

牵制控制下的多智能体系统群一致性

宋海裕, 俞立, 胡鸿翔

(浙江工业大学信息工程学院, 浙江杭州 310023)

摘要: 本文研究了一类多智能体系统在牵制控制下的群一致性问题, 提出了融合群内信息交互、群间信息交互和牵制控制器的一致性协议. 对固定拓扑下的二群组智能体系统和切换拓扑下的多群组智能体系统, 利用稳定性理论和图论分别给出了适用于任意拓扑结构的充要条件, 使得智能体系统在所提协议和牵制控制器的联合作用下实现预期的群一致. 针对拓扑图中含有生成树这一特例, 分析了被施加牵制控制的智能体在拓扑结构中的具体位置. 此外, 对切换拓扑下进行非线性交互的多群组智能体系统, 利用Lyapunov方法推导出一个充分条件, 得出只要对多智能体系统的一部分主体进行牵制控制, 则所有智能体即可在所提协议和牵制控制器的作用下渐近收敛于各自的期望一致平衡点. 最后, 仿真例子验证了所提方法的有效性.

关键词: 多智能体系统; 群一致性; 牵制控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Group consensus in multi-agent systems via pinning control

SONG Hai-yu, YU Li, HU Hong-xiang

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

Abstract: In dealing with the group consensus problem of multi-agent systems via pinning control, we propose a consensus protocol combining the in-group information exchange, the out-group information exchange with the pinning controller for reaching more than one anticipative stationary state. By using stability and graph theories, we derive the necessary and sufficient conditions for the couple-group agent system in fixed topology and the multi-group agent system in switching topologies, respectively, such that all the agents can achieve their own consistent states asymptotically. Specially, the relation between the controlled agents and the interactive topology is analyzed for the case when the topology graph has a spanning tree. Moreover, based on the Lyapunov function method, a sufficient condition is derived for multi-group agent systems with nonlinear transmission to asymptotically reach several anticipative consistent states in switching topologies. The obtained results imply that the anticipative group consensus can be achieved if a fraction of them are controlled. Illustrative examples are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed methods.

Key words: multi-agent systems; group consensus; pinning control

1 引言(Introduction)

近年来, 多智能体系统的一致性问题吸引了众多学者, 并得到了广泛的应用, 如编队控制^[1-2]、聚集^[3]、群集^[4]和蜂拥^[5]等. 一致性是指随着时间的演化, 多智能体网络中所有个体状态趋于一致. 关于多智能体一致性的研究可以追溯到20世纪70年代的管理科学和统计领域^[6]. 1995年, Vicsek等人从统计力学的角度提出了Vicsek模型^[7], 该离散时间模型中所有智能体以相同的速率在平面中运动, 运动方向按照邻居角度的矢量平均进行更新. 文献[8]利用代数图论和控制理论对Vicsek模型作了理论分析. 文献[9]把文献[8]中的问题扩展到了有向拓扑图的情况, 并得出如果信息交互拓扑图中含有一生成树, 则所有的智能体最终均能收敛到一致平衡点. 此外, Olfati-Saber和Murray^[10-11]提出了多智能体系统

一致性的理论框架, 研究了固定拓扑和切换拓扑下的一致性, 并针对是否存在时延给出了两类一致性协议. 然而在上述文献中, 所考虑的一致性问题均为单个一致平衡点的情况, 为此, 文献[12]研究了智能体动态网络中具有多个一致平衡点的问题, 并给出了一个一致性协议, 使得在该协议下所有智能体能完成一个或多个一致平衡点的趋同.

牵制控制(pinning control)的基本思想是通过通过网络中的一部分节点施加控制, 达到对整个网络的控制. 汪小帆和陈关荣等^[13-14]将牵制控制策略引入到了无标度动态网络的控制中, 通过对一部分网络节点进行牵制, 使得所有的节点都稳定到平衡点. 文献[15]研究表明在线性或非线性复杂网络中只需对一个节点进行牵制控制, 即可保证整个网络的稳定. 文献[16]研究了非线性耦合情况下的多智能体一致

性问题,给出了一些充分条件,使得只需对一小部分节点施加牵制控制,即可保证所有的智能体收敛到期望的一致平衡点.针对系统不存在外部干扰的情况,文献[17]设计了一个牵制控制器使得移动智能体系统达到一个期望值.需要指出的是,文献[16-17]均只考虑了单个一致平衡点的情况.在现有文献中,未见有关多智能体动态网络牵制控制到多个一致平衡点的成果.鉴于此,本文对多智能体系统在牵制控制下的多平衡点趋同问题进行了研究,提出了融合群内信息交互、群间信息交互和牵制控制器的一致性协议.对固定拓扑和切换拓扑下的多智能体系统,分别给出了实现群一致的充要条件,并针对拓扑结构中含有生成树这一特例,分析了被施加牵制控制的智能体在拓扑结构中的具体位置.此外,对切换拓扑中进行非线性交互的多智能体系统,利用Lyapunov方法推导出充分条件,以通过对多智能体网络中的一部分节点进行牵制控制,来实现多个一致平衡点的趋同.

给定矩阵 $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C < 0$ 表示矩阵 C 为负定, $\lambda(C)$ 为 C 的特征根. $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数.记 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, A)$ 是具有 n 个节点的加权有向图,其中的 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为节点集, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 为边集, $A = [a_{ij}]$ 表示加权邻接矩阵.本文假设对任意的 $v_i \in \mathcal{V}$, 有 $a_{ii} = 0$. 有向图 \mathcal{G} 的边记为 (v_i, v_j) , 表示节点 v_i 可以接收到来自节点 v_j 的信息, 并称 v_j 为父节点, v_i 为子节点. 显然, $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ 当且仅当 $a_{ij} \neq 0$. 节点 v_i 的邻集记为 $\mathcal{N}_i = \{v_j \in \mathcal{V} | (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}$. 一条有向路由一组有序边组成, 形如 $(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \dots$, 其中 $(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \in \mathcal{E}$. 在一有向图中, 若除了一节点(称为根节点)外, 其他每个节点都有且仅有一个父节点, 则称该有向图为有向树. 在有向图中, 若可以找到一连接所有节点的有向树, 则称该有向图含有一生成树.

