilon}$ 。

注1 这里将输入非线性环节和被控对象视为整体, 放宽了文献[15]对非线性环节要求输出可量测的限制条件, 符合实际应用中无法直接设计 $u(t)$, 而需通过设计 $v(t)$ 来实现输出精确跟踪。

一种典型的齿隙数学模型^[11]如下:

$$\dot{u}(t) = \begin{cases} m\dot{v}, \text{ 如果 } \dot{v}(t) \geq 0, u(t) = m(v(t) - c_r), \\ m\dot{v}, \text{ 如果 } \dot{v}(t) \leq 0, u(t) = m(v(t) - c_l), \\ 0, \text{ 其他.} \end{cases} \quad (6)$$

其中 $m > 0$, $c_l < c_r$ 是未知常参数。

也可用微分方程描述齿隙模型^[11], 即

$$\frac{du}{dt} = \alpha \left| \frac{dv}{dt} \right| (cv - u) + B \frac{dv}{dt}, \quad (7)$$

其中: α, c, B 是常数, 满足 $c > 0$, $c > B$ 。解此方程, 得

$$u(t) = cv(t) + d(t), \quad (8)$$

其中:

$$d(v) = [u_0 - cv_0]e^{-\alpha(v-v_0)\text{sgn}\dot{v}} + e^{-\alpha v \text{sgn}\dot{v}} + e^{-\alpha v \text{sgn}\dot{v}} \int_{v_0}^v [B - c]e^{\alpha\tau \text{sgn}\dot{v}} d\tau. \quad (9)$$

当 $\dot{v} > 0$ 或 $\dot{v} < 0$ 时, 对上式求极限, 分别有

$$\lim_{v \rightarrow \infty} d(v) = \lim_{v \rightarrow \infty} [u(v; v_0, u_0) - f(v)] = -\frac{c-B}{\alpha}, \quad (10)$$

$$\lim_{v \rightarrow -\infty} d(v) = \lim_{v \rightarrow -\infty} [u(v; v_0, u_0) - f(v)] = \frac{c-B}{\alpha}. \quad (11)$$

当 $\dot{v} > 0$ 时, $d(v)$ 是连续的, 给定初值 v_0 是有限值, 又因为式(10)成立, 所以 $d(v)$ 有界; 同理, 当 $\dot{v} < 0$ 时, $d(v)$ 亦有界。由于齿隙模型参数 α, c, B 未知, $d(v)$ 的界亦未知, 将界定义为 \bar{d} 。

假设2 理想轨迹 $y_d(t)$ 具有 $n-1$ 阶导数。

本文的控制目标是针对系统(1), 给定足够光滑的理想轨迹 $y_d(t)$, 在系统输入存在齿隙非线性特性的情形下, 设计控制器 $v(t)$, 使系统输出 $y(t)$ 渐近收敛于 $y_d(t)$ 。

3 控制器设计及稳定性分析(Controller design and stability analysis)

定义误差

$$e(t) = X(t) - X_d(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ \cdots \ e_n(t)]^T,$$

其中

$$X_d(t) = [y_d \ \dot{y}_d \ \cdots \ y_d^{(n-1)}]^T.$$

记 $e_s = [A^T \ 1]e(t)$, 其中 $A = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_{n-1}]^T$ 使多项式 $H(p) = p^{n-1} + \lambda_{n-1}p^{n-2} + \cdots + \lambda_1$ 是Hurwitz的.

$$\dot{e}_s = a(t) + \Theta^T \Phi(t) \xi(x_1, \cdots, x_n) + cv(t) + d(t) + \epsilon^T(t) \xi(x_1, \cdots, x_n), \quad (12)$$

其中 $a(t) = [0 \ A^T]e(t) - y_d^{(n-1)}$. 由于 $\xi(x_1, \cdots, x_n)$ 已知, 存在 $\bar{\xi}(x_1, \cdots, x_n) > 0$, 使 $|\epsilon^T(t) \xi(x_1, \cdots, x_n)| \leq \bar{\epsilon} \bar{\xi}$.

