

## 基于有限记忆变遗忘因子的子空间辨识算法

黄金峰<sup>1</sup>, 张合新<sup>1</sup>, 胡友涛<sup>1</sup>, 张植<sup>2</sup>

(1. 第二炮兵工程大学自动控制系, 陕西西安710025; 2. 第二炮兵驻国营二〇〇厂军代室, 北京100854)

**摘要:** 针对传统递推子空间辨识算法对时变参数跟踪速度慢的问题, 基于自适应变遗忘因子机制提出一种新的子空间辨识算法. 为此首先设计了变遗忘因子作用下输入输出Hankel矩阵的更新机制; 然后运用系统矩阵特征值空间欧氏距离信息实现变遗忘因子的自适应更新; 最后为隔断历史数据的作用, 采用有限记忆法进一步改进算法. 理论及仿真结果表明, 新算法跟踪速度快、跟踪效果好.

**关键词:** 子空间辨识; 变遗忘因子; 有限记忆; 欧氏距离

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Subspace identification algorithm based on finite-memory variable forgetting factor

HUANG Jin-feng<sup>1</sup>, ZHANG He-xin<sup>1</sup>, HU You-tao<sup>1</sup>, ZHANG zhi<sup>2</sup>

(1. Department of Automation, The Second Artillery Engineering College, Xi'an Shaanxi 710025, China;

2. The Second Artillery Representative Department, The Two-Hundredth Factory, Beijing 100854, China)

**Abstract:** A novel subspace identification algorithm is proposed based on self-adaptive variable forgetting factor to deal with the problem of low convergence rate in traditional algorithms. The update form of input-output data Hankel matrices is redesigned. The self-adaptive forgetting factor is realized with the help of Euclidean-distance of eigenvalues of the identified system matrix. In order to eliminate the effect of old data, a modified algorithm is designed based on the finite-memory method. Theoretical proof and simulation results show that the tracking response of the modified algorithm is faster and the performance is better than the traditional algorithms.

**Key words:** subspace identification; variable forgetting factor; finite-memory; Euclidean-distance.

### 1 引言(Introduction)

递推子空间辨识算法<sup>[1-2]</sup>是利用新增输入输出数据对在线估计系统参数矩阵的一种辨识算法, 因其具有不关心被辨识系统的模型结构、无需求解复杂非线性优化函数等优点, 从而广泛应用于控制<sup>[3]</sup>、辨识<sup>[4]</sup>等领域.

OKU H<sup>[5]</sup>用矩阵方法实现了子状态空间系统辨识(subspace state-space system identification, 4SID)算法的递推步骤, 之后又用梯度型子空间跟踪算法<sup>[6]</sup>代替奇异值分解(singular value decomposition, SVD), 分解进一步降低了计算量, 但张贤达<sup>[7]</sup>指出梯度下降法收敛较慢, 跟踪时变子空间参数能力相对较差. 多变量的输出错误状态空间辨别(multivariable output-error state space identification, MOESP)类递推子空间(ordinary MOESP, OM)算法<sup>[8]</sup>、过去输入(the past-input, PI)算法<sup>[9]</sup>、过去输入/输出(the past-input/the past-output, PI/PO)算法<sup>[10]</sup>以及过去输出误差变量(the past-output errors-in-variables, PO-EIV)算

法<sup>[11]</sup>一般分为3个步骤: 1) 构造Hankel矩阵; 2) 正交分解(orthogonal factorization, QR)分解及SVD分解(或者Givens旋转代替QR分解及子空间跟踪算法代替SVD分解<sup>[12]</sup>)求解广义能观测矩阵; 3) 由广义能观测矩阵估计系统参数矩阵. 改善子空间算法对时变参数的跟踪性能主要靠引入固定遗忘因子机制<sup>[13-14]</sup>和变遗忘因子机制<sup>[15]</sup>, 遗忘因子的大小是第1种机制下算法性能好坏的重要因素. MERCÈRE G等<sup>[15]</sup>用第2种机制改进了MOESP类算法, 但忽略了变遗忘因子对新增观测向量的作用, 且文中的变遗忘因子是外部设定的, 不具有自适应性.

针对传统子空间辨识算法跟踪时变系统参数速度慢的缺点, 基于自适应变遗忘因子机制提出一种新的子空间辨识算法. 该算法首先设计变遗忘因子作用下的Hankel矩阵更新机制, 增加了变遗忘因子更新新增观测向量的步骤; 其次用矩阵估计 $\hat{A}$ 的特征值欧氏距离<sup>[16]</sup>信息实现了变遗忘因子的自适应更新; 在此基础上, 为隔断历史数据的作用, 用有限

记忆方法进一步改进算法, 提出新的Hankel矩阵更新形式, 并给出相关证明. 最后给出仿真实例验证算法的有效性.

## 2 问题描述(Problem formulation)

考虑一类子空间系统模型:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \\ y_k = C_k x_k + D_k u_k + v_k, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $u_k \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^l$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^n$  分别为系统的输入、输出和状态向量;  $v_k \in \mathbb{R}^l$  为测量噪声. 为保证系统可辨识性和收敛性, 假设系统满足  $(A_k, C_k)$  能控,  $(A_k, B_k)$  能观测, 且为最小实现; 外部输入与噪声不相关且满足充分激励条件.

