第 29 卷第 1 期
2012 年 1 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 29 No. 1
Jan. 2012

文章编号: 1000−8152(2012)01−0047−06

时滞反应扩散Hopfield神经网络的滑动模控制

梁 霄[1], 王林山[2], 刘云龙[1]

(1. 中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100; 2. 中国海洋大学 数学科学学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 研究了一类具有S–分布时滞和反应扩散项的Hopfield神经网络的滑动模控制问题. 首先改进了一类Hanalay不等式, 给出了一种范数不等式. 然后通过等效控制方法建立了系统的滑动模态方程, 并利用不等式技巧分析了它的吸引集的存在性和零点的指数稳定性. 在此基础上设计了变结构控制器, 给出了运动轨线到达滑动模态区的时间估计. 最后给出了一个例子验证了本文的结果, 并利用MATLAB作出了仿真.

关键词: Hopfield 神经网络; 滑动模态; 变结构控制; S–分布时滞

中图分类号: O19 **文献标识码**: A

Sliding mode control for Hopfield neural networks with time-delays and reaction-diffusion terms

LIANG Xiao[1], WANG Lin-shan[2], LIU Yun-long[1]

(1. College of Information Science and Engineer, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266100, China;
2. Department of Mathematics, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266100, China)

Abstract: The sliding mode control problems of a class of Hopfield neural networks with S-type distributed time-delays and reaction diffusion terms are investigated. First, the improved Hanalay inequality and norm inequality are presented. Next, the sliding mode equation is derived by using the equivalent control method; and the existence of the attraction sets and exponential stability of this system are discussed by using these inequalities. Then, the variable structure controller is designed; the approximate time duration from any initial state to sliding manifolds is also obtained. Finally, an example is given to illustrate the practical application of the propose scheme, and the simulation is carried out by using the MATLAB.

Key words: Hopfield neural network ; sliding mode; variable structure control; S-type distributed delays

1 引言(Introduction)

由于许多实际问题用集中参数系统和时滞控制系统描述往往是难以实现的, 需要用分布参数系统来描述, 所以分布参数系统的研究受到人们的广泛关注[1]. Orlov等[2–3]提出抛物型系统的控制模型, 之后许多学者又做了大量工作[4–7], 例如刘永清等对一类滞后分布系统给出了变结构设计方案[6], 文[7]将结果进一步推广到不确定系统. 分布参数系统的更多理论参见文[5]. 笔者希望将上述的理论成果应用到神经网络的研究中.

对于Hopfield神经网络(HNN)的定性研究成果颇丰[8–10]. 而现在笔者感兴趣的是如何在有限时间内控制HNN, 因为这个问题在脑科学、计算机网络, 以及通信科学等领域有重要的应用价值[11]. 但对于Hopfield神经网络的控制问题, 研究结果较少[11–13], 特别是带有反应扩散项的时滞Hopfield神经网络的变结构分布参数控制问题迄今未见报道.

考虑如下一类S–分布时滞反应扩散Hopfield神经网络的分布参数控制系统:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_i}{\partial t} = \sum\limits_{k=1}^{l} \dfrac{\partial}{\partial x_k}(G_{ik}\dfrac{\partial w_i}{\partial x_k}) - a_i w_i + \\ \qquad f_i(\sum\limits_{j=1}^{n}\int_{-r}^{0} w_j(t+\theta,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\eta_{ij}(\theta)) + \\ \qquad \sum\limits_{k=1}^{m} B_{ik}u_k, \\ \dfrac{\partial w_i}{\partial \boldsymbol{\nu}}(t,\boldsymbol{x}) = 0,\ t \geqslant t_0,\ \boldsymbol{x}\in\partial\Omega, \\ w_i(t_0+\theta,\boldsymbol{x}) = \phi_i(\theta,\boldsymbol{x}),\ -r\leqslant\theta\leqslant 0, \\ \qquad\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega,\ i=1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $r \geqslant 0$, $\Omega \in \mathbb{R}^l$是具有光滑边界$\partial\Omega$的紧集, 并且测度mes $\Omega > 0$, $\boldsymbol{\nu}$表示$\partial\Omega$上的单位外法向量. $a_i > 0$表示网络的自反应速率, 同时$\phi_i(\theta,\boldsymbol{x})$是$[-r,0]\times\Omega$上的连续函数. $w_i(t,\boldsymbol{x})$表示在与神经网络不连通并且无外部附加电势差的情况下第i个神经元恢复孤立静息状态下的速率, $u_k(t,\boldsymbol{x})$ 是速度

收稿日期: 2010−11−12; 收修改稿日期: 2011−05−02.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171374, 10871117).