令 $\beta = \frac{1}{c}$, 给出控制律

$$v(t) = \chi(t) \hat{\beta}(t), \quad (13)$$

其中

$$\chi(t) = -a(t) - q_1 e_s - (\hat{\Theta})^T \Phi(t) \xi(x_1, \cdots, x_n) - \hat{d} \tanh \frac{\hat{d} e_s}{\Delta} - \bar{\epsilon} \bar{\xi} \tanh \frac{\bar{\epsilon} \bar{\xi} e_s}{\Delta},$$

$\hat{\beta}, \hat{\Theta}$ 和 \hat{d} 分别作为 β, Θ 和 d 的估计, 其自适应律如下:

$$\dot{\hat{\beta}} = -q_2 \chi e_s, \quad (14)$$

$$\dot{\hat{d}} = -q_3 \Delta \hat{d} + q_3 |e_s|, \quad (15)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = \Gamma \Phi(t) \xi(x_1, \cdots, x_n) e_s, \quad (16)$$

其中: q_1, q_2, q_3, Γ 是控制器参数; 取 $\Delta > 0$, 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = 0, \quad (17)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \Delta(\tau) d\tau = \delta < \infty. \quad (18)$$

注2 具有上述性质的 Δ 存在, 如 $\Delta(t) = \frac{1}{(t+1)^2}$, 它具有两方面作用: 一方面应用于双曲函数里, 在防止颤振的同时, 保证系统输出误差收敛于零; 另一方面, 用于界估计自适应律里, 避免实际系统运行时, 参数估计值发散.

定理1 针对系统(1), 满足假设1-2, 在控制律(13), 以及参数自适应律(14)-(16)的作用下, 闭环系统内所有信号有界, 并且系统输出渐近收敛于理想轨迹 $y_d(t)$, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_s(t) = 0. \quad (19)$$

证 定义Lyapunov-like函数

$$V = \frac{1}{2c} (e_s)^2 + \frac{1}{2q_3 c} (\hat{d})^2 + \frac{1}{2q_2} (\hat{\beta})^2 + \frac{1}{2c} (\hat{\Theta})^T \Gamma^{-1} \hat{\Theta}, \quad (20)$$

其中: $\tilde{d}(t) = \bar{d} - \hat{d}(t), \tilde{\beta}(t) = \beta - \hat{\beta}(t), \tilde{\Theta}(t) = \Theta(t) - \hat{\Theta}(t)$.

对式(20)求导, 并将式(12)、自适应律(14)-(16)代入并化简, 得

$$\dot{V} \leq -q_1 e_s^2 + \rho \Delta, \quad (21)$$

其中 $\rho = 2\beta\delta + \beta \frac{1}{4} \bar{d}^2$.

上式的推导中用到双曲正切函数的一个性质^[23]:

对任意 $\Delta > 0$ 和 $a \in \mathbb{R}$, 下列不等式成立:

$$0 \leq |a| - a \tanh \frac{a}{\Delta} \leq \delta \Delta, \quad (22)$$

其中 δ 是一个正常数, 满足 $\delta = e^{-(\delta+1)}$.

考虑式(17), 因为 Δ 有界, $\rho \Delta$ 有界, 当 $t > t_1$ 时, 存在 δ_1 , 使得 $\rho \Delta < \delta_1$, 当 $|e_s| \geq \sqrt{\frac{\delta_1}{q_1}}$ 时, $\dot{V}(t) < 0$. 因此,

e_s 收敛于一个领域内 $\Omega: |e_s| \leq \sqrt{\frac{\delta_1}{q_1}}$. 对上式两边积分, 得

$$V(t) \leq V(0) - q_1 \int_0^t e_s^2 d\tau + \frac{1}{4} \rho \int_0^t \Delta(\tau) d\tau, \quad (23)$$

