

## 具有通信时延的跟随者-多领导者聚集控制

刘学良<sup>1</sup>, 胥布工<sup>1</sup>, 谢立华<sup>1,2</sup>

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640; 2. 南洋理工大学 电子与电气工程学院, 639798, 新加坡)

**摘要:** 本文考虑了一个连续时间多智能体系统跟随者-多领导者聚集控制问题. 假设智能体之间的通信频道是有向的且存在时延. 基于邻居原理, 提出了一个新的跟踪协议. 应用线性矩阵不等式技术和Lyapunov方法得到所有的跟随者都能够群集于由多个领导者组成的凸多边形区域的充分条件. 此外, 并将文中结果推广到通信频道含有时延和噪声情形. 最后, 数值仿真验证了文中理论结果的有效性和正确性.

**关键词:** 多智能体系统; 领导者-跟随者; 协议; 凸多边形区域; 均方指数稳定

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Multileader set aggregation control of multi-agent systems with communication delays

LIU Xue-liang<sup>1</sup>, XU Bu-gong<sup>1</sup>, XIE Li-hua<sup>1,2</sup>

(1. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China;

2. School of Electronic and Electrical Engineering, Nanyang Technological University, 639798, Singapore)

**Abstract:** This paper considers a set aggregation control problem for continuous-time multi-agent systems guided by multiple leaders. It is assumed that each follower-agent can measure the relative states of its neighbors in a time-delay and directed communication channels. A neighbor-based control rule is designed to realize local control strategies for these continuous-time agents. By Lyapunov method and the linear matrix inequality technique, we derive sufficient conditions for all follower-agents to aggregate in a polytope region formed by the leaders. In addition, this result is extended to a more general case with time-delay and noise perturbation. Numerical examples are given to validate the correctness and effectiveness of the theoretical results.

**Key words:** multi-agent systems; leader-follower; protocol; polytope region; mean-square exponential stability

### 1 引言(Introduction)

近10年来, 多主体或多智能体系统协调控制问题已持续成为国内外不同学科领域研究者的关注热点. 这主要是因为协调控制问题有着广泛的应用背景, 如: 多机器人编队控制<sup>[1-2]</sup>、多智能体群集运动<sup>[3-4]</sup>、分布式传感器网络<sup>[5-7]</sup>、一致性<sup>[8-10]</sup>、分布式计算<sup>[11]</sup>、耦合振子的同步<sup>[12]</sup>等等, 相关的研究进展可见综述论文<sup>[13-15]</sup>. 这些应用有着共同的特点: 单个智能体缺乏对整个智能体系统的全局信息的了解, 通过与邻居交换信息来完成一定的全局行为.

作为多智能体系统协调控制中基本问题之一, 聚集问题指空间分布的几个个体或者机器人, 在没有全局通信的情况下, 聚集于一个期望的区域内. 在多智能体协调控制中, 协调的目标可能是一个, 也可能是多个目标组成的一个集合. 大多数领导者-跟踪者研究只考虑一个领导者或者一个虚拟的领导者情形. 如果将多智能体组协调的多个目标任务看成一

个虚拟的领导者, 即将多个领导者集合看成一个广义的领导者个体, 这些多领导者组成的集合可以是一队生物群体, 一个食物区, 或者某一期望的目标. 比如一种生物群体对另一种生物群体的捕食, 生物群体之间相互协作筑巢等. 对于集合聚集研究, 国内外学者已得到了许多有价值的结果. Hu等<sup>[16]</sup>讨论了一个简单的连续时间线性多智能体系统的多领导者静态集合聚集问题, 假定这些领导者的状态是静止的, 跟踪者之间的通信是无向的, 只要多领导者与跟踪者组成的通信拓扑图是连接的, 则跟踪者都能够聚集于领导者组成的一个凸多边形区域内. Shi等<sup>[17]</sup>分析了聚集问题中智能体动态是非线性和变化的信息交换拓扑情形. Ji等<sup>[18]</sup>提出了许多动态或静态的聚集协议, 并研究了在网络拓扑固定和变化的聚集问题, 同时, 兼顾考虑避免个体之间的碰撞. 进一步地, Cao等<sup>[19]</sup>研究了聚集控制的收敛速度问题. 但是, 对于网络存在通信时延、噪声、丢包等