2 固定拓扑(Fixed topology)

设多智能体系统由两个子系统构成, 分别含有 m 和 n 个智能体, 并用 1 到 m 和 $m+1$ 到 $m+n$ 标记. 记两个子系统对应的子拓扑图分别为 \mathcal{G}_1 和 \mathcal{G}_2 , 整个系统的拓扑图为 \mathcal{G} . 每个子系统对应的编号集分别为 $\mathcal{I}_1 = \{1, 2, \dots, m\}$ 和 $\mathcal{I}_2 = \{m+1, m+2, \dots, m+n\}$, 节点(智能体)集为 $\mathcal{V}_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 和 $\mathcal{V}_2 = \{v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+n}\}$, 节点 v_i 的邻集定义为

$$\mathcal{N}_{1,i} = \{v_j \in \mathcal{V}_1 | (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}, \quad (1)$$

$$\mathcal{N}_{2,i} = \{v_j \in \mathcal{V}_2 | (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}, \quad (2)$$

则 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_{1,i} \cup \mathcal{N}_{2,i}$. 考虑到智能体在子系统内部和子系统之间的信息交互, 本文对智能体按在拓扑图中所处的位置进行如下划分:

$$\mathcal{V}_1^{\text{in}} = \{v_i \in \mathcal{V}_1 | \mathcal{N}_{2,i} = \emptyset \text{ 且 } v_i \notin \bigcup_{p \in \mathcal{I}_2} \mathcal{N}_{1,p}\},$$

$$\mathcal{V}_1^{\text{out}} = \{v_i \in \mathcal{V}_1 | \mathcal{N}_{2,i} \neq \emptyset \text{ 或 } v_i \in \bigcup_{p \in \mathcal{I}_2} \mathcal{N}_{1,p}\},$$

$$\mathcal{V}_2^{\text{in}} = \{v_i \in \mathcal{V}_2 | \mathcal{N}_{1,i} = \emptyset \text{ 且 } v_i \notin \bigcup_{p \in \mathcal{I}_1} \mathcal{N}_{2,p}\},$$

$$\mathcal{V}_2^{\text{out}} = \{v_i \in \mathcal{V}_2 | \mathcal{N}_{1,i} \neq \emptyset \text{ 或 } v_i \in \bigcup_{p \in \mathcal{I}_1} \mathcal{N}_{2,p}\}.$$

显然有 $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_1^{\text{in}} \cup \mathcal{V}_1^{\text{out}}$, $\mathcal{V}_1^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_1^{\text{out}} = \emptyset$, $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2^{\text{in}} \cup \mathcal{V}_2^{\text{out}}$, $\mathcal{V}_2^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_2^{\text{out}} = \emptyset$. 记 $\mathcal{V}^{\text{in}} = \mathcal{V}_1^{\text{in}} \cup \mathcal{V}_2^{\text{in}}$, $\mathcal{V}^{\text{out}} = \mathcal{V}_1^{\text{out}} \cup \mathcal{V}_2^{\text{out}}$.

设每个智能体 v_i 具有如下动态:

$$\dot{x}_i(t) = u_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (3)$$

其中: $x_i \in \mathbb{R}$ 为智能体 v_i 的状态, u_i 是状态反馈输入. 记 $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m+n})^T$.

定义 1 如果编号为前 m 和编号为后 n 的两组智能体的状态分别渐近收敛到所属子系统的一致平衡点, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_1, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}_2, \quad (5)$$

则称此系统具有群一致性.

不失一般性, 假定智能体子系统的期望一致平衡点分别为 x_1^* 和 x_2^* . 本文对智能体之间的信息交互规则作如下设定: ① 智能体 $v_i \in \mathcal{V}^{\text{in}}$, $i \in \mathcal{I}$, 对其所在子系统及邻居的期望一致平衡点均未知, 在信息交互时发送给群内邻居(即同一子系统内的邻居)的是 x_i ; ② 智能体 $v_i \in \mathcal{V}^{\text{out}}$, $i \in \mathcal{I}$, 对其所在子系统的期望一致平衡点已知, 但对群外邻居(即非同一子系统内的邻居)的期望一致平衡点未知, 此类智能体在信息交互中发送给群内邻居的是 x_i , 发送给群外邻居的信息为 $\hat{x}_i = x_i - x_i^*$, 其中

$$x_i^* = \begin{cases} x_1^*, & i \in \mathcal{I}_1, \\ x_2^*, & i \in \mathcal{I}_2. \end{cases} \quad (6)$$

基于规则①-②, 给出如下一致性协议:

$$u_i^c = \begin{cases} \sum_{v_j \in \mathcal{N}_{1,i}} \alpha_{i,j} (x_j - x_i) + \\ \sum_{v_j \in \mathcal{N}_{2,i}} \beta_{i,j} (\hat{x}_j - \hat{x}_i), \quad \forall i \in \mathcal{I}_1, \\ \sum_{v_j \in \mathcal{N}_{2,i}} \alpha_{i,j} (x_j - x_i) + \\ \sum_{v_j \in \mathcal{N}_{1,i}} \beta_{i,j} (\hat{x}_j - \hat{x}_i), \quad \forall i \in \mathcal{I}_2, \end{cases} \quad (7)$$

其中: u_i^c 的第 1 项为群内信息交互, $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$ 表示群内部传输信道的权重. u_i^c 的第 2 项为群间信息交互, $\beta_{i,j} \in \mathbb{R}$ 表示 \mathcal{G}_1 和 \mathcal{G}_2 之间传输信道的权重. 为使两子系统分别到达各自的期望一致平衡点 x_1^* 和 x_2^* , 提出如下牵制控制量:

$$u_i^d = \begin{cases} -d_i(x_i - x_1^*), \forall i \in \mathcal{I}_1, \\ -d_i(x_i - x_2^*), \forall i \in \mathcal{I}_2, \end{cases} \quad (8)$$

其中的控制增益 $d_i \geq 0$, 显然 $d_i = 0$ 意味着智能体 v_i 上不存在牵制控制. 这样, 本文的目标是通过一小部分的智能体进行牵制控制, 使得两组智能体在 $u_i = u_i^c + u_i^d$ 的作用下, 分别渐近收敛到各自的期望一致平衡点 x_1^* 和 x_2^* .