控制量. 为研究的方便, 令

$$\lambda_{ij}(t,w_j)=\int_{-r}^{0}w_j(t+\theta,x)\mathrm{d}\eta_{ij}(\theta),$$

$\lambda_{ij}(t,w_j)$是Lebesgue-Stieljies可积的. $\eta_{ij}(\theta)$是$[-r,0]$上不减的有界变差函数, 且

$$0\leqslant\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\eta_{ij}(\theta)=\eta_{ij}^{*}<\infty.$$

由于时滞可分为离散时滞和分布时滞, 两者互不包含, 但可以在Lebesgue-Stieljies积分意义下统一写成S–分布时滞的形式[14], 于是S–分布时滞系统包含了离散时滞和分布时滞系统. 因此, 研究S–分布时滞反应扩散Hopfield神经网络分布参数控制系统, 具有理论意义和应用价值.

2 预备知识(Preliminaries)

2.1 符号(Notations)

- $L^2(\Omega)^n$: Ω上的实的Lebesgue可测函数空间, 赋予范数$\|\boldsymbol{u}\|=(\int_{\Omega}|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$构成一个Banach空间, 其中$|\cdot|$表示欧几里德范数. 且具有内积$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_{\Omega}<\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})>\mathrm{d}x$, 这里$<\cdot,\cdot>$表示$\mathbb{R}^n$空间中的内积;
- $H^1(\Omega)^n\nabla\{\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega)^n,\nabla\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega)^n\}$, 其中$\nabla$代表梯度算子, 在给定的半范数$|||\boldsymbol{u}|||=(\int_{\Omega}|\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$构成一个Banach空间;
- $\{H^2(\Omega)\}^n\triangleq\{\boldsymbol{u}:\mathcal{D}^{\alpha}\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega)^n,|\alpha|\leqslant 2\}$;
- $[\boldsymbol{u}]^+=(|u_1|,|u_2|,\cdots,|u_n|)^{\mathrm{T}}$;
- $[\boldsymbol{u}]_r=\sup\limits_{\theta\in[-r,0]}[\boldsymbol{u}(t+\theta)]^+$;
- $|u_i|_r=\sup\limits_{\theta\in[-r,0]}|u_i(t+\theta)|,\ i=1,2,\cdots,n$;
- $\|\boldsymbol{u}\|_r=\sup\limits_{\theta\in[-r,0]}\|\boldsymbol{u}(t+\theta)\|$;
- $A=(a_{ij})_{n\times m}$和$B=(b_{ij})_{n\times m}$的Hadamard乘积为: $A\circ B=(a_{ij}b_{ij})_{n\times m}$;
- 对于$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$, 若$u_i>v_i,\ i=1,2,\cdots,n$, 则称$\boldsymbol{u}>\boldsymbol{v}$.

2.2 引理和假设(Lemmas and assumptions)

基本假设:

H1) $|f_i(x)-f_i(y)|\leqslant\sigma_i|x-y|,\sigma_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n$, 则$|f_i(x)|\leqslant\sigma_i|x|+|f_i(0)|$;

H2) $G_{ik}(\boldsymbol{x})\geqslant\dfrac{\alpha}{nl},\ \alpha>0$;

H3) $c_1=\alpha\beta-2n\|(I-P)A\|_F,\ c_2=2(\alpha\beta)^{-1}\cdot(n\|[I-P]^+\sigma\eta^*\|_F)^2, c_1-c_2>0, P$将在文中定义.

引理 1 (Gauss公式)[8] 假设Ω是$\mathbb{R}^l$中的有界区域, 且具有光滑边界$\partial\Omega$, 则

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}s=\int_{\Omega}\nabla\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}x,\ \forall\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega)^n. \tag{2}$$

引理 2 (Poincare不等式)[15] 假设Ω是$\mathbb{R}^l$中的有界区域, 则存在$\beta(\Omega)>0$, 使得

$$\|\boldsymbol{u}\|^2\leqslant\beta^{-1}|||\boldsymbol{u}|||^2,\ \forall\boldsymbol{u}\in H^1(\Omega)^n. \tag{3}$$

引理 3 (Halanay不等式))[8] 设$v(t)>0,\ t\in\mathbb{R}$, $r\in[0,+\infty)$, 如果

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\leqslant -av(t)+bv_t,\ t\geqslant t_0,$$

其中$v_t=\sup\limits_{s\in[t-r,t]}v(s)$, 若$a>b>0$, 则存在$\gamma>0$和$\kappa>0$, 使得

$$v(t)\leqslant\kappa\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}. \tag{4}$$

再给出一个改进的Halanay不等式.