聚集问题很少研究。

一方面,对于实际的通信网络,在信息的发送、传输和接收过程中不可避免存在时延。当存在通信时延的时候,普通的协调控制算法可能失效<sup>[20]</sup>;另一方面,因为网络传输时延、噪声、丢包、通信带宽受限等原因,智能体之间不能获得精确的邻居状态信息,可能导致整个多智能体实现不了期望的整体行为模式。因此,研究具有网络通信时延和随机噪声的多智体系统聚集控制问题是非常有意义的。

本文基于文献[16]提出的连续时间多智能体系统的基础上,研究跟随者从它的邻居接收到的信息含有时延的情况,得到了跟随者能够聚集于多领导者组成的一个凸多边形区域的充分条件。此外,还研究了通信频道含有时延和噪声干扰情形。

**符号说明:**任意两个相同维数的对称矩阵 $A$ 和 $B$ , $A \geq B$ ( $A > B$ ,  $A < B$ ,  $A \leq B$ )表示 $X - Y$ 是一个半正定(正定,负定,半负定)矩阵。 $A \otimes B$ 表示矩阵 $A$ 和 $B$ 的直积。 $I_N$ 表示一个 $N \times N$ 的单位矩阵。 $\mathbf{1}_N$ 代表每一个元素都是1的 $N$ 维列向量。 $A^T$ ,  $\|A\|$ 和 $\rho(A)$ 分别表示矩阵 $A$ 的转置、范数和谱半径。 $\text{diag}\{A, B\}$ 是一个以 $A$ 和 $B$ 为对角元素的分块对角矩阵。 $\mathbb{R}^N$ 和 $\mathbb{R}^{N \times N}$ 分别表示 $N$ 维向量空间和 $N \times N$ 实矩阵集合。若 $S \subset \mathbb{R}^N$ ,  $\forall \xi, \zeta \in S$ 和 $0 < \gamma < 1$ 有 $\gamma\xi + (1 - \gamma)\zeta \in S$ 成立,则称 $S$ 是凸的。如果存在非负常数 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ 且满足 $\sum_{i=1}^N \gamma_i = 1$ ,则称向量和 $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_N x_N$ 是向量 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 的一个凸组合,记为 $\text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ 。对于非空集合 $E \subset \mathbb{R}^{N \times N}$ ,任意一点 $x$ 到它的欧氏距离定义为 $d_E(x) = \inf_{y \in E} \|x - y\|$ 。

## 2 预备知识(Preliminaries)

假设 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 为一个加权有向图,其中: $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 是顶点集合,顶点 $i$ 表示第 $i$ 个智能体, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 是边集合, $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是加权邻接矩阵。图 $\mathcal{G}$ 的一条有向边 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ 表示智能体 $i$ 能够接收到智能体 $j$ 发来的信息。智能体 $j$ 是智能体 $i$ 的一个邻居当且仅当智能体 $i$ 能够接收到智能体 $j$ 发送的信息,反之不真。将智能体 $i$ 的邻居集合记为 $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$ 。邻接矩阵 $\mathcal{A}$ 含有非负元素且对角线的元素为0,  $a_{ij} > 0 \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ , 否则 $a_{ij} = 0$ 。一列有序边 $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)$ 叫做顶点 $v_1$ 到 $v_k$ 的有向路径。有向树是一个有向图,除了一个顶点没有邻居外其余的每一个顶点只有一个邻居。图 $\mathcal{G}$ 的一个有向生成树它是一个有向树且顶点集合为 $\mathcal{V}$ ,边集合是 $\mathcal{E}$ 的一个子集。顶点 $i$ 的入度和出度分别定义为 $\text{deg}_{\text{in}}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 和 $\text{deg}_{\text{out}}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ 。图 $\mathcal{G}$ 是一