子空间辨识是由下面的Hankel矩阵关系将未来的输入输出数据对投影至过去相应数据对上以估计广义能观测矩阵  $\Gamma_i$ , 并由  $\Gamma_i$  估计系统参数矩阵<sup>[17]</sup>:

$$Y_{0,i,k} = \Gamma_i X_{0,k} + H_i U_{0,i,k} + N_{0,i,k}, \quad i > n, \quad (2)$$

其中:  $U_{0,i,k}$ ,  $Y_{0,i,k}$ ,  $N_{0,i,k}$  分别为输入、输出和噪声Hankel矩阵, 其形式如下(以输入Hankel矩阵为例):

$$U_{0,i,k} = \begin{bmatrix} u_0 & \cdots & u_{k-i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1} & \cdots & u_k \end{bmatrix},$$

$X_{0,k} = [x_0 \cdots x_{k-i+1}]$  为含状态向量的矩阵;  $\Gamma_i$  和  $H_i$  分别为广义能观测矩阵和Toeplitz矩阵, 形式如下:

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}, \quad H_i = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \cdots & D \end{bmatrix}.$$

为提高算法对时变参数的跟踪速度, 本文引入变遗忘因子机制改进子空间辨识算法, 这需要首先确定数据对和遗忘因子. 一般地, 遗忘因子作用于数据有如下形式<sup>[18]</sup>(以输入数据  $u_0 \sim u_4$  为例):

$$\beta_{4 \sim 1} u_0 \quad \beta_{4 \sim 2} u_1 \quad \cdots \quad u_4, \quad (3)$$

其中:  $\beta \in (0, 1)$  为遗忘因子,  $\beta_{4 \sim 1} = \beta_4 \beta_3 \beta_2 \beta_1$ , 其余  $\beta_{i \sim j} (i > j)$  以此类推. 当新增输入数据  $u_5$  时, 新的输入数据序列表示为

$$\beta_5 (\beta_{4 \sim 1} u_0 \quad \beta_{4 \sim 2} u_1 \quad \cdots \quad u_4) \quad u_5. \quad (4)$$

据式(2)Hankel矩阵构造形式, 变遗忘因子作用下的Hankel矩阵(设定维数为3)构造及更新应为

$$\begin{bmatrix} \beta_{4 \sim 1} u_0 & \beta_{4 \sim 2} u_1 & \beta_{4 \sim 3} u_2 \\ \beta_{4 \sim 2} u_1 & \beta_{4 \sim 3} u_2 & \beta_4 u_3 \\ \beta_{4 \sim 3} u_2 & \beta_4 u_3 & u_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \beta_5 \left( \beta_{4 \sim 1} u_0 & \beta_{4 \sim 2} u_1 & \beta_{4 \sim 3} u_2 \right) & \beta_{5 \sim 4} u_3 \\ \beta_5 \left( \beta_{4 \sim 2} u_1 & \beta_{4 \sim 3} u_2 & \beta_4 u_3 \right) & \beta_5 u_4 \\ \beta_5 \left( \beta_{4 \sim 3} u_2 & \beta_4 u_3 & u_4 \right) & u_5 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

由式(5)可知, 变遗忘因子也作用于新增输入向量, 文献[15]忽略了这一点, 这将导致某些数据的权重变大从而导致更新的Hankel矩阵是有偏的.

## 3 有限记忆变遗忘因子子空间算法(Subspace algorithms design under finite-memory variable factor)

### 3.1 Hankel矩阵构造与更新设计(Construction and updating design of Hankel matrices)

#### 1) 初始Hankel矩阵的构造.

若递推前初始数据对  $\{u_k, y_k\} (k = 0, 1, \dots, N)$  已知, 可构造相应初始Hankel矩阵如下<sup>[13]</sup>(以输入Hankel矩阵  $U_{0,i,N}^{\beta_0}$  为例):

$$U_{0,i,N}^{\beta_0} = \begin{bmatrix} \beta_0^{N-1} u_0 & \cdots & \beta_0^{i-1} u_{N-i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_0^{N-i+1} u_{i-1} & \cdots & u_N \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中:  $N$  为  $u$  的列向量初始个数,  $\beta_0 \in (0, 1)$  为初始遗忘因子. 初始输出Hankel矩阵  $Y_{0,i,N}^{\beta_0}$  构造与  $U_{0,i,N}^{\beta_0}$  类似.  $U_{0,i,N}^{\beta_0}$  和  $Y_{0,i,N}^{\beta_0}$  也可化为如下形式:

$$U_{0,i,N}^{\beta_0} = T_m(0) U_{0,i,N} T(0), \quad (7a)$$

$$Y_{0,i,N}^{\beta_0} = T_l(0) Y_{0,i,N} T(0), \quad (7b)$$

式中:

$$T_m(0) = \text{diag}\{\beta_0^{i-1} I_m, \dots, I_m\};$$

$$T_l(0) = \text{diag}\{\beta_0^{i-1} I_l, \dots, I_l\};$$

$$T(0) = \text{diag}\{\beta_0^{N-i+1}, \dots, 1\}.$$

#### 2) Hankel矩阵的更新.

更新Hankel矩阵需先更新观测向量. 同样以输入观测向量为例, 在  $j$  时刻, 根据式(5)形式更新新增输入观测向量

$$\phi_u^{\beta_j}(j) = [\beta_j^{(i-1)} u_{\bar{j}-i+1}^T \quad \beta_j^{(i-2)} u_{\bar{j}-i+2}^T \quad \cdots \quad u_{\bar{j}}^T] = T_m(j) u(\bar{j} - i + 1), \quad (8)$$