记

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,m} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{m+1,m+1} & \alpha_{m+1,m+2} & \cdots & \alpha_{m+1,m+n} \\ \alpha_{m+2,m+1} & \alpha_{m+2,m+2} & \cdots & \alpha_{m+2,m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m+n,m+1} & \alpha_{m+n,m+2} & \cdots & \alpha_{m+n,m+n} \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \beta_{1,m+1} & \beta_{1,m+2} & \cdots & \beta_{1,m+n} \\ \beta_{2,m+1} & \beta_{2,m+2} & \cdots & \beta_{2,m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{m,m+1} & \beta_{m,m+2} & \cdots & \beta_{m,m+n} \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \beta_{m+1,1} & \beta_{m+1,2} & \cdots & \beta_{m+1,m} \\ \beta_{m+2,1} & \beta_{m+2,2} & \cdots & \beta_{m+2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{m+n,1} & \beta_{m+n,2} & \cdots & \beta_{m+n,m} \end{bmatrix}.$$

首先本文给出基于任意拓扑结构的一个结论.

定理 1 若多智能体系统(3)受协议(7)和牵制控制器(8)的联合作用(即 $u_i = u_i^c + u_i^d$), 则 $m + n$ 个智能体能渐近实现预期的群一致, 当且仅当如下条件成立:

$$\max\{\text{Re}(\lambda(\Xi - D))\} < 0, \quad (9)$$

其中:

$$\Xi = A - L_\alpha + B - L_\beta,$$

$$D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_{m+n}\},$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0}_{m \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times m} & A_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times m} & B_2 \\ B_1 & \mathbf{0}_{n \times n} \end{bmatrix},$$

$$L_\alpha = \text{diag}\{L_\alpha^{(1)}, L_\alpha^{(2)}\}, L_\beta = \text{diag}\{L_\beta^{(2)}, L_\beta^{(1)}\},$$

$$L_\alpha^{(1)} = \text{diag}\left\{\sum_{j \in \mathcal{N}_{1,1}} \alpha_{1,j}, \dots, \sum_{j \in \mathcal{N}_{1,m}} \alpha_{m,j}\right\},$$

$$L_\alpha^{(2)} = \text{diag}\left\{\sum_{j \in \mathcal{N}_{2,m+1}} \alpha_{m+1,j}, \dots, \sum_{j \in \mathcal{N}_{2,m+n}} \alpha_{m+n,j}\right\},$$

$$L_\beta^{(1)} = \text{diag}\left\{\sum_{j \in \mathcal{N}_{1,m+1}} \beta_{m+1,j}, \dots, \sum_{j \in \mathcal{N}_{1,m+n}} \beta_{m+n,j}\right\},$$

$$L_\beta^{(2)} = \text{diag}\left\{\sum_{j \in \mathcal{N}_{2,1}} \beta_{1,j}, \dots, \sum_{j \in \mathcal{N}_{2,m}} \beta_{m,j}\right\}.$$

证 定义误差向量 $e_i = x_i - x_i^*, i \in \mathcal{I}$, 则

$$\dot{e}_i = \begin{cases} \sum_{v_j \in \mathcal{N}_{1,i}} \alpha_{i,j}(e_j - e_i) + \sum_{v_j \in \mathcal{N}_{2,i}} \beta_{i,j}(e_j - e_i) - d_i e_i, \forall i \in \mathcal{I}_1, \\ \sum_{v_j \in \mathcal{N}_{2,i}} \alpha_{i,j}(e_j - e_i) + \sum_{v_j \in \mathcal{N}_{1,i}} \beta_{i,j}(e_j - e_i) - d_i e_i, \forall i \in \mathcal{I}_2. \end{cases} \quad (10)$$

根据定义1, 群一致性等价于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i\| = 0, \forall i \in \mathcal{I}. \quad (11)$$

记

$$e = (e_1, e_2, \dots, e_{m+n})^T,$$

$$x^* = (\underbrace{x_1^*, \dots, x_1^*}_m, \underbrace{x_2^*, \dots, x_2^*}_n)^T,$$

则式(10)可用矩阵形式表示为

$$\dot{e} = (\Xi - D)e. \quad (12)$$

由线性时不变系统的稳定性理论可知, $e_i (i \in \mathcal{I})$ 渐近收敛于平衡点0当且仅当式(9)成立. 证毕.

定理1给出了多智能体系统(3)能在固定拓扑下实现群一致的一个充要条件. 由 D 中元素 d_i 与智能体 v_i 的一一对应性, 可以从条件(9)中确定需要进行牵制控制的智能体的最少数目和相应编号, 同时可以计算出对应牵制控制增益量 d_i 的最小值. 需要指出的是, 定理1给出的结果适用于具有任意拓扑结构的 \mathcal{G} , 是一个一般化的结论. 下面针对 \mathcal{G} 中含有生成树这一特例, 来分析被施加牵制控制的智能体在拓扑图中所处的具体位置.

定理 2 若拓扑图 \mathcal{G} 中含有一生成树, 则多智能体系统(3)可在协议(7)和牵制控制器(8)的联合作用下渐近实现预期的群一致, 当且仅当 \mathcal{G} 中任一生成树的根节点受到牵制控制.

证 由定理1的证明过程可知, 多智能体系统(3)在 $u_i = u_i^c + u_i^d$ 作用下实现预期的群一致等价于状态分别为 e_1, \dots, e_{m+n} 的 $m + n$ 个智能体在协议(10)作用下渐近趋同于一致平衡点 $e^* = 0$.

充分性. 不妨设 $T(v_s)$ 是 \mathcal{G} 中任一生成树, 其中根节点为 v_s . 若 v_s 受到牵制控制, 根据式(10), 可以看成有一新的节点 v_0 通过边 (v_s, v_0) 连接到了节点 v_s , 其中节点 v_0 的状态为 $e_0 = 0$, 边 (v_s, v_0) 的权重为 d_s . 记由节点 $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{m+n}\}$ 构成的拓扑图为 \mathcal{G}' , 则不难得到 \mathcal{G}' 有一生成树 $T(v_0) = (v_s, v_0) \cup T(v_s)$. 根据文献 [18] 中的引理2.2, 可知该 $m + n + 1$ 个节点可在协议(10)的作用下渐近趋同于一致平衡点 $e^* = e_0 = 0$.

