

## 中心差分卡尔曼平滑器

王小旭, 潘泉, 程咏梅, 赵春晖, 杨峰

(西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072)

**摘要:** 针对一类非线性离散系统的状态平滑问题, 本文设计了一种中心差分卡尔曼平滑器(CDKS). 文中基于最小方差估计准则, 详细推导了非线性系统的状态最优平滑递推公式, 并采用中心差分变换来近似计算状态的后验均值和协方差. 相比于传统中心差分卡尔曼滤波器(CDKF), 所设计的CDKS算法有效提高了非线性状态的估计精度, 拓展了中心差分变换的应用范围. 仿真实例验证了所提出平滑器的可行性和有效性.

**关键词:** 非线性离散系统; 中心差分卡尔曼平滑器; 最小方差估计; 中心差分变换  
**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Central difference Kalman smoother

WANG Xiao-xu, PAN Quan, CHENG Yong-mei, ZHAO Chun-hui, YANG Feng

(College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China)

**Abstract:** A central difference Kalman smoother (CDKS) is designed to solve the nonlinear state-smoothing problem for a class of nonlinear discrete-time systems. Optimal smoothing recursive formulas for estimating nonlinear system states are derived on the basis of minimum mean-square-error estimation; and the central difference transformation is used to calculate the posterior mean and covariance of nonlinear states. Compared with the standard central difference Kalman filter (CDKF), the proposed CDKS effectively improves the estimation precision of the nonlinear system states, and extends the applications of the central difference transformation. Simulations example shows the feasibility and effectiveness of the proposed smoother.

**Key words:** nonlinear discrete-time systems; central difference Kalman smoother; minimum mean square error estimation; central difference transformation

### 1 引言(Introduction)

中心差分卡尔曼滤波器(central difference Kalman filter, CDKF)是一种新兴的非线性滤波算法<sup>[1-2]</sup>, 其核心思想是采用中心差分变换对非线性状态的后验分布(均值和协方差)进行近似. 与扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF)相比, CDKF在滤波过程中无需计算非线性状态函数和量测函数的雅可比矩阵, 比EKF实现更加简单, 且不管系统模型非线性程度如何, 中心差分变换理论上至少能以二阶泰勒精度逼近任何非线性状态的后验均值和协方差, 而EKF只能达到泰勒一阶, 因此CDKF的滤波精度高于EKF. 鉴于上述优点, CDKF已得到了国内外学者的广泛关注<sup>[3-5]</sup>.

Nørgaard<sup>[1]</sup>和Ito<sup>[6]</sup>几乎同时提出了中心差分卡尔曼滤波的思想, 且Nørgaard<sup>[2]</sup>进一步对中心差分变换的精度给出了详细证明; Merwe<sup>[7]</sup>将平方根滤波的思想引入到CDKF中, 提出了一种平方根CDKF算法, 实验结果表明该算法能有效克服因协方差失去正定而引起的滤波计算发散, 提高了CDKF的

数值稳定性和计算效率; Subrahmanya<sup>[8]</sup>推导了在系统存在模型误差时CDKF协方差的上界, 进而提出一种自适应CDKF算法, 以此来解决CDKF在系统模型不确定时鲁棒性差的问题; 文献[9]将迭代滤波理论与CDKF相结合, 设计了一种迭代CDKF算法, 并将其用于说话人跟踪系统, 减小了系统线性化误差, 提高了说话人的跟踪精度; 文献[10]提出了一种强跟踪CDKF算法, 有效解决了EKF在全球定位系统(global positioning system, GPS)/惯性导航系统(inertial navigation system, INS)组合导航系统模型不确定时滤波精度下降甚至发散的问题. 需要特别强调的是, 以上文献仅仅将中心差分变换用来设计非线性系统的状态滤波器(CDKF), 都没有考虑采用中心差分变换来解决非线性系统的状态平滑问题, 且到目前为止针对此方面问题的解决方案, 国内外相关文献报道甚少; 而众所周知, 平滑因可以使用更多的量测信息而能够获得比滤波更精确的状态估计, 因此平滑估计可以作为一种高精度的数据处理算法来对量测数据进行精确的事后分析, 并可以被

广泛应用于雷达目标跟踪、卫星轨道重构和入轨初速度估计、惯性导航等非线性随机系统中<sup>[11]</sup>, 因此研究非线性系统状态平滑器的设计问题极具理论价值和现实意义。

为解决非线性状态平滑问题和拓展中心差分变换的应用范围, 本文设计了一种基于中心差分变换的非线性状态平滑器, 称之为中心差分卡尔曼平滑器(central difference Kalman smoother, CDKS). 首先基于最小方差估计准则, 详细推导了非线性状态最优平滑器的递推公式; 接着应用中心差分变换来近似计算非线性系统状态的后验均值和协方差, 分别给出了固定区间、固定点、固定滞后中心差分平滑器. 仿真实例证明了所设计平滑器的正确性和有效性.

## 2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下所示的非线性离散随机系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) + w_k, \\ z_k = h_k(x_k) + v_k, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_k \in \mathbb{R}^n$  与  $z_k \in \mathbb{R}^m$  分别为状态向量和量测向量;  $u_k \in \mathbb{R}^l$  为控制输入向量;  $f_k(\cdot)$  和  $h_k(\cdot)$  分别为系统非线性状态函数和量测函数;  $w_k \in \mathbb{R}^n$  和  $v_k \in \mathbb{R}^m$  为系统噪声和量测噪声, 它们是相互独立的高斯白噪声, 即  $w_k \sim N(q_k, Q_k)$  和  $v_k \sim N(r_k, R_k)$ ; 初始状态  $x_0$  与  $w_k, v_k$  互不相关, 且  $x_0 \sim N(\hat{x}_0, P_0)$ .