因 $\int_0^\infty \Delta(t) d\tau = \delta$ 和 $V(0)$ 有界, $V(t)$ 有界, 由此知 $e_s(t), \hat{d}(t), \hat{\beta}(t), \hat{\Theta}(t)$ 有界, 据 $e_s(t)$ 的定义知 $e(t)$ 有界, 即系统的所有状态变量有界. 因此, 由式(13)可知控制 $v(t)$ 有界, 由式(12)知 $\dot{e}_s(t)$ 有界, 所以, $e_s(t)$ 一致连续, 由式(23)知 $e_s \in L_2$ 有界. 根据Barbalat引理, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_s = 0$.

4 仿真算例(Numerical example)

考虑如下二阶系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \eta(t) \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{e^{x_1} + e^{-x_1}} + u(v(t)), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (24)$$

其中 $\eta(t)$ 是未知时变参数, 并满足假设1, 已知周期 $T = \pi$. 在系统模型仿真中假设 $\eta(t) = \sin(2t)$; 齿隙模型如式(7), 其中参数 $c = 0.5, \alpha = 0.3, B = 0.2$. 给定被跟踪理想轨迹 $y_r(t) = \frac{\pi}{6} \sin(2t)$.

对上述系统施加控制律(13)和微分学习律(14)-(16), 设定各个参数值以及状态初值和参数估计的初值如下:

$$x_1(0) = 0.4, \ x_2(0) = \frac{\pi}{6}, \ \Theta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\hat{\beta}(0) = 0.001, \ \hat{d}(0) = 0, \ q_1 = 0.01,$$

$$q_2 = 0.01, \ q_3 = 0.001, \ \Gamma = \text{diag}\{0.3\}.$$

取 $\Delta(t) = \frac{1}{(t+0.03)^2}$, 得到输出误差曲线, 图1表明系统经过一个半周期的运行, 系统输出跟踪上周期为 π 的正弦信号, 同时发现, 正弦信号波峰处的跟踪

误差较大,在 10^{-3} 左右,波谷处的收敛精度较高,达到 10^{-5} 甚至 10^{-7} .

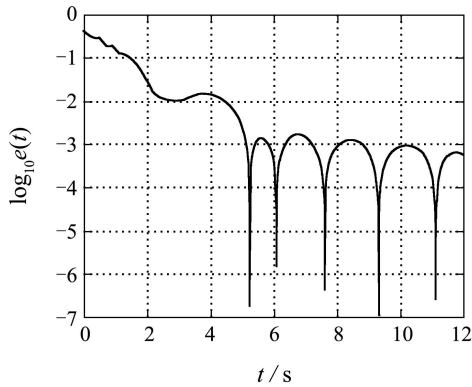


图1 输出误差

Fig. 1 Output error

5 结论(Conclusion)

对于周期时变系统,最直接有效的方法是采用重复控制,但差分形式的周期学习律无法求得控制的导数,给控制系统的仿真带来困难.自适应控制的参数估计使用微分方程,易求得控制器的导数,但单一自适应控制不能处理系统中的未知时变参数.本文对周期时变参数采用傅里叶级数展开,并考虑和消除截断误差对系统性能的影响.为防止参数估计发散,引入 Δ 函数,同时保证了输出误差渐近收敛于0.

参考文献(References):