必要性. 假设 \mathcal{G} 中所有处于根节点位置的智能体都没有受到牵制控制. 不妨设 $T(v_s)$ 为 \mathcal{G} 中任一生成树, 新节点 v_0 通过边 (v_r, v_0) 连接到了非根节点 v_r , 则

由根节点的特性可知, v_s 和 v_0 之间无法通过一有向路径相连, 即在新的拓扑图 \mathcal{G}' 中无法找到一生成树连接其中的 $m+n+1$ 个节点. 由文献[9]中的定理3.8可知, 此时群一致无法实现. 所以必定有一根节点受到牵制控制. 证毕.

根据定理2, 当智能体系统的拓扑结构图中含有一生成树时, 只需要对其中任意一个处于根节点位置的智能体施加牵制控制(8), 则所有的智能体即可趋同于各自子系统的期望一致平衡点. 此外, 若不考虑收敛速度, 该牵制控制器的增益可以任意小(大于0).

3 切换拓扑(Switching topologies)

不失一般性, 设所考虑的多智能体系统由 p 个子系统构成, 每个子系统分别包含 q_1, q_2, \dots, q_p 个智能体. 定义编号集

$$\mathcal{I}_k = \{1 + \sum_{i=1}^{k-1} q_i, 2 + \sum_{i=1}^{k-1} q_i, \dots, q_k + \sum_{i=1}^{k-1} q_i\},$$

节点集

$$\mathcal{V}_k = \{v_i, i \in \mathcal{I}_k\},$$

智能体 v_i 的邻集为

$$\mathcal{N}_{k,i} = \{v_j \in \mathcal{V}_k | (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\}, k = 1, 2, \dots, p,$$

则有 $\mathcal{I} = \bigcup_{k=1}^p \mathcal{I}_k$, $\mathcal{V} = \bigcup_{k=1}^p \mathcal{V}_k$, $\mathcal{N}_i = \bigcup_{k=1}^p \mathcal{N}_{k,i}$.

多群组智能体系统的群一致性定义如下.

定义2 如果智能体系统的所有个体能在协议 u_i 作用下实现:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0, \quad (13)$$

$\forall i, j \in \mathcal{I}_k, k = 1, 2, \dots, p$, 即每个子系统中智能体的状态收敛于各自的一致平衡点, 则称此系统具有群一致性.

在实际中, 由于障碍物、恶劣环境等外部干扰因素的存在, 使得经常会有智能体移出或重新加入拓扑网络, 同时智能体之间的通信链也经常会发生断裂. 因此, 智能体系统的拓扑结构不是恒定不变的, 且节点的邻集也会发生变化. 记所有可能的拓扑结构图为 $\{\mathcal{G}(1), \mathcal{G}(2), \dots, \mathcal{G}(M)\}$, 切换信号为 $\sigma(t)$. 对未知的切换时刻 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, 切换序列记为 $\{\mathcal{G}(t_0) : [i_0, t_0), [i_1, t_1), [i_2, t_2), \dots\}$, 表示当 $t \in [t_j, t_{j+1})$ 时, 智能体系统的拓扑结构为 $\mathcal{G}(i_j)$, $i_j \in \{1, \dots, M\}$. 基于此, 对智能体按在 $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ 中所处的位置进行如下划分:

$$\mathcal{V}_{k,\sigma(t)}^{\text{in}} = \{v_i \in \mathcal{V}_{k,\sigma(t)} | \bigcup_{l \neq k} \mathcal{N}_{l,i,\sigma(t)} = \emptyset \text{ 且 } v_i \notin \bigcup_{p \in \mathcal{I}/\mathcal{I}_k} \mathcal{N}_{k,p,\sigma(t)}\},$$

$$\mathcal{V}_{k,\sigma(t)}^{\text{out}} = \{v_i \in \mathcal{V}_{k,\sigma(t)} | \bigcup_{l \neq k} \mathcal{N}_{l,i,\sigma(t)} \neq \emptyset \text{ 或 } v_i \in \bigcup_{p \in \mathcal{I}/\mathcal{I}_k} \mathcal{N}_{k,p,\sigma(t)}\},$$

$k = 1, 2, \dots, p$. 显然有 $\mathcal{V}_{k,\sigma(t)} = \mathcal{V}_{k,\sigma(t)}^{\text{in}} \cup \mathcal{V}_{k,\sigma(t)}^{\text{out}}$, $\mathcal{V}_{k,\sigma(t)}^{\text{in}} \cap \mathcal{V}_{k,\sigma(t)}^{\text{out}} = \emptyset$. 记 $\mathcal{V}_{\sigma(t)}^{\text{in}} = \bigcup_{k=1}^p \mathcal{V}_{k,\sigma(t)}^{\text{in}}$, $\mathcal{V}_{\sigma(t)}^{\text{out}} = \bigcup_{k=1}^p \mathcal{V}_{k,\sigma(t)}^{\text{out}}$.

不失一般性, 设各子系统期望的一致平衡点分别为 $\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \dots, \tilde{x}_p^*$. 笔者对智能体之间的信息交互规则进行如下设定: ③ 智能体 $v_i \in \mathcal{V}_{\sigma(t)}^{\text{in}} (i \in \mathcal{I})$, 对其所在子系统及邻居的期望一致平衡点均未知, 在群内信息交互时以 x_i 进行传输; ④ 智能体 $v_i \in \mathcal{V}_{\sigma(t)}^{\text{out}} (i \in \mathcal{I})$, 对其所在子系统的期望一致平衡点已知, 但其群外邻居的期望一致平衡点未知, 此类智能体在群内的信息交互中以 x_i 进行, 在群间的信息交互中以 \hat{x}_i 的方式进行传输, 其中: $\hat{x}_i = x_i - x_i^*$, $x_i^* = \tilde{x}_k^*$, $i \in \mathcal{I}_k, k = 1, 2, \dots, p$.