问题是基于最小方差估计准则和中心差分变换, 利用量测值  $Z^j = \{z_1, z_2, \dots, z_j\}$ , 求非线性系统的状态平滑器  $\hat{x}_{k|j}$ , 其中  $k \in \{0, 1, 2, \dots, j\}$ .

## 3 非线性状态最优平滑器(Nonlinear state optimal smoother)

### 3.1 最小方差估计和线性最小方差估计 (Minimum mean squared error and linear minimum mean squared error)

从最小方差(minimum mean squared error, MMSE)估计理论可知: 基于观测量  $z$  的  $x$  最小方差估计  $\hat{x}^{\text{MMSE}}$  唯一等于在已知量测值  $z$  条件下状态  $x$  的条件均值, 即<sup>[12]</sup>

$$\hat{x}^{\text{MMSE}} = \mathbb{E}(x|z) = \int xp(x|z)dx. \quad (2)$$

从线性最小方差(linear minimum mean squared error, LMMSE)估计理论可知: 基于观测量  $z$  的  $x$  线性最小方差估计  $\hat{x}^{\text{LMMSE}}$  唯一等于  $x$  在  $z$  上的正交投影, 记为  $\hat{x}^{\text{LMMSE}} = \hat{E}(x|z)$ . 下面不加证明地给出关于正交投影的结论<sup>[13]</sup>.

**引理 1** 设  $x$  和  $z$  为具有二阶矩的随机向量, 则  $x$  在  $z$  上的正交投影  $\hat{E}(x|z)$  唯一地等于基于  $z$  的线性最小方差估计, 即

$$\hat{E}(x|z) = \mathbb{E}(x) + \text{Cov}(x, z)[\text{Var}(z)]^{-1}[z - \mathbb{E}(z)]. \quad (3)$$

**引理 2** 设  $x, y$  和  $z$  为具有二阶矩的随机向量,  $A$  和  $B$  为具有相应维数的非随机矩阵, 则有

$$\hat{E}[(Ax + By)|z] = A\hat{E}(x|z) + B\hat{E}(y|z). \quad (4)$$

**引理 3** 设  $x, z_a$  和  $z_b$  为具有二阶矩的随机向量, 且  $z = [z_a \ z_b]$ , 则有

$$\begin{aligned} \hat{E}(x|z) &= \hat{E}(x|z_a) + \hat{E}(\tilde{x}|\tilde{z}_b) = \\ &= \hat{E}(x|z_a) + \mathbb{E}(\tilde{x}\tilde{z}_b^T)[\mathbb{E}(\tilde{z}_b\tilde{z}_b^T)]^{-1}\tilde{z}_b, \end{aligned} \quad (5)$$

上式中:

$$\tilde{x} = x - \hat{E}(x|z_a), \quad \tilde{z}_b = z_b - \hat{E}(z_b|z). \quad (6)$$

早已证明: 在随机向量  $x$  和  $z$  都服从高斯分布的情况下, 最小方差估计和线性最小方差估计是等价的<sup>[12]</sup>, 即

$$\begin{aligned} \hat{x}^{\text{LMMSE}} = \hat{E}(x|z) = \mathbb{E}(x|z) = \\ \int xp(x|z)dx = \hat{x}^{\text{MMSE}}. \end{aligned} \quad (7)$$

### 3.2 非线性状态固定区间、固定点、固定滞后最优平滑器(Nonlinear state fixed-interval, fixed-point and fixed-lag optimal smoother)

**假设 1** 状态预测及滤波的概率密度函数服从高斯分布, 即

$$p(x_k|Z^k) \approx N(\hat{x}_k, P_k), \quad (8)$$

$$p(x_{k+1}|Z^k) \approx N(\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}). \quad (9)$$

相应地, 它们的联合概率密度函数可以写成

$$\begin{aligned} p\left(\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} | Z^k\right) \approx \\ N\left(\begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1|k} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_k & C_{k+1} \\ C_{k+1}^T & P_{k+1|k} \end{pmatrix}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$\begin{cases} \hat{x}_k = \mathbb{E}(x_k|Z^k) = \hat{E}(x_k|Z^k), \\ P_k = \mathbb{E}[\tilde{x}_k\tilde{x}_k^T] = \\ \int (x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T p(x_k|Z^k)dx_k, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k} = \mathbb{E}(x_{k+1}|Z^k) = \hat{E}(x_{k+1}|Z^k), \\ P_{k+1|k} = \mathbb{E}[\tilde{x}_{k+1|k}\tilde{x}_{k+1|k}^T] = \\ \int (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})^T \cdot \\ p(x_{k+1}|Z^k)dx_{k+1}, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} C_{k+1} = \mathbb{E}(\tilde{x}_k\tilde{x}_{k+1|k}^T) = \iint (x_k - \hat{x}_k)(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})^T \cdot \\ p(x_k, x_{k+1}|Z^k)dx_k dx_{k+1}, \end{aligned} \quad (13)$$

式中:  $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k, \tilde{x}_{k+1|k} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}$ .