个平衡图当且仅当每个顶点的入度和出度相等,即 $\text{deg}_{\text{in}}(i) = \text{deg}_{\text{out}}(i), \forall i = 1, 2, \dots, N$ 。定义图 $\mathcal{G}$ 的拉氏矩阵 $\mathcal{L} = [l_{ij}]$ :

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \neq i, \\ \sum_{j=1}^N a_{ij}, & j = i. \end{cases}$$

## 3 系统模型(System model)

考虑一个由 $N$ 个跟随者和 $m$ 个领导者组成的多智能体网络,不妨将这些跟随者记为 $1, 2, \dots, m$ ,领导者记为 $N+1, N+2, \dots, N+m$ 。用一个有向图 $\mathcal{G}$ 来模拟这 $N+m$ 个智能体之间的通信关系, $N$ 个跟随者之间的通信拓扑记为 $\bar{\mathcal{G}}$ 。假设这些领导者的位置静止的,记它们的状态为 $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^n, k = N+1, N+2, \dots, N+m$ 。为了研究方便,本文将这 $m$ 个领导者组成的多边形区域看成一个广义的领导者。在这里,图 $\mathcal{G}$ 有一个有向生成树意味着对任意的跟随者 $i$ ( $i = 1, 2, \dots, N$ )都存在一条由广义领导者到 $i$ 的有向路径。

跟随者 $i$ 的动态表示如下:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中: $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 代表跟随者 $i$ 的位置状态, $u_i(t) \in \mathbb{R}^n$ 是控制输入。所有跟随者的初始状态 $x_i(0)$ 为已知常数。为了解决聚集问题,本文提出分布式协议:

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)) + \sum_{k=N+1}^{N+m} b_k^i(\bar{x}_k - x_i(t - \tau)), \quad (2)$$

其中: $b_k^i \geq 0, b_k^i > 0$ 当且仅当领导者 $k$ 是跟随者 $i$ 的邻居。令 $\mathcal{B}_k \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示以非负元素 $b_k^i$ ( $i = 1, 2, \dots, N$ )为对角线的对角矩阵, $\mathcal{B} = [\mathcal{B}_{N+1} \quad \mathcal{B}_{N+2} \quad \dots \quad \mathcal{B}_{N+m}]$ 。假设(2)中的时滞满足 $\tau \leq h$ 。

将协议(2)代入系统(1)并写成多变量形式得

$$\dot{x}(t) = -(\mathcal{H} \otimes I_n)x(t - \tau) + [\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n \bar{x}, \quad (3)$$

其中: $x(t) = [x_1^T(t) \quad x_2^T(t) \quad \dots \quad x_N^T(t)]^T, \bar{x} = [\bar{x}_{N+1}^T \quad \bar{x}_{N+2}^T \quad \dots \quad \bar{x}_{N+m}^T]^T, \mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{B}(\mathbf{1}_m \otimes I_N)$ 。

本文的目标是使 $N$ 个跟随者都能够聚集于 $m$ 个领导者组成的凸形区域,当 $t \rightarrow +\infty$ ,对任意的 $x_i$ ( $i = 1, 2, \dots, N$ )都能够表示成 $m$ 个领导者的凸组合,即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d_{\Theta}(x_i(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

其中 $\Theta = \{\mu | \mu \in \text{co}\{\bar{x}_{N+1}, \bar{x}_{N+2}, \dots, \bar{x}_{N+m}\}\}$ 。

为了得到文中的主要结果,下面将介绍两个引理。

**引理 1<sup>[21]</sup>(Schur引理)** 对任意给定的对称矩阵 $S, S = [S_{ij}], S_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}, S_{12} \in \mathbb{R}^{r \times (N-r)}, S_{22} \in \mathbb{R}^{(N-r) \times (N-r)}$ ;  $S < 0$ 当且仅当 $S_{11} < 0, S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{21}^T < 0$ 或者 $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^T < 0$ 。

**引理 2** 如果图 $\mathcal{G}$ 有一个有向生成树, 则 $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{B}(\mathbf{1}_m \otimes I_N)$ 的特征根全位于右半平面.

此引理可以直接根据文献[22]的引理4得到.