基于规则③–④, 提出如下一致性协议:

$$\tilde{u}_{i,\sigma(t)}^c = \sum_{j \in \mathcal{N}_{k,i,\sigma(t)}} \tilde{\alpha}_{i,j,\sigma(t)} (x_j - x_i) + \sum_{l \neq k} \sum_{j \in \mathcal{N}_{l,i,\sigma(t)}} \tilde{\beta}_{i,j,\sigma(t)} (\hat{x}_j - \hat{x}_i), \quad (14)$$

$\forall i \in \mathcal{I}_k, k = 1, 2, \dots, p$, 其中: $\tilde{u}_{i,\sigma(t)}^c$ 的第1项为群内信息交互, $\tilde{\alpha}_{i,j,\sigma(t)} \in \mathbb{R}$ 表示群内传输信道的权重. $\tilde{u}_{i,\sigma(t)}^c$ 的第2项为群间信息交互, $\tilde{\beta}_{i,j,\sigma(t)} \in \mathbb{R}$ 表示群间传输信道的权重. 需要特别指出的是, 一致性协议(14)中的信道权重和邻集是随着拓扑图 $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ 的切换而变化的. 为使各个子系统分别收敛于各自的一致平衡点, 给出如下牵制控制量:

$$\tilde{u}_{i,\sigma(t)}^d = -\tilde{d}_{i,\sigma(t)} (x_i - \tilde{x}_k^*), \quad (15)$$

$\forall i \in \mathcal{I}_k, k = 1, 2, \dots, p$. 本文的目标是通过对一小部分的智能体进行牵制控制, 使得两组智能体在 $u_{i,\sigma(t)} = \tilde{u}_{i,\sigma(t)}^c + \tilde{u}_{i,\sigma(t)}^d$ 的作用下, 分别渐近收敛到子系统各自的期望一致平衡点.

定理3 多智能体系统(3)在协议(14)和牵制控制器(15)联合作用下(即 $u_{i,\sigma(t)} = \tilde{u}_{i,\sigma(t)}^c + \tilde{u}_{i,\sigma(t)}^d$)渐近实现预期的群一致, 当且仅当

$$\max\{\text{Re}(\lambda(\tilde{\Xi}_{\sigma(t)} - \tilde{D}_{\sigma(t)}))\} < 0, \quad (16)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi} &= \tilde{A}_{\sigma(t)} - \tilde{L}_{\alpha,\sigma(t)} + \tilde{B}_{\sigma(t)} - \tilde{L}_{\beta,\sigma(t)}, \\ \tilde{D}_{\sigma(t)} &= \text{diag}\{\tilde{d}_{1,\sigma(t)}, \dots, \tilde{d}_{r,\sigma(t)}\}, \\ \tilde{A}_{\sigma(t)} &= \text{diag}\{\tilde{A}_{1,\sigma(t)}, \dots, \tilde{A}_{p,\sigma(t)}\}, \\ \tilde{A}_{k,\sigma(t)} &= [\tilde{A}_{k,\sigma(t)}(i, j)], k = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{k,\sigma(t)}(i,j) &= \begin{cases} \tilde{\alpha}_{i,j,\sigma(t)}, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases} \quad i, j \in \mathcal{I}_k, \\ \tilde{B}_{\sigma(t)} &= [\tilde{B}_{\sigma(t)}(i,j)], \\ \tilde{B}_{\sigma(t)}(i,j) &= \begin{cases} \tilde{\beta}_{i,j,\sigma(t)}, & l \neq k, \\ 0, & l = k, \end{cases} \quad i \in \mathcal{I}_k, j \in \mathcal{I}_l, \\ \tilde{L}_{\alpha,\sigma(t)} &= \\ \text{diag}\{ & \sum_{j \in \mathcal{N}_{1,1,\sigma(t)}} \tilde{\alpha}_{1,j,\sigma(t)}, \dots, \sum_{j \in \mathcal{N}_{1,q_1,\sigma(t)}} \tilde{\alpha}_{q_1,j,\sigma(t)}, \dots, \\ & \sum_{j \in \mathcal{N}_{p,r+1-q_p,\sigma(t)}} \tilde{\alpha}_{r+1-q_p,j,\sigma(t)}, \dots, \sum_{j \in \mathcal{N}_{p,r,\sigma(t)}} \tilde{\alpha}_{r,j,\sigma(t)}\}, \\ \tilde{L}_{\beta,\sigma(t)} &= \text{diag}\{ \sum_{l \neq 1} \sum_{j \in \mathcal{N}_{l,1,\sigma(t)}} \tilde{\beta}_{1,j,\sigma(t)}, \dots, \\ & \sum_{l \neq 1} \sum_{j \in \mathcal{N}_{l,q_1,\sigma(t)}} \tilde{\beta}_{q_1,j,\sigma(t)}, \dots, \\ & \sum_{l \neq p} \sum_{j \in \mathcal{N}_{l,r+1-q_p,\sigma(t)}} \tilde{\beta}_{r+1-q_p,j,\sigma(t)}, \\ & \dots, \sum_{l \neq p} \sum_{j \in \mathcal{N}_{l,r,\sigma(t)}} \tilde{\beta}_{r,j,\sigma(t)}\}, \end{aligned}$$

$r = \sum_{i=1}^p q_i$, 特别地, 当所有的拓扑结构 $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ 中均含有一生成树时, 系统可实现预期的群一致当且仅当 $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ 中有一处于根节点位置的智能体受到牵制控制.

证 证明过程类似于定理1和定理2.

定理3给出了切换拓扑中利用牵制控制实现预期群一致的充要条件, 当拓扑结构中始终含有生成树时, 分析了被施加牵制控制的智能体的位置. 需要指出的是, 定理1, 2和3均适用于有向图和无向图, 但是在传输信息时考虑的都是理想传输, 即传输和接收到的信息都是真实值. 但是在实际中, 由于噪声、外界干扰因素的存在, 通信信道往往处于非理想状态. 为此, 考虑传输信道受非线性函数影响的情况. 设在子系统内部, 通信信道的影响函数为 $f_k(\cdot)$, 子系统之间的影响函数为 $g_{l,k}(\cdot)$, $k \neq l, k, l = 1, 2, \dots, p$. 假设 $f_k(\cdot)$ 和 $g_{l,k}(\cdot)$ 满足如下 Lipschitz 条件:

$$|f_k(s)| \leq K_{f_k}|s|, |g_{l,k}(s)| \leq K_{g_{l,k}}|s|, \quad (17)$$

其中 K_{f_k} 和 $K_{g_{l,k}}$ 为大于0的 Lipschitz 常数. 此时协议(14)变为

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i,\sigma(t)}^c &= \sum_{j \in \mathcal{N}_{k,i,\sigma(t)}} \tilde{\alpha}_{i,j,\sigma(t)} f_k(x_j - x_i) + \\ & \sum_{l \neq k} \sum_{j \in \mathcal{N}_{l,i,\sigma(t)}} \tilde{\beta}_{i,j,\sigma(t)} g_{l,k}(\hat{x}_j - \hat{x}_i), \end{aligned} \quad (18)$$

$\forall i \in \mathcal{I}_k, k = 1, 2, \dots, p$.