**假设 2** 状态平滑的概率密度函数也服从高斯分布, 即

$$p(x_k|Z^j) \approx N(\hat{x}_{k|j}, P_{k|j}), \quad (14)$$

$$p(x_{k+1}|Z^j) \approx N(\hat{x}_{k+1|j}, P_{k+1|j}), \quad (15)$$

其中:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|j} = E(x_k|Z^j) = \hat{E}(x_k|Z^j), \\ P_{k|j} = E[x_{k|j}\tilde{x}_{k|j}^T] = \\ \int (x_k - \hat{x}_{k|j})(x_k - \hat{x}_{k|j})^T p(x_k|Z^j) dx_k, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|j} = E(x_{k+1}|Z^j) = \hat{E}(x_{k+1}|Z^j), \\ P_{k+1|j} = E[\tilde{x}_{k+1|j}\tilde{x}_{k+1|j}^T] = \\ \int (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|j})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|j})^T \cdot \\ p(x_{k+1}|Z^j) dx_{k+1}, \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $\tilde{x}_{k|j} = x_k - \hat{x}_{k|j}$ ,  $\tilde{x}_{k+1|j} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|j}$ .

**定理 1** 基于最小方差估计准则和量测值  $Z^j = \{z_1, z_2, \dots, z_j\}$ , 在假设1, 2下, 非线性离散系统(1)的固定区间状态最优平滑递推公式为

$$\hat{x}_{k|j} = \hat{x}_k + A_k[\hat{x}_{k+1|j} - \hat{x}_{k+1|k}], \quad (18)$$

$$P_{k|j} = P_k + A_k[P_{k+1|j} - P_{k+1|k}]A_k^T, \quad (19)$$

其中

$$A_k = C_{k+1}P_{k+1|k}^{-1}. \quad (20)$$

**证** 考虑到式(8)和式(9)的高斯分布特性, 根据引理3和式(7)可得

$$\begin{aligned} E(x_k|x_{k+1}, Z^k) &= \\ \int x_k p(x_k|x_{k+1}, Z^k) dx_k &= \\ \hat{E}(x_k|x_{k+1}, Z^k) &= \hat{E}(x_k|Z^k) + \hat{E}(\tilde{x}_k|\tilde{x}_{k+1|k}) = \\ \hat{x}_k + E[\tilde{x}_k\tilde{x}_{k+1|k}^T] \{E[\tilde{x}_{k+1|k}\tilde{x}_{k+1|k}^T]\}^{-1} \tilde{x}_{k+1|k} &= \\ \hat{x}_k + C_{k+1}P_{k+1|k}^{-1}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}). \end{aligned} \quad (21)$$

定义

$$A_k = C_{k+1}P_{k+1|k}^{-1} \quad (22)$$

表示平滑增益矩阵. 于是, 式(21)变成

$$E(x_k|x_{k+1}, Z^k) = \hat{x}_k + A_k(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}). \quad (23)$$

同理, 根据式(14)和式(15)所示的高斯分布特性, 由引理3和式(7)可知

$$\begin{aligned} E(x_k|x_{k+1}, Z^j) &= \\ \int x_k p(x_k|x_{k+1}, Z^j) dx_k &= \hat{E}(x_k|x_{k+1}, Z^j) = \\ \hat{E}(x_k|Z^j) + \hat{E}(\tilde{x}_{k|j}|\tilde{x}_{k+1|j}) &= \\ \hat{x}_{k|j} + E[\tilde{x}_{k|j}\tilde{x}_{k+1|j}^T] \{E[\tilde{x}_{k+1|j}\tilde{x}_{k+1|j}^T]\}^{-1} \tilde{x}_{k+1|j} &= \\ \hat{x}_{k|j} + E[\tilde{x}_{k|j}\tilde{x}_{k+1|j}^T] P_{k+1|j}^{-1}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|j}). \end{aligned} \quad (24)$$

下面来计算式(24)中的  $E[\tilde{x}_{k|j}\tilde{x}_{k+1|j}^T]$  项. 显然, 式(1)所示的非线性状态模型具有马尔科夫特性<sup>[14]</sup>, 则有下式成立:

$$p(x_k|x_{k+1}, Z^k) = p(x_k|x_{k+1}, Z^j). \quad (25)$$

于是

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}_{k|j}\tilde{x}_{k+1|j}^T] &= \\ \int \int \tilde{x}_{k|j}\tilde{x}_{k+1|j}^T p(x_k, x_{k+1}|Z^j) dx_k dx_{k+1} &= \\ \int \int \tilde{x}_{k|j}\tilde{x}_{k+1|j}^T p(x_k|x_{k+1}, Z^j) \cdot \\ p(x_{k+1}|Z^j) dx_k dx_{k+1} &= \\ \int [\int \tilde{x}_{k|j} p(x_k|x_{k+1}, Z^j) dx_k] \cdot \\ \tilde{x}_{k+1|j}^T p(x_{k+1}|Z^j) dx_{k+1} &= \\ \int [\int (x_k - \hat{x}_{k|j}) p(x_k|x_{k+1}, Z^k) dx_k] \cdot \\ [x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|j}]^T p(x_{k+1}|Z^j) dx_{k+1} &= \\ \int [E(x_k|x_{k+1}, Z^k) - \hat{x}_{k|j}] \cdot \\ [x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|j}]^T p(x_{k+1}|Z^j) dx_{k+1}. \end{aligned} \quad (26)$$