引理 4 设$v(t)>0,\ t\in\mathbb{R},\ r\in[0,+\infty)$, 若

$$\dot{v}(t)\leqslant -av(t)+bv_t+c,\ t\geqslant t_0\in\mathbb{R},$$

$a>b>0$, 且存在σ满足$0<\sigma\leqslant\min\{a-b,c\}$, 则

$$v(t)\leqslant\|\phi\|-\mathrm{e}^{-\sigma(t-t_0)}+\sigma^{-1}c, \tag{5}$$

其中:

$$t>t_0,\ v_{t_0}=\phi,\ \|\phi\|=\sup_{t_0-r\leqslant t\leqslant t_0}|\phi|.$$

特别地, 当$\sigma=\dfrac{a-b}{k}$, 其中k足够大, 有

$$v(t)\leqslant\|\phi\|-\mathrm{e}^{-\frac{a-b}{k}(t-t_0)}+\frac{kc}{a-b}.$$

证 定义函数$z(t)$如下:

$$z(t)=\begin{cases}\|\phi\|+\sigma^{-1}c-1, & t_0-r\leqslant t\leqslant t_0,\\ \|\phi\|-\mathrm{e}^{-\sigma(t-t_0)}+\sigma^{-1}c, & t>t_0.\end{cases}$$

下面证明$v(t)\leqslant z(t)$. 由于$t_0-r\leqslant t\leqslant t_0$时命题显然成立, 因此本文只需要证明$t>t_0$时命题成立.

1) 当$\phi\neq 0$时, 假设命题不成立, 则存在$t_1>t_0$, 使得当$t_0-r\leqslant t\leqslant t_1$时, $v(t)\leqslant z(t)$, 且$t=t_1$时, $v(t_1)=z(t_1),\ \dot{v}(t_1)\geqslant\dot{z}(t_1)$.

另一方面, 利用$z(t)$的单调性:

$$\begin{aligned}\dot{v}(t_1)\leqslant&-av(t_1)+bv_t(t_1)+c\leqslant\\&-az(t_1)+bz_t(t_1)+c\leqslant\\&(-a+b)(\|\phi\|-\mathrm{e}^{-\sigma(t-t_0)}+\sigma^{-1}c)+c,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\dot{v}(t_1)\leqslant&-\sigma(\|\phi\|-\mathrm{e}^{-\sigma(t_1-t_0)}+\sigma^{-1}c)+c=\\&-\sigma\|\phi\|+\sigma\mathrm{e}^{-\sigma(t_1-t_0)}<\\&\sigma\mathrm{e}^{-\sigma(t_1-t_0)}.\end{aligned}$$

又因为$\dot{z}(t_1)=\sigma\mathrm{e}^{-\sigma(t_1-t_0)}$, 因此$\dot{v}(t_1)<\dot{z}(t_1)$, 与假设矛盾, 从而$v(t)\leqslant z(t), t\in[-r,\infty)$.

2) 当$\phi=0$时, 任给$\varepsilon>0$, 令$u(t)=v(t)+\varepsilon,\ u_{t_0}=\psi=\phi+\varepsilon$则$\psi=\varepsilon\neq 0$, 并且

$$\dot{u}(t) \leqslant -au(t) + bu_t + c + (a-b)\varepsilon,\ t \geqslant t_0.$$

由1)知

$$u(t) \leqslant \|\psi\| - \mathrm{e}^{-\sigma(t-t_0)} + \frac{c+(a-b)\varepsilon}{\sigma},$$

其中: $t > t_0,\ u_{t_0} = \psi,\ \|\psi\| = |\varepsilon|$.

由ε的任意性, 可知

$$u(t) \leqslant \|\phi\| - \mathrm{e}^{-\sigma(t-t_0)} + \frac{c}{\sigma},\ t > t_0,\ u_{t_0} = 0.$$

命题成立.