**4 主要结果(Main results)**

**定理 1** 假设智能体之间的通信只有时延且连接拓扑 $\mathcal{G}$ 有一个有向生成树, 则存在适当的常数 $h > 0$ 使得所有的跟随者能够最终聚集于 $m$ 个领导者组成的一个凸多边形区域的充分条件是

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_1 & hP\mathcal{H} & 0 \\ h\mathcal{H}^T P - hR & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q + h\mathcal{H}^T R\mathcal{H} \end{bmatrix} < 0, \quad (5)$$

其中:  $\Xi_1 = -P\mathcal{H} - \mathcal{H}^T P + Q, P, Q, R \in \mathbb{R}^{N \times N}$  为正定矩阵.

**证** 由引理2及定理1的条件可知,  $\mathcal{H}$ 的特征根具有正实部, 故 $\mathcal{H}$ 可逆. 令 $\delta(t) = x(t) - [\mathcal{H}^{-1}\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n \bar{x}$ . 利用式(3), 本文得到

$$\dot{\delta}(t) = -(\mathcal{H} \otimes I_n)\delta(t - \tau). \quad (6)$$

构造如下的Lyapunov候选函数:

$$V(t) = \delta^T(t)(P \otimes I_n)\delta(t) + \int_{t-\tau}^t \delta^T(s)(Q \otimes I_n)\delta(s)ds + \int_{-\tau}^0 \int_{t+u}^t \delta^T(s)(R \otimes I_n)\dot{\delta}(s)dsdu. \quad (7)$$

沿着系统(6)的轨迹求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -2\delta^T(t)(P\mathcal{H} \otimes I_n)\delta(t - \tau) + \\ & \delta^T(t)(Q \otimes I_n)\delta(t) - \\ & \delta^T(t - \tau)(Q \otimes I_n)\delta(t - \tau) + \\ & h\dot{\delta}^T(t)(R \otimes I_n)\dot{\delta}(t) - \\ & \int_{t-\tau}^t \delta^T(s)(R \otimes I_n)\dot{\delta}(s)ds. \end{aligned} \quad (8)$$

事实上, 对任意的向量 $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$ 和正定矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$$2\xi^T \zeta \leq \xi^T M \xi + \zeta^T M^{-1} \zeta \quad (9)$$

成立. 从而有

$$\begin{aligned} & -2\delta^T(t)(P\mathcal{H} \otimes I_n)\delta(t - \tau) = \\ & -\delta^T(t)[(P\mathcal{H} + \mathcal{H}^T P) \otimes I_n]\delta(t) + \\ & \int_{t-\tau}^t 2[(\mathcal{H}^T P^T \otimes I_n)\delta(t)]^T \dot{\delta}(s)ds \leq \\ & -\delta^T(t)[(P\mathcal{H} + \mathcal{H}^T P) \otimes I_n]\delta(t) + \\ & h\delta^T(t)(P\mathcal{H}R^{-1}\mathcal{H}^T P \otimes I_n)\delta(t) + \\ & \int_{t-\tau}^t \dot{\delta}^T(s)(R \otimes I_n)\dot{\delta}(s)ds. \end{aligned} \quad (10)$$

将式(10)代入式(8)得

$$\dot{V}(t) \leq \delta^T(t)\Sigma_1\delta(t) + \delta^T(t - \tau)\Sigma_2\delta(t - \tau), \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = & [-P\mathcal{H} - \mathcal{H}^T P + hP\mathcal{H}R^{-1}\mathcal{H}^T P + Q] \otimes I_n, \\ \Sigma_2 = & [-Q + h\mathcal{H}^T R\mathcal{H}] \otimes I_n. \end{aligned}$$

由式(11)可知, 使得 $\dot{V}(t) < 0$ 成立的一个充分条件是 $\Sigma_1 < 0$ 与 $\Sigma_2 < 0$ 同时成立. 根据矩阵 $\Sigma_1$ 与 $\Sigma_2$ 的特征可以得到 $\Sigma_1 < 0 \Leftrightarrow \Phi_1 = -P\mathcal{H} - \mathcal{H}^T P + hP\mathcal{H}R^{-1}\mathcal{H}^T P + Q < 0, \Sigma_2 < 0 \Leftrightarrow \Phi_2 = -Q + h\mathcal{H}^T R^{-1}\mathcal{H} < 0$ . 因此,  $\dot{V}(t) < 0$ 成立的一个充分条件是