下面给出该情形下实现多群组一致性的一个充分条件.

定理 4 如果有如下条件成立:

$$\hat{\Xi}_{\sigma(t)} - \tilde{D}_{\sigma(t)} < 0, \quad (19)$$

则多智能体系统(3)在协议(18)和牵制控制器(15)联合作用下(即 $u_i = \hat{u}_i^c + \tilde{u}_i^d$)能渐近实现预期的群一致. 其中:

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_{\sigma(t)} &= \hat{A}_{\sigma(t)} + \hat{L}_{\alpha,\sigma(t)} + \hat{B}_{\sigma(t)} + \hat{L}_{\beta,\sigma(t)}, \\ \hat{A}_{\sigma(t)} &= \text{diag}\{\hat{A}_{1,\sigma(t)}, \dots, \hat{A}_{p,\sigma(t)}\}, \\ \hat{A}_{k,\sigma(t)} &= [\hat{A}_{k,\sigma(t)}(i,j)], \quad k = 1, \dots, p, \\ \hat{A}_{k,\sigma(t)}(i,j) &= \begin{cases} K_{f_k} |\tilde{\alpha}_{i,j,\sigma(t)}|, & i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases} \quad i, j \in \mathcal{I}_k, \\ \hat{B}_{\sigma(t)} &= [\hat{B}_{\sigma(t)}(i,j)], \\ \hat{B}_{\sigma(t)}(i,j) &= \begin{cases} K_{g_{l,k}} |\tilde{\beta}_{i,j,\sigma(t)}|, & l \neq k, \\ 0, & l = k, \end{cases} \quad i \in \mathcal{I}_k, j \in \mathcal{I}_l, \\ \hat{L}_{\alpha,\sigma(t)} &= \text{diag}\{ \sum_{j \in \mathcal{N}_{1,1,\sigma(t)}} \hat{A}_{1,\sigma(t)}(1,j), \dots, \\ & \sum_{j \in \mathcal{N}_{p,r,\sigma(t)}} \hat{A}_{p,\sigma(t)}(r,j) \}, \\ \hat{L}_{\beta,\sigma(t)} &= \text{diag}\{ \sum_{l \neq 1} K_{g_{l,1}} \sum_{s \in \mathcal{N}_{l,1,\sigma(t)}} |\tilde{\beta}_{1,s,\sigma(t)}|, \dots, \\ & \sum_{l \neq p} K_{g_{l,p}} \sum_{s \in \mathcal{N}_{l,r,\sigma(t)}} |\tilde{\beta}_{r,s,\sigma(t)}| \}, \end{aligned}$$

$$r = \sum_{i=1}^p q_i.$$

证 定义误差向量 $e_i = x_i - x_k^*$, 其中 $i \in \mathcal{I}_k, k = 1, 2, \dots, p$, 则可得

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \sum_{j \in \mathcal{N}_{k,i,\sigma(t)}} \tilde{\alpha}_{i,j,\sigma(t)} f_k(e_j - e_i) + \\ & \sum_{l \neq k} \sum_{j \in \mathcal{N}_{l,i,\sigma(t)}} \tilde{\beta}_{i,j,\sigma(t)} g_{l,k}(e_j - e_i) - \\ & \tilde{d}_{i,\sigma(t)} e_i. \end{aligned} \quad (20)$$

此时, 定义2中的群一致等价于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i\| = 0, \forall i \in \mathcal{I}$.

定义李雅普诺夫函数 $V = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i^T e_i$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i^T \dot{e}_i = \\ & \sum_{k=1}^p \sum_{i \in \mathcal{I}_k} e_i^T [\sum_{j \in \mathcal{N}_{k,i,\sigma(t)}} \tilde{\alpha}_{i,j,\sigma(t)} f_k(e_j - e_i) + \\ & \sum_{l \neq k} \sum_{j \in \mathcal{N}_{l,i,\sigma(t)}} \tilde{\beta}_{i,j,\sigma(t)} g_{l,k}(e_j - e_i) - \tilde{d}_{i,\sigma(t)} e_i] = \\ & \sum_{k=1}^p \sum_{i \in \mathcal{I}_k} e_i^T \sum_{j \in \mathcal{N}_{k,i,\sigma(t)}} \tilde{\alpha}_{i,j,\sigma(t)} f_k(e_j - e_i) + \\ & \sum_{k=1}^p \sum_{i \in \mathcal{I}_k} e_i^T \sum_{l \neq k} \sum_{j \in \mathcal{N}_{l,i,\sigma(t)}} \tilde{\beta}_{i,j,\sigma(t)} g_{l,k}(e_j - e_i) - \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}} \tilde{d}_{i,\sigma(t)} \|e_i\|^2, \end{aligned}$$

结合式(17), 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ & \sum_{k=1}^p \sum_{i \in \mathcal{I}_k} |e_i^T| \sum_{j \in \mathcal{N}_{k,i,\sigma(t)}} |\tilde{\alpha}_{i,j,\sigma(t)}| K_{f_k} (|e_j| + |e_i|) + \\ & \sum_{k=1}^p \sum_{i \in \mathcal{I}_k} [|e_i^T| \times \end{aligned}$$

$$\sum_{l \neq k} \sum_{j \in \mathcal{N}_{l,i,\sigma(t)}} |\tilde{\beta}_{i,j,\sigma(t)}| K_{g_{l,k}} (|e_j| + |e_i|) - \sum_{i \in \mathcal{I}} \tilde{d}_{i,\sigma(t)} \|e_i\|^2 = |e^T| (\hat{\Xi}_{\sigma(t)} - \tilde{D}_{\sigma(t)}) |e|,$$

其中: $|e| = (|e_1|, \dots, |e_r|)^T, r = \sum_{i=1}^p q_i$. 由条件(19)可知 $\dot{V} < 0$. 所以多智能体系统(3)可在 $u_i = \hat{u}_i^c + \tilde{u}_i^d$ 作用下渐近实现群一致. 证毕.

针对智能体之间的传输信道受非线性函数影响这一情况, 定理4给出了可实现多群组一致性的一个充分条件. 需要指出的是, 从条件(19)可知 $\hat{\Xi} = \hat{\Xi}^T$, 进而有 $\hat{A}_{\sigma(t)} = \hat{A}_{\sigma(t)}^T, \hat{B}_{\sigma(t)} = \hat{B}_{\sigma(t)}^T$, 故该结论只适用于具有对称拓扑结构的多智能体系统.