为方便起见, 将方程(1)改为如下的向量形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} = \nabla\cdot(G(\boldsymbol{x})\circ\nabla\boldsymbol{w}) - A\boldsymbol{w} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}) + B\boldsymbol{u}, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{v}} = 0,\ t \geqslant t_0,\ \boldsymbol{x}\in\partial\Omega, \\ \boldsymbol{w}(t_0+\theta,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}(\theta,x),\ -r\leqslant\theta\leqslant 0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

其中:

$$G = (G_{ij})_{n\times l},\ B = (B_{ij})_{n\times m},$$
$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}},$$
$$A = \mathrm{diag}\{a_1, a_2, \cdots, a_n\},$$
$$\eta(\theta) = (\eta_{ij}(\theta))_{n\times n},\ \eta^* = (\eta^*_{ij})_{n\times n},$$
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}) = (f_1(\lambda_1), f_2(\lambda_2), \cdots, f_n(\lambda_n))^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\phi}(\theta,\boldsymbol{x}) = (\phi_1(\theta,\boldsymbol{x}), \phi_2(\theta,\boldsymbol{x}), \cdots, \phi_n(\theta,\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \int_{-r}^{0}\mathrm{d}\eta(\theta)\boldsymbol{w}(t+\theta,\boldsymbol{x}).$$

令$H = L^2(\Omega)^n$, $V = H^1(\Omega)^n$, 由文[16], $V \subset H = H' \subset V'$, H', V'分别表示H, V的对偶空间, 并且嵌入是连续的. 定义双线性算子:

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\mathfrak{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\ \forall\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in V,$$

其中线性算子$\mathfrak{A}$定义如下:

$$\mathfrak{A}: D(\mathfrak{A}) \to H,$$
$$\mathfrak{A}\boldsymbol{u} = -\nabla\cdot(G(\boldsymbol{x})\circ\nabla\boldsymbol{u}), \tag{7}$$

其中$D(\mathfrak{A}) = \{\boldsymbol{u}\in H^2(\Omega)^n : \dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{v}} = 0, \boldsymbol{x}\in\partial\Omega\}$.

引理 5　设假设H2)成立, 则双线性算子$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$在$V$中是强制的.

证　任给$\boldsymbol{u}\in V$

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) =$$
$$-(\nabla\cdot(G(\boldsymbol{x})\circ\nabla\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}) =$$
$$-\int_\Omega <\nabla\cdot(G(\boldsymbol{x})\circ\nabla\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u}> \mathrm{d}x =$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \nabla\cdot(G(\boldsymbol{x})\circ\nabla\boldsymbol{u})_i u_i \mathrm{d}x.$$

利用文[8]的结论, 结合Gauss公式以及Neumann边界条件, 得

$$\int_\Omega D(u_i)\nabla\cdot(G(\boldsymbol{x})\circ\nabla u)\mathrm{d}x =$$
$$-\int_\Omega (G(\boldsymbol{x})\circ\nabla\boldsymbol{u}\circ\nabla\boldsymbol{u})E\mathrm{d}x,$$

其中: $D(u_i) = \mathrm{diag}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $\boldsymbol{E} = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$, 利用Hadamard乘积"$\circ$"的定义和条件H2), 可知$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \geqslant \alpha|||\boldsymbol{u}|||^2$.　　证毕.

引理 6　令$B = (b_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{u}$是一个n维向量, 则$|B\boldsymbol{u}| \leqslant n\|B\|_F|\boldsymbol{u}|$, 其中$\|B\|_F$表示$B$的Frobenius范数, 即

$$\|B\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2}.$$

证　利用Cauchy不等式, 得

$$<B\boldsymbol{u}, B\boldsymbol{u}> = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}u_j)^2 =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ij}b_{ik}u_ju_k \leqslant$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(b_{ij}^2u_j^2 + b_{ik}^2u_k^2) =$$
$$n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}^2u_j^2) \leqslant n(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2)(\sum_{j=1}^{n} u_j^2),$$

其中$<\cdot,\cdot>$表示$\mathbb{R}^n$中的欧几里德内积, 则$|B\boldsymbol{u}|^2 \leqslant n\|B\|_F^2|\boldsymbol{u}|^2$.　　证毕.

3　滑模方程(Sliding mode equation)

选取切换函数为

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t) = C\boldsymbol{w}, \tag{8}$$

其中$C = (c_{ij})_{m\times n}$为待定矩阵, 则有切换面

$$\boldsymbol{s}_0 = \{\boldsymbol{w} : C\boldsymbol{w} = 0\}. \tag{9}$$

设$\dot{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x},t) = 0$, 根据式(6)(8)得

$$C(-\mathfrak{A}\boldsymbol{w} - A\boldsymbol{w} + f(\boldsymbol{\lambda}) + B\boldsymbol{u}) = 0.$$