其中:

$$u(\bar{j} - i + 1) = \begin{bmatrix} u_{\bar{j}-i+1} \\ \vdots \\ u_{\bar{j}} \end{bmatrix}, \quad \bar{j} = N + j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$T_m(j) = \text{diag}\{\beta_j^{(i-1)} I_m, \beta_j^{(i-2)} I_m, \dots, I_m\},$$

这里:  $\beta_j^{(i-1)} = \underbrace{\beta_j \beta_{j-1} \cdots \beta_1}_{j} \underbrace{\beta_0 \cdots \beta_0}_{i-1}$  表示遗忘因子

序列的前  $i-1$  次乘积,  $\beta_j^{(i-2)}$  为前  $i-2$  次乘积, 其余以此类推. 输出观测向量  $\phi_y^{\beta_j}(j)$  与  $\phi_u^{\beta_j}(j)$  形式相同, 则基于变遗忘因子的Hankel矩阵更新为

$$\begin{bmatrix} U_{0,i,\bar{j}}^{\beta_j} \\ Y_{0,i,\bar{j}}^{\beta_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j U_{0,i,\bar{j}-1}^{\beta_{j-1}} & \phi_u^{\beta_j}(j) \\ \beta_j Y_{0,i,\bar{j}-1}^{\beta_{j-1}} & \phi_y^{\beta_j}(j) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中:  $U_{0,i,\bar{j}}, U_{0,i,\bar{j}-1}$  分别为  $j, j-1$  时刻输入 Hankel 矩阵. 若  $i$  已知, 可将  $U_{0,i,\bar{j}}$  标记为  $U_{\beta_j}(\bar{j})$ , 其初始参数为  $U_{\beta_0}(\bar{0}) = U_{0,i,0}$ .  $Y_{0,i,\bar{j}}, N_{0,i,\bar{j}}$  与  $U_{0,i,\bar{j}}$  标记方法相同.

### 3.2 有限记忆算法设计(Design of finite-memory algorithm)

在遗忘因子机制下, 当数据积累到一定程度之后, 辨识精度将不再随数据的增加而显著提高; 当辨识参数变化时, 历史数据的作用虽按指数级衰减, 但仍将影响算法对时变参数的跟踪速度. 这里采用有限记忆法<sup>[18]</sup>以充分隔断历史数据的作用.

1) 有限记忆的变遗忘因子 OM 算法设计.

在  $j$  时刻 ( $j \leq j_0, j_0$  表示有限记忆起始时刻, 满足  $j_0 > 1$ ), 据式(9)可得以下关系:

$$\begin{bmatrix} U_{\beta_j}(\bar{j}) \\ Y_{\beta_j}(\bar{j}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j U_{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) & \phi_u^{\beta_j}(j) \\ \beta_j Y_{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) & \phi_y^{\beta_j}(j) \end{bmatrix}. \quad (10a)$$

输入输出 Hankel 矩阵更新为  $\bar{j}-i+1$  列, 即递推每增加一步其 Hankel 矩阵增加一列. 将式(10a)左半部进行 QR 分解,

$$\begin{bmatrix} U_{\beta_j}(\bar{j}) \\ Y_{\beta_j}(\bar{j}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}(j) & 0 \\ R_{21}(j) & R_{22}(j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(j) \\ Q_2(j) \end{bmatrix}. \quad (10b)$$

再对  $R_{22}(j)$  进行 SVD 分解以求取广义能观测矩阵估计  $\hat{\Gamma}^{\beta_j}(j)$ :

$$R_{22}(j) = [U_1(j) \ U_2(j)] \begin{bmatrix} \Sigma_1(j) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T(j) \\ V_2^T(j) \end{bmatrix} = U_1(j) \Sigma_1(j) V_1^T(j), \quad (10c)$$

$$\hat{\Gamma}^{\beta_j}(j) = U_1(j) \Sigma_1^{1/2}(j). \quad (10d)$$

在  $j_0$  时刻, 令选择矩阵  $J = [0_{(\bar{j}_0-i) \times 1} \ I_{\bar{j}_0-i}]^T$ , 式(10a)左半部右乘  $J$  得输入输出 Hankel 矩阵的后  $j_0-i$  列, 有