将式(23)代入上式得

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}_{k|j}\tilde{x}_{k+1|j}^T] &= \\ \int [\hat{x}_k + A_k(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}) - \hat{x}_{k|j}] \cdot \\ [x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|j}]^T p(x_{k+1}|Z^j) dx_{k+1} &= \\ \int [\hat{x}_k - \hat{x}_{k|j} + A_k(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k}) + \hat{x}_{k+1|j} - \\ \hat{x}_{k+1|k}] [x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|j}]^T p(x_{k+1}|Z^j) dx_{k+1} &= \\ E[A_k(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})^T] &= \\ A_k P_{k+1|j}. \end{aligned} \quad (27)$$

将上式代入到式(24)中, 可知

$$\begin{aligned} E(x_k|x_{k+1}, Z^j) &= \\ \hat{x}_{k|j} + E[\tilde{x}_{k|j}\tilde{x}_{k+1|j}^T] P_{k+1|j}^{-1}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|j}) &= \\ \hat{x}_{k|j} + A_k(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|j}). \end{aligned} \quad (28)$$

注意到式(25)成立, 于是有

$$\begin{aligned} E(x_k|x_{k+1}, Z^k) &= \int x_k p(x_k|x_{k+1}, Z^k) dx_k = \\ \int x_k p(x_k|x_{k+1}, Z^j) dx_k &= E(x_k|x_{k+1}, Z^j). \end{aligned} \quad (29)$$

那么将式(23)与式(28)相减, 整理即可得非线性系统(1)状态固定区间最优平滑器为

$$\hat{x}_{k|j} = \hat{x}_k + A_k[\hat{x}_{k+1|j} - \hat{x}_{k+1|k}]. \quad (30)$$

下面来推导平滑协方差  $P_{k|j}$  的递推公式. 已知由式(30)可得

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k|j} &= x_k - \hat{x}_{k|j} = \\ x_k - \hat{x}_k - A_k[\hat{x}_{k+1|j} - \hat{x}_{k+1|k}] &= \\ \tilde{x}_k - A_k\tilde{x}_{k+1|k} + A_k\tilde{x}_{k+1|j}. \end{aligned} \quad (31)$$

于是

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}_{k|j}\tilde{x}_{k+1|j}^T] &= \\ E[(\tilde{x}_k - A_k\tilde{x}_{k+1|k} + A_k\tilde{x}_{k+1|j})\tilde{x}_{k+1|j}^T] &= \\ E[(\tilde{x}_k - A_k\tilde{x}_{k+1|k})\tilde{x}_{k+1|j}^T] + A_k P_{k+1|j}. \end{aligned} \quad (32)$$

比较式(27)和式(32), 显然可以得到

$$E[(\tilde{x}_k - A_k\tilde{x}_{k+1|k})\tilde{x}_{k+1|j}^T] = 0. \quad (33)$$

根据式(31)和式(33)可得

$$\begin{aligned} P_{k|j} &= E[\tilde{x}_{k|j}\tilde{x}_{k|j}^T] = \\ E[(\tilde{x}_k - A_k\tilde{x}_{k+1|k} + A_k\tilde{x}_{k+1|j})(\tilde{x}_k - \\ A_k\tilde{x}_{k+1|k} + A_k\tilde{x}_{k+1|j})^T] &= \\ E[(\tilde{x}_k - A_k\tilde{x}_{k+1|k})(\tilde{x}_k - A_k\tilde{x}_{k+1|k})^T] + \\ A_k P_{k+1|j} A_k^T &= \\ P_k - C_{k+1} A_k^T - A_k C_{k+1}^T + \\ A_k P_{k+1|k} A_k^T + A_k P_{k+1|j} A_k^T. \end{aligned} \quad (34)$$

注意到

$$A_k P_{k+1|k} A_k^T = C_{k+1} A_k^T = A_k C_{k+1}^T, \quad (35)$$

则式(34)变成

$$P_{k|j} = P_k + A_k [P_{k+1|j} - P_{k+1|k}] A_k^T. \quad (36)$$

证毕.

**定理2** 基于最小均方误差估计准则和量测值  $Z^j = \{z_1, z_2, \dots, z_j\}$ , 在假设1, 2下, 非线性离散系统(1)的固定点状态最优平滑递推公式为

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|j+1} = \hat{x}_{k|j} + B_{j+1}^k [\hat{x}_{j+1} - \hat{x}_{j+1|j}], \\ A_j = C_{j+1} P_{j+1|j}^{-1}, B_{j+1}^k = \prod_{i=k}^j A_i, \\ P_{k|j+1} = \\ P_{k|j} + B_{j+1}^k [P_{j+1} - P_{j+1|j}] [B_{j+1}^k]^T. \end{cases} \quad (37)$$

证 下面采用归纳法来证明式(37)的正确性.

- 1) 根据定理1可知, 当  $k = j$  时, 式(37)显然成立.
- 2) 假设对任意正整数  $k - 1 \leq j - 1$  时, 式(37)成立, 即

$$\begin{cases} \hat{x}_{k-1|j+1} = \hat{x}_{k-1|j} + B_{j+1}^{k-1} [\hat{x}_{j+1} - \hat{x}_{j+1|j}], \\ A_j = C_{j+1} P_{j+1|j}^{-1}, B_{j+1}^{k-1} = \prod_{i=k-1}^j A_i, \\ P_{k-1|j+1} = \\ P_{k-1|j} + B_{j+1}^{k-1} [P_{j+1} - P_{j+1|j}] [B_{j+1}^{k-1}]^T. \end{cases} \quad (38)$$