若$(CB)^{-1}$存在(关于矩阵C的确定见文[17]), 根据上式求出等效控制

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}} = -(CB)^{-1}C(-\mathfrak{A}\boldsymbol{w} - A\boldsymbol{w} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})). \tag{10}$$

将式(10)代入式(6), 得滑模控制方程

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} = -\mathfrak{A}\boldsymbol{w} - A\boldsymbol{w} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}) -$$
$$B(CB)^{-1}C(-\mathfrak{A}\boldsymbol{w} - A\boldsymbol{w} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})) =$$
$$(I - B(CB)^{-1}C)(-\mathfrak{A}\boldsymbol{w} - A\boldsymbol{w} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})).$$

I为单位矩阵. 令$P = B(CB)^{-1}C$, 根据文[18], 若$P\mathfrak{A}\boldsymbol{w} = \mathfrak{A}(P\boldsymbol{w})$, 系统的滑模控制方程可简化为

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} = -\mathfrak{A}\boldsymbol{w} + (I-P)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}) - A\boldsymbol{w}). \tag{11}$$

利用Fadeo-Galerkin方法笔者可以求出方程的解的全局存在唯一性. 以下总假设$P\mathfrak{A}\boldsymbol{w} = \mathfrak{A}(P\boldsymbol{w})$.

4 滑模运动方程的耗散性以及指数稳定性(Dissipation and exponential stability of sliding mode equation)

定理 1 若系统(11)满足假设H1)−H3), 则系统(11)存在一个全局吸引集.

证 由系统(11)可得

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}=-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathfrak{A}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(I-P)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})-A\boldsymbol{w}),$$

其中$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}$代表$\boldsymbol{w}$的转置. 对上式在$\Omega$上关于$x$积分, 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{w}\|^2=(-\mathfrak{A}\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})+((I-P)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{w})-((I-P)A\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}).$$

由Cauchy-Schwartz不等式和引理6, 得

$$((I-P)A\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})\leqslant\|(I-P)A\boldsymbol{w}\|\|\boldsymbol{w}\|\leqslant n\|(I-P)A\|_F\|\boldsymbol{w}\|^2,$$

同理可得

$$((I-P)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{w})\leqslant\|(I-P)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})\|\|\boldsymbol{w}\|.$$

根据引理2和引理5, 知

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{w}\|^2+(\alpha\beta-n\|(I-P)A\|_F)\|\boldsymbol{w}\|^2\leqslant\|(I-P)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})\|\|\boldsymbol{w}\|.$$

由于$\eta(\theta)$是一个有界变差函数矩阵, 因此

$$|\sum_{j=1}^{n}\int_{-r}^{0}w_j(t+\theta)\mathrm{d}\eta_{ij}(\theta)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\eta_{ij}(\theta)|w_j|_r=\sum_{j=1}^{n}\eta_{ij}^{*}|w_j|_r.$$

进一步, 利用假设H1)

$$[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})]^{+}\leqslant\sigma[\boldsymbol{\lambda}]^{+}+[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})]^{+}\leqslant\sigma\eta^{*}[\boldsymbol{w}]_r+[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})]^{+},$$

同理可得

$$[(I-P)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})]^{+}\leqslant[I-P]^{+}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})]^{+}\leqslant[I-P]^{+}\sigma\eta^{*}[\boldsymbol{w}]_r+[I-P]^{+}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})]^{+}.$$

利用Minkowski不等式和引理6, 得

$$\begin{aligned}&\|(I-P)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})\|\leqslant\\&\|[I-P]^{+}\sigma\eta^{*}[\boldsymbol{w}]_r\|+\|[I-P]^{+}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})]^{+}\|\leqslant\\&n\|[I-P]^{+}\sigma\eta^{*}\|_F\|\boldsymbol{w}\|_r+\|[I-P]^{+}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})]^{+}\|.\end{aligned}$$

利用以上不等式, 知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{w}\|^2+(\alpha\beta-n\|(I-P)A\|_F)\|\boldsymbol{w}\|^2\leqslant\\&(n\|[I-P]^{+}\sigma\eta^{*}\|_F\|\boldsymbol{w}(t)\|_r+\\&\|[I-P]^{+}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})]^{+}\|)\|\boldsymbol{w}\|\leqslant\\&n\|[I-P]^{+}\sigma\eta^{*}\|_F\|\boldsymbol{w}(t)\|_r\|\boldsymbol{w}\|+\\&\|I-P]^{+}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})]^{+}\|\|\boldsymbol{w}\|.\end{aligned}\tag{12}$$