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_{\beta_{j_0}}(\bar{j}_0) \\ \hat{Y}_{\beta_{j_0}}(\bar{j}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{\beta_{j_0}}(\bar{j}_0) \\ Y_{\beta_{j_0}}(\bar{j}_0) \end{bmatrix} \times J = \begin{bmatrix} \beta_{j_0} U_{\beta_{j_0-1}}(\bar{j}_0-1) & \phi_u^{\beta_{j_0}}(j_0) \\ \beta_{j_0} Y_{\beta_{j_0-1}}(\bar{j}_0-1) & \phi_y^{\beta_{j_0}}(j_0) \end{bmatrix} \times J, \quad (10e)$$

其中  $\hat{U}(\cdot)$  表示限定记忆后的输入 Hankel 矩阵. 在  $j(j > j_0)$  时刻, 其 Hankel 矩阵关系为

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_{\beta_j}(\bar{j}) \\ \hat{Y}_{\beta_j}(\bar{j}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j \hat{U}_{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) & \phi_u^{\beta_j}(j) \\ \beta_j \hat{Y}_{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) & \phi_y^{\beta_j}(j) \end{bmatrix} \times J. \quad (10f)$$

因为限定记忆后输入输出 Hankel 矩阵每步都乘以  $J$ , 所以其列数保持为  $j_0-i$  列. 将式(10f)按式(10b)-(10d)方式求取  $\hat{\Gamma}^{\beta_j}(j)$ .

2) 有限记忆变遗忘因子的 PI/PO 算法设计.

PI/PO 算法的输入输出 Hankel 矩阵包括过去和将

来的形式<sup>[15]</sup>. 以初始输入 Hankel 矩阵为例, 令  $J_1 = [I_{\bar{1}-2i} \ 0_{(\bar{1}-2i) \times i}]^T$ ,  $J_2 = [0_{(\bar{1}-2i) \times i} \ I_{\bar{1}-2i}]^T$ , 则其过去与将来的形式为

$$U_p^{\beta_0}(\bar{0}) = U_{\beta_0}(\bar{0}) \times J_1, \quad (11a)$$

$$U_f^{\beta_0}(\bar{0}) = U_{\beta_0}(\bar{0}) \times J_2. \quad (11b)$$

过去与将来的初始输出 Hankel 矩阵  $Y_p^{\beta_0}(\bar{0}), Y_f^{\beta_0}(\bar{0})$  获取方式同  $U_p^{\beta_0}(\bar{0}), U_f^{\beta_0}(\bar{0})$ , 则 PI/PO 算法相应的初始 Hankel 矩阵列数为  $\bar{1}-2i$ .

**定理 1** 假设过去的输入输出 Hankel 矩阵  $W_p^T = [U_p^T \ Y_p^T]$  已知,  $N$  确定, 并在  $j_0(j_0 > 1)$  时刻开始有限记忆, 令  $J_3 = [0_{(\bar{j}_0-2i) \times 1} \ I_{\bar{j}_0-2i}]^T$ , 则在  $j(j \geq j_0)$  时刻, 基于有限记忆变遗忘因子 PI/PO 算法的相应 Hankel 矩阵更新形式为

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_f^{\beta_j}(\bar{j}) \\ \hat{W}_p^{\beta_j}(\bar{j}) \\ \hat{Y}_f^{\beta_j}(\bar{j}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j \hat{U}_f^{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) & \phi_u^{\beta_j}(j) \\ \beta_j \hat{W}_p^{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) & \phi_{wp}^{\beta_j}(j) \\ \beta_j \hat{Y}_f^{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) & \phi_y^{\beta_j}(j) \end{bmatrix} \times J_3, \quad (12)$$

式中:

$$\phi_{wp}^{\beta_j}(j) = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{up}^{\beta_j}(j) \\ \hat{\phi}_{yp}^{\beta_j}(j) \end{bmatrix} = \beta_j \begin{bmatrix} \hat{U}_f^{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) \\ \hat{Y}_f^{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) \end{bmatrix} e_{\bar{j}_0-2i}^{\bar{j}_0-3i+1},$$

这里  $e_{\bar{j}_0-2i}^{\bar{j}_0-3i+1}$  为  $\bar{j}_0-2i$  维列向量, 其第  $\bar{j}_0-3i+1$  的元素为 1, 其余元素为零.

**证** 不考虑输入 Hankel 矩阵过去和将来形式, 在  $j(j \leq j_0)$  时刻, 据式(9), 下列等式成立:

$$U_{\beta_j}(\bar{j}) = [\beta_j U_{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) \ \phi_u^{\beta_j}(\bar{j})]. \quad (13a)$$

定义

$$J_1(j) = [I_{\bar{j}-2i} \ 0_{(\bar{j}-2i) \times i}]^T,$$

$$J_2(j) = [0_{(\bar{j}-2i) \times i} \ I_{\bar{j}-2i}]^T,$$

此刻  $U_p^{\beta_j}(\bar{j}), U_f^{\beta_j}(\bar{j})$  与  $U_{\beta_j}(\bar{j})$  关系如下:

$$U_p^{\beta_j}(\bar{j}) = U_{\beta_j}(\bar{j}) \times J_1(j), \quad (13b)$$

$$U_f^{\beta_j}(\bar{j}) = U_{\beta_j}(\bar{j}) \times J_2(j). \quad (13c)$$

$U_f^{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1)$  新增的输入观测向量为  $\phi_u^{\beta_j}(\bar{j})$ ; 而  $U_p^{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1)$  新增的输入观测向量为整个  $U_f^{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1)$  中的第  $\bar{j}-2i+1$  列向量与  $\beta_j$  乘积. 定义单位向量  $e_{\bar{j}-2i}^{\bar{j}-3i+1}$ , 其中  $\bar{j}-2i$  表示单位向量的维数,  $\bar{j}-3i+1$  表示第  $\bar{j}-3i+1$  的元素为 1, 其余元素为 0, 则输入 Hankel 矩阵的更新关系如下:

$$\begin{bmatrix} U_f^{\beta_j}(\bar{j}) \\ U_p^{\beta_j}(\bar{j}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j U_f^{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) & \phi_u^{\beta_j}(j) \\ \beta_j U_p^{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) & \phi_{up}^{\beta_j}(j) \end{bmatrix}, \quad (13d)$$

式中  $\phi_{up}^{\beta_j}(j) = \beta_j U_f^{\beta_{j-1}}(\bar{j}-1) e_{\bar{j}-2i}^{\bar{j}-3i+1}$ .

同式(10a), 递推每增加一步其输入 Hankel 矩阵增加一列. 在  $j_0$  时刻开始限定记忆, 则上式左半部右乘

得输入Hankel矩阵的后 $j_0 - 2i$ 列矩阵,有

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_f^{\beta_{j_0}}(\bar{j}_0) \\ \hat{U}_p^{\beta_{j_0}}(\bar{j}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_f^{\beta_{j_0}}(\bar{j}_0) \\ U_p^{\beta_{j_0}}(\bar{j}_0) \end{bmatrix} \times J_3 = \begin{bmatrix} \beta_{j_0} U_f^{\beta_{j_0-1}}(\bar{j}_0 - 1) & \phi_{u}^{\beta_{j_0}}(j_0) \\ \beta_{j_0} U_p^{\beta_{j_0-1}}(\bar{j} - 1) & \phi_{up}^{\beta_{j_0}}(j_0) \end{bmatrix} \times J_3. \quad (13e)$$

式中 $\phi_{up}^{\beta_{j_0}}(j_0) = \beta_{j_0} U_f^{\beta_{j_0-1}}(\bar{j}_0 - 1) e_{j_0-2i}^{\bar{j}_0-3i+1}$ .

在 $j(j > j_0)$ 时刻,因限定记忆后式(13e)的输入Hankel矩阵每步都乘以 $J_3$ ,所以其列数也保持不变,则 $e_{j-2i}^{\bar{j}-3i+1}$ 退化为 $e_{j_0-2i}^{\bar{j}_0-3i+1}$ ,即有

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_f^{\beta_j}(\bar{j}) \\ \hat{U}_p^{\beta_j}(\bar{j}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j \hat{U}_f^{\beta_{j-1}}(\bar{j} - 1) & \phi_{u}^{\beta_j}(j) \\ \beta_j \hat{U}_p^{\beta_{j-1}}(\bar{j} - 1) & \phi_{up}^{\beta_j}(j) \end{bmatrix} \times J_3. \quad (13f)$$

同理可得 $\hat{Y}_p^{\beta_j}(\bar{j})$ 和 $\hat{Y}_f^{\beta_j}(\bar{j})$ 关系式为

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_p^{\beta_j}(\bar{j}) \\ \hat{Y}_f^{\beta_j}(\bar{j}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j \hat{Y}_p^{\beta_{j-1}}(\bar{j} - 1) & \hat{\phi}_{yp}^{\beta_j}(j) \\ \beta_j \hat{Y}_f^{\beta_{j-1}}(\bar{j} - 1) & \hat{\phi}_y^{\beta_j}(j) \end{bmatrix} \times J_3. \quad (13g)$$

限定记忆后PI/PO算法的Hankel矩阵更新形式可由式(13f)和(13g)相结合获得. 证毕.

新的PI/PO算法Hankel矩阵在限定记忆前后分别按式(13d)(12)方式进行更新,更新后的Hankel矩阵进行RQ分解,并对其中的 $[R_{42}(j) \ R_{43}(j)]$ 进行SVD分解得到 $\hat{T}^{\beta_j}(j)$ . 基于有限记忆变遗忘因子的PI算法更新形式可按上述方法获得.

### 3.3 系统矩阵的估计(System matrices estimation)

由上述两部分内容知,遗忘因子作用于 $\hat{T}^{\beta_j}(j)$ ,进而也会作用于参数矩阵,文献[15]在参数矩阵估计的步骤中没有考虑该问题.在固定遗忘因子机制下,系统输入输出关系如下<sup>[13]</sup>:

$$T_l Y_{1,i,N} T = \underbrace{T_l \Gamma_i}_{\Gamma_i^\beta} \underbrace{X_{1,i,N} T}_{X_N^\beta} + \underbrace{T_l H_i T_m^{-1} T_m U_{1,i,N} T}_{H_i^\beta} + T_l N_{1,i,N} T, \quad (14)$$

其中 $\Gamma_i^\beta = [(\beta^{i-1} C)^T (\beta^{i-2} C A)^T \dots (C A^{i-1})^T]^T$ . 用下式计算估计 $\hat{A}(j)$ 和 $\hat{C}(j)$ :

$$\hat{C}(j) = \hat{T}^\beta(j)(1:l, 1:n)/\beta^{i-1}, \quad (15a)$$

$$\hat{A}(j) = \beta(\hat{T}^\beta(j)(1:l(i-1), 1:n))^\dagger \times \hat{T}^\beta(j)(l+1:li, 1:n), \quad (15b)$$

其中 $(\cdot)^\dagger$ 表示矩阵伪逆.