4 仿真算例(Illustrative examples)

例 1 考虑具有如图1所示拓扑结构的二群组智能体系统, 设前20个智能体的期望一致平衡点为 $x_1^* = 4$, 其他28个智能体的期望一致平衡点为 $x_2^* = 8$. 智能体之间以规则①, ②进行交互, 传输信道权重取 $\alpha_{i,j} = 1, \beta_{i,j} = 1, \forall j \in \mathcal{N}_i$. 给定初值 $x(0) = (0.5, 1, 1.5, \dots, 24)^T$, 利用一致性协议(7), 当不施加牵制控制时, 可得到如图2所示的智能体状态轨迹. 由图2可以发现, 当不施加牵制控制时, 虽然智能体系统可实现群一致, 但是并未能收敛于期望的一致平衡点.

另一方面, 从图1可看出该智能体系统的拓扑图中可找到一生成树, 故由定理2, 只需对其中任一处于根节点位置的智能体施加牵制控制. 特别地, 在该拓扑图中每个节点都可以作为一生成树的根节点, 因此可以把牵制控制器施加于其中任意一个智能体上. 选取 $d_3 = 1, d_i = 0, i = 1, 2, 4, \dots, 48$, 智能体状态轨迹如图3所示. 不难发现, 通过对智能体 v_3 进行牵制控制, 所有的智能体均渐近收敛到所在子系统的期望一致平衡点.

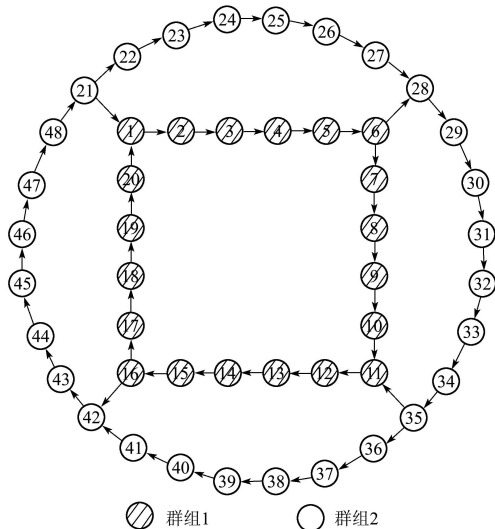


图1 由两个子系统构成的多智能体系统拓扑结构(固定拓扑)

Fig. 1 The topology graph of the multi-agent system with two subsystems (fixed topology)

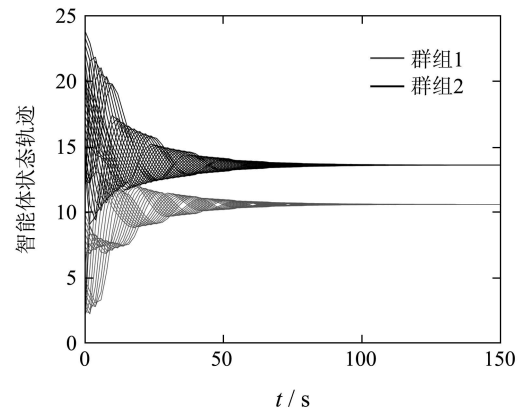


图2 智能体状态轨迹(未加牵制控制)

Fig. 2 The state trajectory of the agents (with no pinning control)

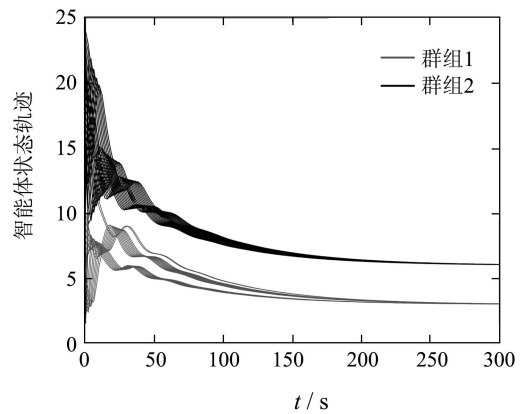


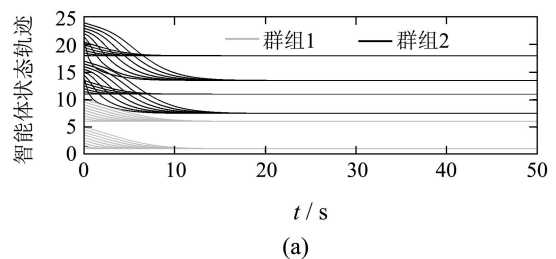
图3 智能体状态轨迹(施加牵制控制)

Fig. 3 The state trajectory of the agents (with pinning control)

为验证定理1中的结论在一般拓扑结构中的有效性, 考虑图1中移除节点 $v_1, v_{11}, v_{21}, v_{35}$ 及其对应有向边后的拓扑结构. 在新的拓扑结构中不能找到一生成树连接所有智能体, 不进行牵制控制时对应的智能体轨迹如图4(a)所示, 可以看到系统无法实现群一致. 由定理1, 选取

$$d_2 = d_{12} = d_{22} = d_{36} = 1,$$

则可得如图4(b)所示的状态轨迹. 仿真结果显示, 当智能体 $v_2, v_{12}, v_{22}, v_{36}$ 受到牵制控制时, 所有的智能体均可渐近收敛于所处子系统的期望一致平衡点.