由Young不等式, 得

$$\begin{aligned}&n\sigma\|[I-P]^{+}\eta^{*}\|_F\|\boldsymbol{w}\|_r\|\boldsymbol{w}\|\leqslant\\&\frac{1}{4}\alpha\beta\|\boldsymbol{w}\|^2+(\alpha\beta)^{-1}(n\|[I-P]^{+}\sigma\eta^{*}\|_F)^2\|\boldsymbol{w}\|_r^2,\\&\|[I-P]^{+}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})]^{+}\|\|\boldsymbol{w}\|\leqslant\\&\frac{1}{4}\alpha\beta\|\boldsymbol{w}\|^2+(\alpha\beta)^{-1}\|[I-P]^{+}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})]^{+}\|^2.\end{aligned}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{w}\|^2\leqslant-c_1\|\boldsymbol{w}\|^2+c_2\|\boldsymbol{w}\|_r^2+c_3,\tag{13}$$

其中$c_3=2(\alpha\beta)^{-1}\|[I-P]^{+}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})]^{+}\|^2$, 由引理4和假设H3), 当$c_4=c_1-c_2$时, 存在足够大的$k$, 使得

$$\|\boldsymbol{w}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{\phi}\|^2-\mathrm{e}^{-\frac{1}{k}c_4(t-t_0)}+\frac{kc_3}{c_4},\tag{14}$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{w}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{\phi}\|^2+\frac{kc_3}{c_4},\tag{15}$$

命题成立. 证毕.

定理 2 若$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=0$, 则系统(11)在Von Neumann边界条件下关于零解是指数稳定的.

证 利用定理1的证明方法, 若$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, 则$c_3=0$, 式(13)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{w}\|^2\leqslant-c_1\|\boldsymbol{w}\|^2+c_2\|\boldsymbol{w}\|_r^2.\tag{16}$$

利用引理3, 存在$\gamma>0$和$\kappa>0$, 使得

$$\|\boldsymbol{w}\|^2\leqslant\kappa\mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)},\tag{17}$$

命题成立. 证毕.

5 滑动模区(Sliding mode area)

定理 3 选取变结构控制器为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}-\varepsilon\frac{(CB)^{-1}C\boldsymbol{w}}{\|P\boldsymbol{w}\|},\ \varepsilon>0,\tag{18}$$

则整个切换面均为滑动模区.

证 因为

$$\frac{\partial\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=C(-\mathfrak{A}\boldsymbol{w}-A\boldsymbol{w}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})+B\boldsymbol{u}),$$

则

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\\&\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}C(-\mathfrak{A}\boldsymbol{w}-A\boldsymbol{w}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})+B\boldsymbol{u})=\\&\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C(-\mathfrak{A}\boldsymbol{w}-A\boldsymbol{w}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})+B\boldsymbol{u}).\end{aligned}$$

将式(18)和$\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}$代入, 整理得

$$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C(I-P)(-\mathfrak{A}\boldsymbol{w}-A\boldsymbol{w}+f(\boldsymbol{\lambda}))-\varepsilon\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\frac{P\boldsymbol{w}}{\|P\boldsymbol{w}\|}.$$

由于$PB=B$, $CP=C$, 故

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C(I-P)=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(C-CP)=0.$$

综上所述知

$$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=-\varepsilon\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}C\frac{P\boldsymbol{w}}{\|P\boldsymbol{w}\|}=-\varepsilon\frac{(C\boldsymbol{w})^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{w}}{\|P\boldsymbol{w}\|}. \tag{19}$$

从而$\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}<0$, $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t)\neq 0$, 即整个切换面$s_0$是滑动模区. 　　证毕.

6　到达滑动模区的时间(Approximating time to the sliding manifolds)

定理 4　选取变结构控制器(18) 则从任意初始位置$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)$出发的轨线$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)$均于有限时间$T$内到达滑模区$s_0$上, 且$T$有如下估计:

$$T=\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\|B(CB)^{-1}C\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)\|^2. \tag{20}$$

证　由方程(6)和(18)可知

$$\begin{aligned}&P\frac{\partial \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\\&-P\mathfrak{A}\boldsymbol{w}-PA\boldsymbol{w}+P\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})+PB\boldsymbol{u}=\\&-P\mathfrak{A}\boldsymbol{w}-AP\boldsymbol{w}+P\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})+\\&PB(CB)^{-1}C(\mathfrak{A}\boldsymbol{w}+A\boldsymbol{w}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda})-\\&\varepsilon PB\frac{(CB)^{-1}C\boldsymbol{w}}{\|P\boldsymbol{w}\|}.\end{aligned}$$