基于变遗忘因子机制的输入输出Hankel矩阵不能直接用因子矩阵和数据矩阵乘积描述,这里按下式进行近似处理:

$$U_{\beta_j}(\bar{j}) \approx T_m(j)U(\bar{j})T(j), \quad (16a)$$

$$Y_{\beta_j}(\bar{j}) \approx T_l(j)Y(\bar{j})T(j), \quad (16b)$$

其中:

$$T(j) = \begin{cases} \text{diag}\{\beta_j^i T(j-1), 1\}, & j < j_0; \\ \text{diag}(\beta_j^i T(j-1)(2:\bar{j}_0-i, 2:\bar{j}_0-i), 1), & j \geq j_0, \end{cases}$$

$\beta_j^i = \underbrace{\beta_j \dots \beta_1}_{\text{choose } i} \beta_0 \dots \beta_0$ 表示变遗忘因子组成序列由左至右的第 $i$ 个遗忘因子. 据式(14)和式(16),  $\Gamma^{\beta_j}(j)$ 可取近似关系

$$\Gamma^{\beta_j}(j) \approx T_l(j) \times [C^T (CA)^T \dots (CA^{i-1})^T]^T. \quad (17)$$

矩阵估计 $\hat{C}(j)$ 可直接从 $\hat{T}^{\beta_j}(j)$ 中提取

$$\hat{C}(j) = \hat{T}^{\beta_j}(j)(1:l, 1:n)/\beta_j^{(i-1)}, \quad (18)$$

并由式(17)可得

$$\begin{aligned} \hat{T}^{\beta_j}(j)(1:l(i-1), 1:n)\hat{A}(j) = \\ M(j) \times \hat{T}^{\beta_j}(j)(l+1:li, 1:n), \end{aligned} \quad (19)$$

这里

$$M(j) = \text{diag}\{\beta_j^{(i-1)} I_l, \dots, \beta_j^{(1)} I_l\} \times (\text{diag}\{\beta_j^{(i-2)} I_l, \dots, I_l\})^{-1}. \quad (20)$$

矩阵估计 $\hat{A}(j)$ 可由式(19)和式(20)求得

$$\hat{A}(j) = (\hat{T}_1^{\beta_j}(j))^\dagger \times M(j) \times \hat{T}_2^{\beta_j}(j), \quad (21)$$

其中:

$$\hat{T}_1^{\beta_j}(j) = \hat{T}^{\beta_j}(j)(1:l(i-1), 1:n),$$

$$\hat{T}_2^{\beta_j}(j) = \hat{T}^{\beta_j}(j)(l+1:li, 1:n).$$

当 $\beta$ 为固定值 $\beta_0$ 时,  $M(j)$ 退化为 $\beta_0$ . 为从矩阵 $H_{\beta_j}(j)$ 中获得矩阵 $B$ 和 $D$ 的估计值,需从式(14)中消去 $\hat{T}^{\beta_j}(j)X_{\beta_j}(\bar{j})$ 项. 式(14)两边左乘 $\Pi_{\Gamma^\perp}(j)$ 右乘 $U_{\beta_j}(\bar{j})$ 可得

$$\begin{aligned} \Pi_{\Gamma^\perp}(j)Y_{\beta_j}(\bar{j})(U_{\beta_j}(\bar{j}))^\dagger = \\ \Pi_{\Gamma^\perp}(j)H_{\beta_j}(j) + \Pi_{\Gamma^\perp}(j)N_{\beta_j}(\bar{j})(U_{\beta_j}(\bar{j}))^\dagger, \end{aligned} \quad (22)$$

这里 $\Pi_{\Gamma^\perp}(j)$ 为 $\hat{T}^{\beta_j}(j)$ 的正交补. 求取 $\hat{B}$ 和 $\hat{D}$ 的余下步骤同文献[13].

### 3.4 遗忘因子的自适应更新设计(Self-adaptive updating design of forgetting factor)

一般地,对快时变参数选择较小遗忘因子,对慢时变参数选择较大遗忘因子. 基于该思想,本文利用区间 $[(k-1)p+1, kp]$ 内系统矩阵估计 $\hat{A}$ 的特征值空间欧氏距离最大值和最小值的距离差来判断参数变化的快慢. 这样即利用参数矩阵估计的内部信息实现遗忘因子的自适应更新,又避免因频繁更新变遗忘因子致使算法辨识精度变差. 距离差及遗忘因子更新的计算步骤如下:

$$d(k) = \sqrt{\|d_{\max}(k) - d_{\min}(k)\|_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda_i^{\max} - \lambda_i^{\min})^2}, \quad (23a)$$

$$\beta_j = \max(\beta_{\min}, (1 - c \times \frac{d(k)}{n}), \beta_{\max}), \quad (23b)$$

其中:

$$d_{\max}(k) = \max(\text{eig}(A[(k-1)p+1, kp])),$$

$$d_{\min}(k) = \min(\text{eig}(A[(k-1)p+1, kp])),$$

这里:  $p$ 表示固定步长,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\lambda_i$ 表示估计 $\hat{A}$ 的第 $i$ 个特征值;  $c$ 为弱化因子,  $\beta_{\max}, \beta_{\min}$ 分别为遗忘因子的上下限.