假设  $A_{k-1}$  的逆矩阵存在, 显然

$$B_{j+1}^k = A_{k-1}^{-1} B_{j+1}^{k-1}. \quad (39)$$

- 3) 下面来推导对任意正整数  $k \leq j$  时  $\hat{x}_{k|j+1}$  和  $P_{k|j+1}$  的表达式. 根据定理1, 以  $k - 1$  代替  $k$  可知

$$\begin{cases} \hat{x}_{k-1|j} = \hat{x}_{k-1} + A_{k-1} [\hat{x}_{k|j} - \hat{x}_{k|k-1}], \\ P_{k-1|j} = P_{k-1} + A_{k-1} [P_{k|j} - P_{k|k-1}] A_{k-1}^T. \end{cases} \quad (40)$$

同时在定理1中, 以  $k - 1$  代替  $k$ ,  $j + 1$  代替  $j$  可得

$$\begin{cases} \hat{x}_{k-1|j+1} = \hat{x}_{k-1} + A_{k-1} [\hat{x}_{k|j+1} - \hat{x}_{k|k-1}], \\ P_{k-1|j+1} = \\ P_{k-1} + A_{k-1} [P_{k|j+1} - P_{k|k-1}] A_{k-1}^T. \end{cases} \quad (41)$$

将式(41)减去式(40), 整理可得

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|j+1} = \hat{x}_{k|j} + A_{k-1}^{-1} [\hat{x}_{k-1|j+1} - \hat{x}_{k-1|j}], \\ P_{k|j+1} = \\ P_{k|j} + A_{k-1}^{-1} [P_{k-1|j+1} - P_{k-1|j}] (A_{k-1}^{-1})^T, \end{cases} \quad (42)$$

将式(38)代入到式(42), 并注意式(39), 整理后即可得式(37), 因此对任意正整数  $k \leq j$ , 式(37)依然成立. 证毕.

**定理3** 基于最小均方误差估计准则和量测值  $Z^j = \{z_1, z_2, \dots, z_j\}$ , 在假设1, 2下, 非线性离散系统(1)的固定滞后状态最优平滑递推公式为

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k+1+M} = \\ \hat{x}_{k+1|k} + A_k^{-1} (\hat{x}_{k|k+M} - \hat{x}_k) + \\ B_{k+1+M}^{k+1} [\hat{x}_{k+1+M} - \hat{x}_{k+1+M|k+M}], \\ P_{k+1|k+1+M} = \\ P_{k+1|k} + A_k^{-1} [P_{k|k+M} - P_k] [A_k^{-1}]^T + \\ B_{k+1+M}^{k+1} [P_{k+1+M} - P_{k+1+M|k+M}] [B_{k+1+M}^{k+1}]^T, \end{cases} \quad (43)$$

其中  $M$  在这里表示固定滞后区间.

证 根据定理1中, 以  $k + j$  代替  $j$  可知

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|k+j} = \hat{x}_k + A_k [\hat{x}_{k+1|k+j} - \hat{x}_{k+1|k}], \\ P_{k|k+j} = P_k + A_k [P_{k+1|k+j} - P_{k+1|k}] A_k^T. \end{cases} \quad (44)$$

假设  $A_k$  可逆, 于是上式可写成

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k+j} = \hat{x}_{k+1|k} + A_k^{-1} (\hat{x}_{k|k+j} - \hat{x}_k), \\ P_{k+1|k+j} = P_{k+1|k} + A_k^{-1} [P_{k|k+j} - P_k] [A_k^{-1}]^T. \end{cases} \quad (45)$$

从定理2中式(36)出发, 以  $k + 1$  代替  $k$ ,  $k + 1 + j$  代替  $j + 1$  可知

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k+1+j} = \\ \hat{x}_{k+1|k+j} + B_{k+1+j}^{k+1} [\hat{x}_{k+1+j} - \hat{x}_{k+1+j|k+j}], \\ P_{k+1|k+1+j} = \\ P_{k+1|k+j} + B_{k+1+j}^{k+1} [P_{k+1+j} - \\ P_{k+1+j|k+j}] [B_{k+1+j}^{k+1}]^T. \end{cases} \quad (46)$$

将式(44)带入到式(46), 同时将  $M$  代替  $j$  即可得到式(43). 证毕.

### 4 中心差分卡尔曼平滑器(Central difference Kalman smoother)

由定理1可知, 计算非线性状态固定区间平滑  $\hat{x}_{k|j}$  的关键是如何计算平滑增益  $A_k$ , 而计算  $A_k$  的关键是如何计算后验互协方差  $C_k$ . 对于线性系统来说,  $C_k$  可以通过线性状态函数的传递精确已知, 即如果

$$f_k(x_k, u_k) = \Phi_{k+1,k}x_k + \Psi_{k+1,k}u_k, \quad (47)$$

其中  $\Phi_{k+1,k}$  和  $\Psi_{k+1,k}$  分别表示状态和控制量的传递矩阵. 那么

$$C_{k+1} = E[\tilde{x}_k \tilde{x}_{k+1|k}^T] = E[\tilde{x}_k(\Phi_{k+1,k}\tilde{x}_k + w_k - q_k)^T] = P_k \Phi_{k+1,k}^T. \quad (48)$$

而对于如式(1)所示的非线性系统, 精确求解  $C_k$  是不可能的, 甚至是根本无法实现的, 为此可以采用中心差分变换或一阶线性化来实现.

中心差分变换是一种基于插值理论的非线性变换方法<sup>[1]</sup>, 用于解决随机变量经过非线性函数传递之后, 求解均值和方差等统计量的问题. 在本质上, 中心差分变换是通过一组加权采样点来逼近随机变量的分布函数, 并通过这组采样点的非线性变换, 捕获随机变量经非线性变换后的统计特性<sup>[5]</sup>.