- [1] TAO G, KOKOTOVIC P V. Adaptive control of systems with backlash[J]. *Automatica*, 1993, 29(2): 323 – 335.
- [2] TAO G, KOKOTOVIC P V. Adaptive control of plants with unknown dead-zone[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(1): 59 – 68.
- [3] PACHTER M, MILLER R B. Manual flight control with saturating actuators[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1998, 18(1): 10 – 20.
- [4] TAO G, KOKOTOVIC P V. Adaptive control of plants with unknown hysteresis[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(2): 200 – 212.
- [5] TUSTIN A. The effects of backlash and of speed-dependent friction on the stability of closed-cycle control systems[J]. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, 1947, 94(1): 143 – 151.
- [6] GRUNDELISU M, ANGELI D. Adaptive control of systems with backlash acting on the input[C] // *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway, NJ: IEEE, 1996, 4: 4689 – 4694.
- [7] TAO G, MA X, LING Y. Optimal and nonlinear decoupling control of systems with sandwiched backlash[J]. *Automatica*, 2001, 37(2): 165 – 176.
- [8] MATA-JIMENEZ M T, BROGLIATO B, GOSWAMI A. On the control of mechanical systems with dynamic backlash[C] // *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*. Piscataway, NJ: IEEE, 1997, 2: 1990 – 1995.
- [9] GERDES J C, KUMAR V. An impact model of mechanical backlash for control system analysis[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 1995, 5: 3311 – 3315.
- [10] TAO G, KOKOTOVIC P V. Continuous-time adaptive control of systems with unknown backlash[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(6): 1083 – 1087.
- [11] SU C Y, STEPANENKL Y, SVOBODA J, et al. Robust adaptive control of a class of nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(12): 2427 – 2432.
- [12] JANG J O, LEE P G, PARK S B, et al. Backlash compensation of systems using fuzzy logic[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2001, 6: 25 – 27.
- [13] SELMIC R R, LEWIS F L. Neural net backlash compensation with Hebbian tuning using dynamic inversion[J]. *Automatica*, 2001, 37(8): 1269 – 1277.
- [14] INOUE T, NAKANO M, IWAI S. High accuracy control of servomechanism for repeated contouring[C] // *Proceedings of the 10th Annual Symposium on Incremental Motion Control Systems and Devices*. Japan: Incremental Motion Control Society, 1981: 285 – 292.
- [15] TAN Y, XU J X. A note on iterative learning control for nonlinear systems with input uncertainties[C] // *Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control*. Seoul: IFAC, 2008: 12474 – 12479.
- [16] 朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 具有未知死区输入非线性系统的迭代学习控制[J]. *控制与决策*, 2009, 24(1): 96 – 100. (ZHU Sheng, SUN Mingxuan, HE Xiongxiang. Iterative learning control of a class of nonlinear systems with unknown input dead-zone[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(1): 96 – 100.)
- [17] DING Z. Asymptotic rejection of unknown sinusoidal disturbances in nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 174 – 177.
- [18] DING Z. Asymptotic rejection of asymmetric periodic disturbances in output-feedback nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2007, 43(3): 555 – 561.
- [19] LIUZZO S, MARINO R, TOMEI P. Adaptive learning control of linear systems by output error feedback[J]. *Automatica*, 2007, 43(4): 669 – 676.
- [20] LIUZZO S, TOMEI P. A global adaptive learning control for robotic manipulators[J]. *Automatica*, 2008, 44(5): 1379 – 1384.
- [21] 朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 基于S类函数的严格反馈非线性周期系统的自适应控制[J]. *自动化学报*, 2010, 36(8): 1137 – 1143. (ZHU Sheng, SUN Mingxuan, HE Xiongxiang. S-class functions based adaptive controller design for a class of periodically time-varying nonlinear systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(8): 1137 – 1143.)
- [22] 朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 严格反馈非线性时变系统的迭代学习控制[J]. *自动化学报*, 2010, 36(3): 96 – 100. (ZHU Sheng, SUN Mmingxuan, HE Xiongxiang. Iterative learning control of strict-feedback nonlinear time-varying systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(3): 96 – 100.)
- [23] POLYCARPOU M M, IOANNOU P A. A robust adaptive nonlinear control design[J]. *Automatica*, 1996, 32(3): 423 – 427.

作者简介:

朱胜 (1982—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为非线性系统的学习控制, E-mail: zuseng@163.com;

孙明轩 (1961—), 男, 教授, 主要研究方向为学习控制, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn;

何熊熊 (1965—), 男, 教授, 主要研究方向为重复控制, E-mail: hxx@zjut.edu.cn.