### 4 数值仿真(Numerical simulation)

#### 4.1 改进算法与传统算法的对比仿真(Simulation between modified and traditional algorithms)

仿真的目的是比较改进的算法和传统算法在参数无变化阶段以及参数变化阶段的跟踪性能. 以PI/PO算法为例, 建立慢变模型, 当 $t < 2000$ 时模型参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.4 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, B = [0 \ 1]^T, C = [1 \ 0], D = 0.$$

当 $t \geq 2000$ 时, 系统矩阵 $A$ 的参数如下, 其他参数保持不变:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 - 0.0001(t - 2000) & -0.4 \\ 0 & 0.4 + 0.0001(t - 2000) \end{bmatrix}.$$

仿真中采用方差为1的零均值白噪声作为激励信号, 由四阶Butterworth滤波器产生, 截止频率为0.8倍奈奎斯特频率, 输出被不相关的零均值白噪声污染, 信噪比为20 dB, 初始遗忘因子 $\beta_0 = 0.999$ , 固定尺度为5. 假设 $N = 1000$ , 并设改进算法在时刻就进行限定记忆, 仿真结果如图1所示.

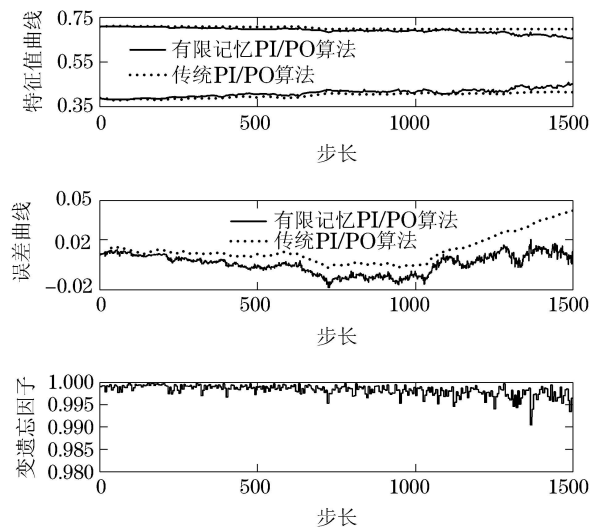


图1 慢变模型不同方法辨识参数曲线  
Fig. 1 Identified parameters curves for slowly time-varying system under different methods

仿真图1表明: 在参数无变化阶段, 有限记忆变遗忘因子的PI/PO算法比传统方法跟踪速度快, 但随着数据对的增加, 传统方法的辨识精度不断提高, 而改进算法由于采用限定记忆方法牺牲了一定的辨识精度; 当参数发生缓慢变化时, 传统算法随着数据的积累误差不断增大, 而改进算法则较好地跟踪了参数变化. 这表明新的算法较快地跟踪了慢时变系统参数的变化.

#### 4.2 限定记忆步长的对比仿真(Simulation based on different finite-memory step)

仿真目的是比较限定记忆步长对新的子空间算法辨识速度及辨识精度的影响. 建立参数突变模型, 系统参数 $A$ 如下所示, 其他参数同4.1节部分:

$$A = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0.7 & -0.4 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, & t < 2000, \\ \begin{bmatrix} 0.6 & -0.4 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, & t \geq 2000. \end{cases}$$

设 $N = 100$ , 其他条件同4.1节仿真, 分别取限定记忆步长为400, 700, 900进行系统辨识, 仿真结果如图2所示(以特征值0.7 ~ 0.6辨识为例).

仿真图2表明: 在参数无变化阶段, 限定记忆步长为400的误差变化幅度最大, 随着限定记忆步长的增加, 算法辨识误差变化幅度变小, 这说明限定记忆步长越小辨识精度越易受噪声干扰; 当系统参数发生突变时, 步长为400的跟踪参数变化最快, 随着限定记忆步长的增加, 算法的跟踪速度变慢, 这说明限定记忆步长越短算法的跟踪速度越快.