由于$P=B(CB)^{-1}C$, 因此

$$P^2=(B(CB)^{-1}C)^2=P,\ PB=B,\ CP=C,$$

从而

$$P\frac{\partial \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=-\varepsilon\frac{P\boldsymbol{w}}{\|P\boldsymbol{w}\|},$$

进而

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P\frac{\partial \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=-\varepsilon\frac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{w}}{\|P\boldsymbol{w}\|}.$$

对x在Ω上积分得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|P\boldsymbol{w}\|^2=-\varepsilon. \tag{21}$$

假设经过时间T之后, 从初始位置$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},0)$出发的轨线到达$s_0$上, 此时$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},T)=0$. 从0到$T$积分得

$$\|P\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},T)\|^2-\|P\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)\|^2=-2\varepsilon T.$$

将$P=B(CB)^{-1}C$代入上式得

$$\|B(CB)^{-1}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},T)\|^2-\|B(CB)^{-1}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},0)\|^2=-2\varepsilon T,$$

即

$$T=\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}\|B(CB)^{-1}C\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},0)\|^2. \tag{22}$$

证毕.

注 1　由式(8)(10)(18)可知, 因为控制是不连续的, 所以会导致抖振, 如果使用连续化方法, 采用控制器

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},T)=\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}-\varepsilon\frac{(CB)^{-1}C\boldsymbol{w}}{\|P\boldsymbol{w}\|+\delta},\ \delta>0 \tag{18$'$}$$

可以消除抖振, 但也消除了变结构, 消除了可贵的抗摄动抗干扰能力[17], 所以采用削弱的手段才是可取的, 至于如何削弱抖振以及系统的其他品质, 笔者将来会做进一步探讨.

7　结论与仿真(Conclusion and simulation)

当G是一个单位矩阵, 此时$\nabla\cdot(G(\boldsymbol{x})\circ\nabla\boldsymbol{w})=\Delta\boldsymbol{w}$, Δ表示Laplace算子, $f(\boldsymbol{w})=D\boldsymbol{w}$, D是一个n阶矩阵, 并且

$$\eta_{ij}(\theta)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \eta_{ii}(\theta), & i=j,\end{cases}$$

$$\eta_{ii}(\theta)=\begin{cases}-1, & \theta=-r,\\ 0, & -r<\theta\leqslant 0.\end{cases}$$

从而η是$[-r,0]$上的不减的有界变差矩阵, 而且

$$\int_{-r}^{0}w_j(t+\theta,x)\mathrm{d}\eta_{ij}(\theta)=w_j(t-r,x),$$

即$\boldsymbol{w}$满足$\dfrac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}=\Delta\boldsymbol{w}-A\boldsymbol{w}+D\boldsymbol{w}(t-r)+B\boldsymbol{u}$. 这是文[1]中的模型, 因此推广了文 [1]中的结论.

如果令

$$\begin{aligned}&f(x)=\tan h(x),\ \boldsymbol{w}=(w_1,w_2)^{\mathrm{T}},\ r=1,\\&G(\boldsymbol{x})=(3,4)^{\mathrm{T}},\ \Omega=[0,1]\in\mathbb{R},\ \mathrm{mes}\,\Omega=1,\\&\boldsymbol{\phi}(\theta,x)=(1,-1)^{\mathrm{T}},\ \theta\in[-1,0],\ C\boldsymbol{B}=1,\\&m=1,\ \boldsymbol{B}=(0.5,0.5)^{\mathrm{T}},\ C=(1,1),\\&A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}C=\begin{bmatrix}0.5&0.5\\0.5&0.5\end{bmatrix},\\&P=I-\boldsymbol{B}(C\boldsymbol{B})^{-1}C=\begin{bmatrix}0.5&-0.5\\-0.5&0.5\end{bmatrix},\end{aligned}$$

η的定义如上. 经检验系统满足文章的所有条件, 系统的仿真如图1所示.