(a)

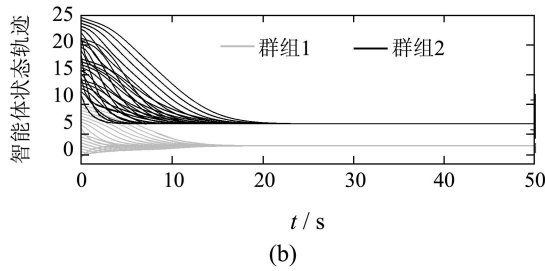


图 4 智能体状态轨迹

Fig. 4 The state trajectory of the agents

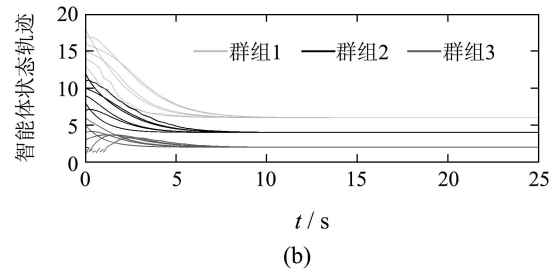


图 6 智能体状态轨迹

Fig. 6 The state trajectory of the agents

例 2 考虑具有如图5所示拓扑结构的3群组智能体系统, 其中虚线箭头表示该通信链以0.5的概率随机断开或闭合, 实线箭头为恒定信道. 设3个子系统的期望一致平衡点分别为 $x_1^* = 2$, $x_2^* = 4$ 和 $x_3^* = 6$. 智能体之间以规则③, ④进行交互, 并通过协议(14)进行更新, 传输信道权重取 $\tilde{\alpha}_{i,j} = 1$, $\tilde{\beta}_{i,j} = 1$, $\forall j \in \mathcal{N}_i$.

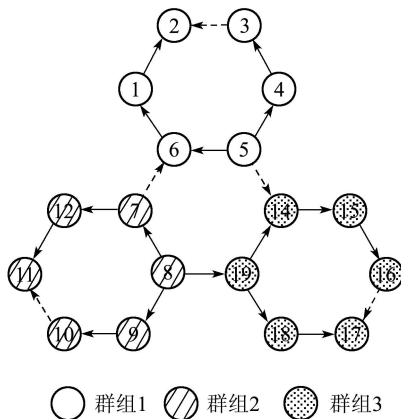
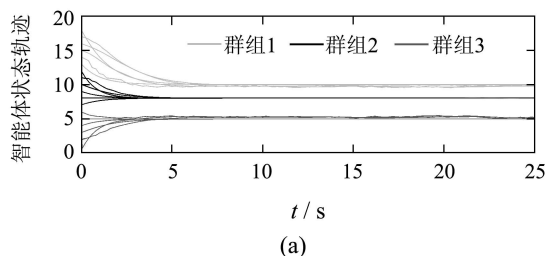


图 5 由3个子系统构成的多智能体系统拓扑结构 (切换拓扑)

Fig. 5 The topology graph of the multi-agent system with three subsystems (switching topologies)

选取初值 $x(0) = (1, 2, \dots, 18)^T$, 智能体的状态轨迹如图6(a)所示, 3个子系统均未能收敛到各自的期望一致平衡点. 为此, 根据定理3, 选取智能体 v_5 , v_8 进行牵制控制. 施加牵制控制后的智能体状态轨迹如图6(b)所示, 显然所有的智能体均收敛到了各自的期望一致平衡点.



5 结论(Conclusion)

本文研究了一类多智能体系统在牵制控制下的群一致性问题. 对固定拓扑下的二群组智能体系统和切换拓扑下的多群组智能体系统, 分别给出了特定的交互规则, 并提出了融合群内信息交互、群间信息交互和牵制控制器的一致性协议. 对在固定拓扑和切换拓扑中进行线性交互的智能体系统, 给出了基于任意拓扑结构的充要条件. 当拓扑结构中含有一生成树时, 分析了被施加牵制控制的智能体在拓扑图中的具体位置. 对切换拓扑中通信信道受非线性函数影响的多群组智能体系统, 利用Lyapunov函数方法推导出一充分条件, 使得只需对一部分智能体进行牵制控制, 即可实现整个系统预期的群一致.

参考文献(References):

- [1] EGERSTEDT M, HU Xiaoming. Formation constrained multi-agent control [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2001, 17(6): 947 – 951.
- [2] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Graph rigidity and distributed formation stabilization of multi-vehicle systems [C] // *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, Nevada: IEEE, 2002, 12: 2965 – 2971.
- [3] LIN J, MORSE A S, ANDERSON B D O. The multi-agent rendezvous problem [C] // *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, Hawaii: IEEE, 2003, 12: 1508 – 1513.
- [4] LIU Yang, PASSINO K M, POLYCARPOU M. Stability analysis of one-dimensional asynchronous swarms [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(10): 1848 – 1854.
- [5] OLFATI-SABER R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 401 – 420.
- [6] DEGROOT M H. Reaching a consensus [J]. *Journal of American Statistical Association*, 1974, 69(345): 118 – 121.
- [7] VICSEK T, CZIROOK A, BEN-JACOB E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-derived particles [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226 – 1229.
- [8] JADBABAIE A, LIN J, MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988 – 1001.
- [9] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.
- [10] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus protocols for networks of dynamic agents [C] // *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Denver, Colorado: IEEE, 2003, 6: 951 – 956.

- [11] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [12] YU Junyan, WANG Long. Group consensus of multi-agent systems with undirected communication graphs [C] // *Proceedings of the 7th Asian Control Conference*. Hong Kong, China: IEEE, 2009, 8: 105 – 110.
- [13] WANG Xiaofan, CHEN Guanrong. Pinning control of scale-free dynamical networks [J]. *Physica A*, 2002, 310(3/4): 521 – 531.
- [14] LI Xiang, WANG Xiaofan, CHEN Guanrong. Pinning a complex dynamical network to its equilibrium [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2004, 51(10): 2074 – 2087.
- [15] CHEN Tianping, LIU Xiwei, LU Wenlian. Pinning complex networks by a single controller [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2007, 54(6): 1317 – 1326.
- [16] CHEN Fei, CHEN Zengqiang, XIANG Linying, et al. Reaching a consensus via pinning control [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1215 – 1220.
- [17] 杨洪勇, 张振兴, 张顺. 采用干扰 - 观测器控制的移动智能体系统之一致性 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(12): 1787 – 1792. (YANG Hongyong, ZHANG Zhenxing, ZHANG Shun. Consensus of mobile multiple agent systems with disturbance-observer-based control [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(12): 1787 – 1792.)
- [18] MOORE K L, LUCARELLI D. Forced and constrained consensus among cooperating agents [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Networking, Sensing and Control*. Tucson, Arizona, USA: IEEE, 2005, 3: 449 – 454.

作者简介:

宋海裕 (1986–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为分布式估计、多智能体系统, E-mail: haiyusong@gmail.com;

俞立 (1961–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为网络控制系统、鲁棒控制、时滞系统等, E-mail: lyu@zjut.edu.cn;

胡鸿翔 (1983–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为多智能体系统、非线性系统等, E-mail: kukunan_911@163.com.