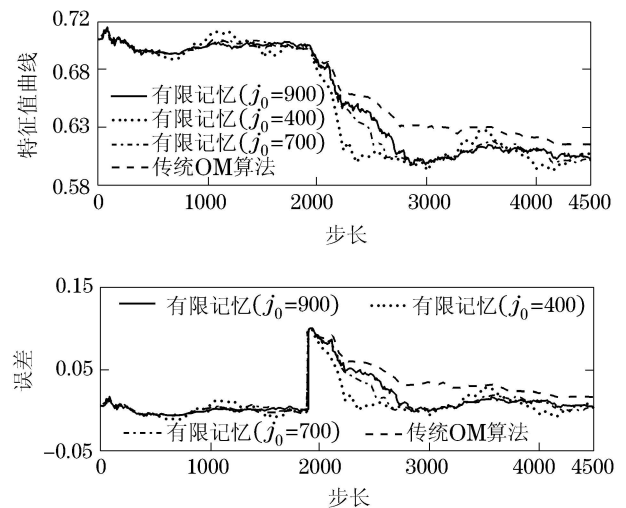


图2 跳变模型不同方法辨识参数曲线  
Fig. 2 Identified parameters curves for time-varying with abrupt change system under different methods

### 5 结论(Conclusion)

针对传统子空间辨识算法对时变参数跟踪速度

慢的问题, 基于遗忘因子作用于数据的一般更新形式, 提出一种自适应遗忘因子的子空间辨识算法. 该算法运用矩阵估计的内部信息实现了遗忘因子的自适应更新; 在此基础上, 为隔断历史数据的作用, 用有限记忆法进一步改进算法, 提出新的Hankel矩阵的更新形式, 并给出相关证明. 证明过程及数值仿真结果均表明了改进算法的正确性和有效性.

### 参考文献(References):

- [1] VERHAEGEN M, DEPRETTERE E. A fast, recursive MIMO state space model identification algorithm [C] // *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 1991: 1349 – 1354.
- [2] CHO Y, KAILATH T. Fast subspace-based identification: an instrumental variable approach [J]. *Automatica*, 1995, 31(6): 903 – 905.
- [3] 杨华, 李少远. 一种完全数据驱动的子空间辨识与鲁棒预测控制器设计 [J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(5): 732 – 736.  
(YANG Hua, LI Shaoyuan. A novel robust predictive controller design based on data-driven subspace identification [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 732 – 736.)
- [4] VAN W J W, VERHAEGEN M. Subspace identification of bilinear and LPV systems for open and closed-loop data [J]. *Automatica*, 2009, 45(2): 372 – 381.
- [5] OKU H, KIMURA H. A recursive 4SID from the input-output point of view [J]. *Asian Journal of Control*, 1999, 1(4): 258 – 269.
- [6] OKU H, KIMURA H. Recursive 4SID algorithms using gradient type subspace tracking [J]. *Automatica*, 2002, 38(6): 1035 – 1043.
- [7] 张贤达. 矩阵分析与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 144 – 145.  
(ZHANG Xianda. *Matrix Analysis and Application* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 144 – 145.)
- [8] VERHAEGEN M, DEWILDE P. Subspace model identification, Part I: output error state space model identification class of algorithms [J]. *International Journal of Control*, 1992, 56(5): 1187 – 1210.
- [9] VERHAEGEN M. Subspace model identification, part 3: analysis of the ordinary output error state space model identification algorithm [J]. *International Journal of Control*, 1993, 58(3): 555 – 586.
- [10] VERHAEGEN M. Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form from input output data [J]. *Automatica*, 1994, 30(1): 61 – 74.
- [11] CHOU C T, VERHAEGEN M. Subspace algorithms for the identification of multivariable dynamic error-in-variables states space models [J]. *Automatica*, 1997, 33(10): 1857 – 1869.
- [12] LOVERA M, GUSTAFSSON T, VERHAEGEN M. Recursive subspace identification of linear and non-linear Wiener state-space models [J]. *Automatica*, 2000, 36(11): 1639 – 1650.
- [13] ZHANG C, BITMEAD R. Subspace system identification for training-based MIMO channel estimation [J]. *Automatica*, 2005, 41(9): 1623 – 1632.
- [14] 杨华, 李少远. 一种新的基于遗忘因子的递推子空间算法 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(1): 69 – 72.  
(YANG Hua, LI Shaoyuan. A novel recursive MOESP subspace identification algorithm based on forgetting factor [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(1): 69 – 72.)
- [15] MERCÈRE G, BAKO L, LECOEUICHE S. Propagator-based methods for recursive subspace model identification [J]. *Signal Processing*, 2008, 88(3): 468 – 491.
- [16] BONTEMPI G, BIRATTARI M, BERSINI H. Lazy learning for local modeling and control design [J]. *International Journal of Control*, 1999, 72(7/8): 643 – 658.
- [17] VAN OVERSCHEE P, DE MOOR B. N4sid: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems [J]. *Automatica*, 1994, 30(1): 75 – 93.
- [18] 邓自立. 信息融合滤波理论及其应用 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2007: 37 – 45.  
(DENG Zili. *Information Fusion Filtering Theory with Applications* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2007: 37 – 45.)

### 作者简介:

**黄金峰** (1982–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为测试计量仪器及技术, E-mail: star3618@126.com;

**张合新** (1965–), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为导航、制导与控制以及智能化仪器仪表技术等方面, E-mail: hexin\_xa@tom.com;

**胡友涛** (1983–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为复杂系统故障预报与可靠性评估, E-mail: hujintao307@163.com;

**张植** (1982–), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为测试计量仪器及技术, E-mail: zhang\_7253347@163.com.