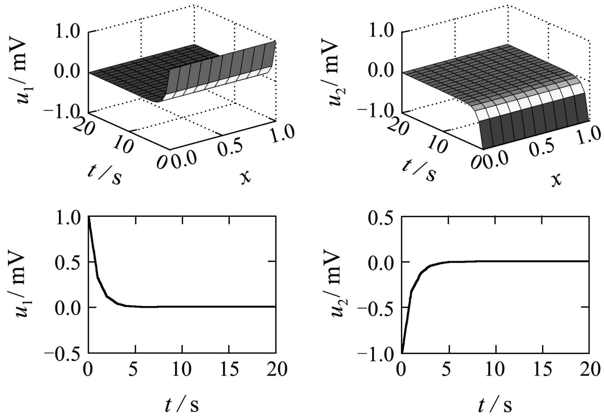

图 1　系统仿真

Figure 1　Simulation

参考文献(References):

[1] 高存臣, 袁付顺, 肖会敏. 时滞变结构控制系统[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
(GAO Cunchen, YUAN Fushun, XIAO Huimin. *Variable Structure Control System with Time-Delay*[M]. Beijing: Science Press, 2004.)

[2] ORLOV Y V, UTKIN V I. Sliding mode control in indefinite dimensional systems[J]. *Automatica*, 1987, 23(6): 753 – 757.

[3] UTKIN V I. *Sliding Modes in Control and Optimization*[M]. New York: Springer-Verlag, 1992.

[4] 胡跃明, 周其节. 二阶分布参数系统的变结构控制[J]. 控制理论与应用, 1993, 10(3): 256 – 262.
(HU Yueming, ZHOU Qijie. Variable control of second-order distributed parameter systems[J]. *Control Theory & Applications*, 1993, 10(3): 256 – 262.)

[5] 罗毅平, 邓飞其. 变时滞分布参数系统的全局指数稳定性[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(4): 562 – 566.
(LUO Yiping, DENG Feiqi. Global exponential stability for distributed parameter systems with varying time-delay[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(4): 562 – 566.)

[6] 刘永清, 谢胜利. 滞后分布参数系统的稳定与变结构控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.
(LIU Yongqing, XIE Shengli. *Stability and Variable Structure Control of Distributed Parameter Systems with Time Delay*[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998.)

[7] 邢海龙, 高存臣, 曾宪武, 等. 一类具有时滞不确定分布参数系统的滑动模控制[J]. 控制与决策, 2007, 22(3): 333 – 336.
(XING Hailong, GAO Cunchen, ZENG Xianwu, et al. Sliding mode control for a class of uncertain distributed parameter systems with time-varying delay[J]. *Control and Decision*, 2007, 22(3): 333 – 336.)

[8] 王林山. 时滞递归神经网络[M]. 北京: 科学出版社. 2008.
(WANG Linshan. *Recurrent Neural Network with Delays*[M]. Beijing: Science Press, 2008.)

[9] 崔宝同, 楼旭阳. 具反应扩散混合时滞Cohen-Grossberg神经网络的指数耗散性[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(4): 619 – 622.
(CUI Baotong, LOU Xuyang. Exponential dissipativity of Cohen-Grossberg neural networks with mixed delays and reaction-diffusion terms[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(4): 619 – 622.)

[10] DENG F Q, ZHAO B R, LUO Q. Exponential stability of stochastic Hopfield neural networks with distributed parameters[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(2): 196 – 200.

[11] WANG Q F. Computation issue of pointwise controls for diffusion Hopfield neural network system[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 207(1): 267 – 275.

[12] NAKAGIRI S, WANG Q F. Optimal control problems for distributed Hopfield-type neural networks[J]. *Nonlinear Functional Analysis and Application*, 2002, 7 (2): 167 – 186.

[13] WANG L, XU D. Asymptotic behavior of a class of reaction-diffusion equations with delays[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Apllication*, 2003, 281(2): 439 – 453.

[14] HALE J K, VERDUYN, LUNEL S M. *Introduction to Functional Differential Equations*[M]. New York: Springer, 1993.

[15] ADAMS R A. *Sobolev Spaces*[M]. 2nd Ed. Berlin: Academic Press, 2003.

[16] TEMAM R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*[M]. New York: Springer, 1988.

[17] 高为炳. 变结构控制理论与设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
(GAO Weibing. *Theory and Methodology of Variable Structure Control*[M]. Beijing: Science Press, 1996.)

[18] LI W L, BIAN W M. Variable structure control indefinite dimensional system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1995, 16(3): 283 – 291.

作者简介:

梁 霄 (1984—), 男, 博士研究生, 研究方向为动力系统与神经网络, E-mail: liangxiao19840124@163.com;

王林山 (1955—), 男, 博士生导师, 教授, 研究方向为动力系统与神经网络, E-mail: wangls@ouc.edu.cn, 通讯作者;

刘云龙 (1982—), 男, 博士研究生, 研究方向为离散变结构控制、测度型脉冲控制, E-mail: fhylren@163.com.