具体采用中心差分变换来实现CDKS算法的步骤如下:

#### Step 1 Sigma点采样.

已知由CDKF滤波计算已经求得  $k$  时刻状态估计  $\hat{x}_k$  和协方差  $P_k$ . 按照下式所示的采样策略由  $\hat{x}_k$  和  $P_k$  来计算Sigma点  $\xi_{i,k}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n$ ), 即:

$$\begin{cases} \xi_{0,k} = \hat{x}_k, \\ \xi_{i,k} = \hat{x}_k + (h\sqrt{P_k})_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ \xi_{i+n,k} = \hat{x}_k - (h\sqrt{P_k})_i, \end{cases} \quad (49)$$

其中:  $h$  表示区间长度, 对于高斯系统来说,  $h$  的最佳取值为  $\sqrt{3}$ <sup>[2]</sup>;  $P_k = S_k S_k^T$  且  $(\sqrt{P_k})_i$  表示矩阵  $S_k$  的第  $i$  列. 设对应于采样点  $\xi_{i,k}$  的权值为

$$\begin{cases} W_0^m = \frac{h^2 - n}{h^2}, W_i^m = \frac{1}{2h^2}, \\ W_i^{c1} = \frac{1}{4h^2}, W_i^{c2} = \frac{h^2 - 1}{4h^4}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 2n, \quad (50)$$

式中  $W_i^m$  和  $W_i^{c1}$ ,  $W_i^{c2}$  分别为求一阶和二阶统计特性时的权系数.

$\xi_{i,k}$  通过非线性状态函数  $f_k(\cdot)$  传播为  $\gamma_{i,k+1|k}$ :

$$\gamma_{i,k+1|k} = f_k(\xi_{i,k}, u_k), \quad i = 0, 1, \dots, 2n. \quad (51)$$

#### Step 2 计算平滑增益.

由  $\gamma_{i,k+1|k}$  来计算状态一步预测  $\hat{x}_{k+1|k}$  和自协方

差  $P_{k+1|k}$ 、互协方差  $C_{k+1}$ :

$$\hat{x}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \gamma_{i,k+1|k} + q_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m f_k(\xi_{i,k}, u_k) + q_k, \quad (52)$$

$$P_{k+1|k} = \sum_{i=1}^n [W_i^{c1} (\gamma_{i,k+1|k} - \gamma_{i+n,k+1|k})^2 + (\gamma_{i,k+1|k} + \gamma_{i+n,k+1|k} - 2\gamma_{0,k+1|k})^2] + Q_k, \quad (53)$$

$$C_{k+1} = \sum_{i=1}^n W_i^m [(\xi_{i,k} - \hat{x}_k) \cdot (\gamma_{i,k+1|k} - \gamma_{i+n,k+1|k})^T]. \quad (54)$$

将式(53)–(54)代入式(22), 即可计算出平滑增益  $A_k$ ; 同时在式(22)中,  $\hat{x}_k$  和  $P_k$  可以由CDKF滤波计算获得, 于是通过式(18)和式(19)可获得固定区间CDKS算法. 类似地, 基于中心差分变换和定理2, 3可以得到固定点和固定滞后CDKS.

另外可以采用一阶线性化方法来实现扩展卡尔曼平滑器(extended Kalman smoother, EKS), 即对式(1)所示的非线性状态函数  $f_k(\cdot)$  一阶线性化

$$\Phi_{k+1,k} = \left. \frac{\partial f_k(x_k, u_k)}{\partial x_k} \right|_{x_k = \hat{x}_k}. \quad (55)$$

将上式代入式(48)即可得EKS算法, 其中  $\hat{x}_k$  和  $P_k$  可以由EKF滤波计算获得. 本文之所以给出EKS算法, 是为了方便CDKS与EKS作比较, 验证CDKS比EKS更具优势.

### 5 仿真实例(Simulation examples)

情况 I 考虑如下所示的强非线性系统:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\sin(5x_{2,k}))^2 \\ x_{1,k} + e^{-0.05x_{3,k}} + 10 \\ 0.2x_{1,k}(x_{2,k} + x_{3,k}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_k, \quad (56)$$

$$z_k = \cos x_{1,k} + x_{2,k}x_{3,k} + v_k, \quad (57)$$

其中  $w_k$  和  $v_k$  均为高斯白噪声, 且它们的统计特性如下所示:

$$q_k = 0.3, Q_k = 0.7, r_k = 0.5, R_k = 1.0. \quad (58)$$

设非线性系统(56)–(57)的理论初始值为

$$x_0 = [-0.7 \ 1 \ 1]^T. \quad (59)$$

同时取状态估计的初始值为

$$\hat{x}_0 = [-0.7 \ 1 \ 1]^T, P_0 = I. \quad (60)$$

且  $\hat{x}_0$  与  $w_k, v_k$  是互不相关的.

选择中心差分变换区间长度  $h = \sqrt{3}$  及仿真步数  $k = 50$ , 分别采用EKF、传统CDKF及本文所设计

的固定滞后CDKS对式(56)–(57)所示的非线性系统状态进行估计. 通过仿真发现, 状态 $x_1$ 的估计精度较差, 如图1所示, 可以看出, 传统CDKF已无法准确跟踪 $x_1$ 的变化. 尽管如此, 但传统CDKF对状态 $x_1$ 的估计精度依然高于EKF, 如图2所示, 传统CDKF的均方误差(RMSE)曲线收敛, 而EKF对状态 $x_1$ 的均方估计误差已经快速发散, 这是因为中心差分变换对非线性状态后验均值和协方差的二阶逼近精度高于EKF的一阶线性化近似.

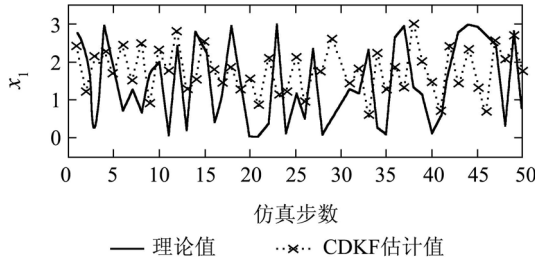


图1 传统CDKF下状态 $x_1$ 估计值

Fig. 1 Estimation of the state  $x_1$  in conventional CDKF

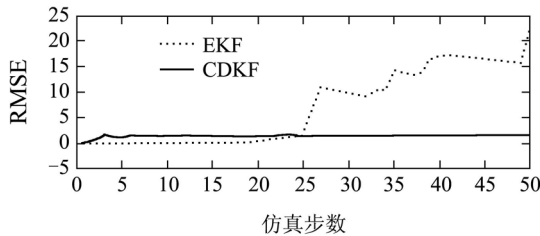


图2 EKF和CDKF下状态 $x_1$ 均方估计误差

Fig. 2 RMSE of the state  $x_1$  in CDKF and EKF

为了提高状态 $x_1$ 的估计精度, 采用本文所设计的固定滞后CDKS对 $x_1$ 进行平滑, 传统CDKF和CDKS的仿真比较结果如图3–5所示. 不难发现, 尽管传统CDKF对状态 $x_1$ 的均方估计误差收敛, 但稳态值较大, 这充分说明传统CDKF对状态 $x_1$ 的估计效果不佳, 非线性滤波已经失效; 而本文所设计的CDKS能实现对状态 $x_1$ 的精确跟踪, 其估计误差明显小于CDKF, 同时均方误差仿真曲线不仅收敛, 而且趋近于零, 验证了CDKS相对于传统CDKF在提高状态估计精度和解决非线性状态平滑问题等方面是有效的和可行的.

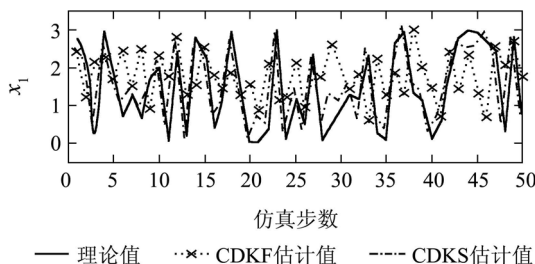


图3 CDKF和CDKS下状态 $x_1$ 估计值

Fig. 3 Estimation of the state  $x_1$  in CDKF and CDKS

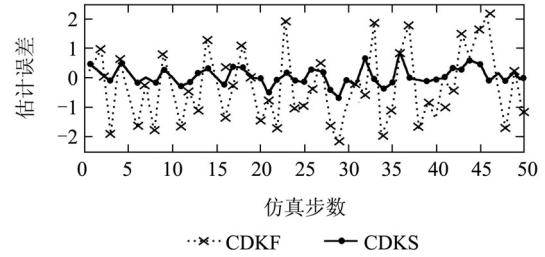


图4 CDKF和CDKS下状态 $x_1$ 估计误差

Fig. 4 Estimation error of the state  $x_1$  in CDKF and CDKS

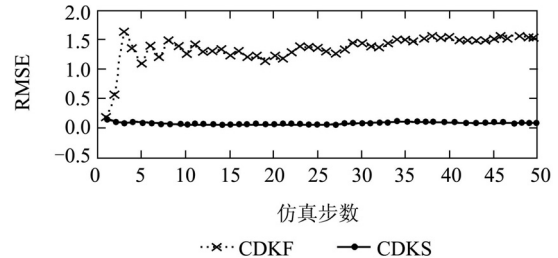


图5 CDKF和CDKS下状态 $x_1$ 均方估计误差

Fig. 5 RMSE of the state  $x_1$  in CDKF and CDKS

**情况 II** 考虑如下所示的一维非线性系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 2 \sin(0.2x_k) - x_k + w_k, \\ z_k = x_k^2 + v_k, \end{cases} \quad (61)$$

其中 $w_k$ 和 $v_k$ 均为互不相关的高斯白噪声, 且它们的统计特性如下所示:

$$q_k = 0.2, Q_k = 0.25, r_k = 0.3, R_k = 0.09. \quad (62)$$

设非线性系统(61)的理论初始值为

$$x_0 = -4.5. \quad (63)$$

同时假设理论初始值 $x_0$ 在滤波前是未知的, 故取状态估计的初始值为:

$$\hat{x}_0 = 0, P_0 = 2.3, \quad (64)$$

且 $\hat{x}_0$ 与 $w_k, v_k$ 是互不相关的.

为了求解状态的理论初始值 $x_0$ , 分别采用固定点CDKS和EKS对初始状态进行平滑, 仍然取区间长度 $h = \sqrt{3}$ 及仿真步数 $k = 50$ , CDKS及EKS的估计曲线如图6所示. 可以看出固定点CDKS可以准确快速估计出初始理论值, 而EKS已无法准确估计出状态初始值, 这是因为一阶线性化对非线性状态后验分布的近似精度只有一阶而中心差分变换可以达到二阶, 充分说明了CDKS相比于EKS在解决非线性状态平滑估计问题时的优越性.

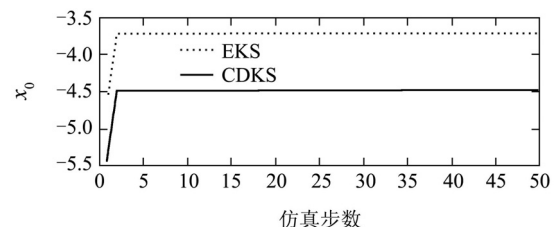


图6 CDKF和EKS下初始状态估计值

Fig. 6 Estimation of the initial state in CDKF and CDKS

## 6 结论(Conclusion)

传统CDKF采用中心差分变换能以二阶泰勒精度逼近任何非线性系统状态的后验均值和协方差,其滤波精度高于EKF,然而到目前为止,几乎没有文献尝试采用中心差分变换来解决非线性系统的状态平滑问题. 针对一类非线性离散系统的状态平滑问题,提出一种中心差分卡尔曼平滑器(CDKS),文中基于最小方差估计准则,推导了非线性状态最优平滑递推公式,并采用中心差分变换来计算非线性状态的后验均值和协方差. 仿真结果表明:所设计的CDKS算法为解决非线性状态平滑问题是提供了一种切实可行的方案,拓展了中心差分变换的应用范围;且CDKS算法在非线性的状态估计精度方面明显优于传统CDKF和EKS.

## 参考文献(References):

- [1] NØRGAARD M, POULSEN N K, RAVN O. New developments in state estimation for nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2000, 36(11): 1627 – 1638.
- [2] NØRGAARD M, POULSEN N K, RAVN O. Advances in derivative-free state estimation for nonlinear systems[R]. [IMM-REP-1998-15](revised edition). Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, 2000.
- [3] WAN E. Sigma-point filters: an overview with applications to integrated navigation and vision assisted control[C] // *Proceedings of Nonlinear Statistical Signal Processing Workshop*. New York: IEEE, 2006: 312 – 314.
- [4] VAN DER MERWE R, WAN E, JULIER S, et al. Sigma-point Kalman filters for nonlinear estimation and sensor fusion: applications to integrated navigation[C] // *Proceedings of the AIAA Guidance Navigation & Control Conference*. Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004. 1735 – 1764.
- [5] VAN DER MERWE R. Sigma-Point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models[EB/OL]. <http://www.cslu.ogi.edu/>, 2004, 3.
- [6] ITO K, XIONG K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(5): 910 – 927.
- [7] VAN DER MERWE R, WAN E. Sigma-point Kalman filters for integrated navigation[C] // *Proceedings of the 60th Annual Meeting-the Institute of Navigation*. Dayton: Institute of Navigation, 2004: 641 – 654.
- [8] SUBRAHMANYA N, SHIN Y C. Adaptive divided difference filtering for simultaneous state and parameter estimation[J]. *Automatica*, 2009, 45(7): 1686 – 1693.
- [9] 侯代文, 殷福亮. 基于迭代中心差分卡尔曼滤波的说话人跟踪方法[J]. *电子与信息学报*, 2008, 30(7): 1684 – 1689. (HOU Daiwen, YIN Fuliang. Iterated central difference Kalman filter based speaker tracking[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(7): 1684 – 1689.)
- [10] 王小旭, 赵琳, 薛红香. 强跟踪CDKF及其在组合导航中的应用[J]. *控制与决策*, 2010, 25(12): 1837 – 1842. (WANG Xiaoxu, ZHAO Lin, XUE Hongxiang. Strong tracking CDKF and its application for integrated navigation[J]. *Control & Decision*, 2010, 25(12): 1837 – 1842.)
- [11] 邓自立, 李春波. 自校正信息融合Kalman平滑器[J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(2): 236 – 242. (DENG Zili, LI Chunbo. Self-tuning information fusion Kalman smoother[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(2): 236 – 242.)
- [12] 史忠科. 最优估计的计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001. (SHI Zhongke. *Calculation of Optimal Estimation*[M]. Beijing: Science Press, 2001.)
- [13] 付梦印, 邓志红, 张继伟. Kalman滤波理论及其在导航系统中的应用(第2版)[M]. 北京: 科学出版社, 2009. (FU Mengyin, DENG Zhihong, ZHANG Jiwei. *Kalman Filtering Theory and its Application for Navigation System*[M]. Second Edition. Beijing: Science Press, 2009.)
- [14] FRASER D, POTTER J. The optimum linear smoother as a combination of two optimum linear filters[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, 14(4): 387 – 390.

## 作者简介:

王小旭 (1982—), 男, 博士, 在西北工业大学做博士后研究, 主要研究方向为非线性估计、信息融合及组合导航等, E-mail: woyao1982@163.com;

潘泉 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为目标跟踪、信息融合、图像处理及生物信息等, E-mail: quanpan@nwpu.edu.cn;

程咏梅 (1960—), 女, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为目标识别及跟踪、系统辨识等, E-mail: chengym@nwpu.edu.cn;

赵春晖 (1973—), 男, 副教授, 主要研究方向为图像处理、景象匹配导航等, E-mail: zhaochunhui@nwpu.edu.cn;

杨峰 (1977—), 男, 副教授, 主要研究方向为信息融合、目标跟踪等, E-mail: yangfeng@nwpu.edu.cn.