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

根据引理1可知 $\Phi < 0 \Leftrightarrow \Xi < 0$ . 因此, 若式(5)成立, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,  $\delta(t) \rightarrow 0$ , 则系统(6)渐近稳定, 即 $x(t) \rightarrow \bar{x}^* = [\mathcal{H}^{-1}\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n \bar{x}$ .

下面本文将证明, 对于任何一个向量 $\bar{x}_i^* \in \mathbb{R}^n (i = 1, 2, \dots, N)$ 都能够表示成领导者 $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^n (i = 1, 2, \dots, m)$ 初始状态的一个凸组合. 该问题可转化为证明矩阵 $[\mathcal{H}^{-1}\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n$ 是一个行随机矩阵, 即它含有非负元素, 且每一行的行和等于1.

因为 $\mathcal{H}$ 的特征根具有正实部, 故存在一个正实数 $\kappa > 0$ 和非负矩阵 $Z$ 使得下式成立:

$$\mathcal{H} = \kappa I - Z.$$

显然,  $\kappa > \rho(Z)$ 且 $\lambda_i(\mathcal{H}) = \kappa - \lambda_i(Z), \forall i = 1, 2, \dots, N$ , 因此

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{-1} = & (\kappa I - Z)^{-1} = \\ & \frac{1}{\kappa}(I + \frac{1}{\kappa}Z + \frac{1}{\kappa^2}Z^2 + \dots) \geq 0, \end{aligned}$$

即 $\mathcal{H}^{-1} \otimes I_n$ 为非负矩阵, 故 $[\mathcal{H}^{-1}\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n$ 也是一个非负矩阵. 下面证明它的行和为1. 由于 $\mathcal{H} = \mathcal{L} + \mathcal{B}(\mathbf{1}_m \otimes I_N), \mathcal{L}\mathbf{1}_N = 0$ , 则

$$\begin{aligned} & (\mathcal{H} \otimes I_n)(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_n) = \\ & ((\mathcal{L} + \mathcal{B}) \otimes I_n)(\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_n) = \\ & (\sum_{i=N+1}^{N+m} \mathcal{B}_i \mathbf{1}_N) \otimes \mathbf{1}_n, \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} & ([\mathcal{H}^{-1}\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n)(\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{1}_n) = \\ & ((\mathcal{H} \otimes I_n)^{-1}[\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n)(\mathbf{1}_m \otimes \mathbf{1}_n) = \\ & (\mathcal{H} \otimes I_n)^{-1}(\sum_{i=N+1}^{N+m} \mathcal{B}_i \mathbf{1}_N) \otimes \mathbf{1}_n = \\ & \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_n. \end{aligned} \quad (13)$$

根据式(13)可知矩阵 $[\mathcal{H}^{-1}\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n$ 是行随机矩阵. 证毕.

**注 1** 定理1中保证所有个体能够聚集于多个领导者组成的凸多边形中的最大时延上界 $h$ 可以从下述最优问题

中解出

$$\begin{aligned} & \max h, \\ & \text{s.t. } P > 0, Q > 0, R > 0 \text{ 和式(5)}. \end{aligned}$$

上述最优化问题通过线性矩阵不等式工具箱<sup>[23]</sup>中的GEVP求解器很容易求解。

**注2** 与文献[16]不同,文中所讨论的个体之间的通信是有向的且具有时延.在这里本文只要求所有智能体组成的网络拓扑集 $\mathcal{G}$ 有一个有向生成树,并不要求它是强连通的。

下面本文研究通信时延和噪声干扰下的多智能体聚集控制问题.受文献[24]启发,本文对通信权重作如下假设.对任意的 $a_{ij} > 0$ ,跟随者 $i$ 与它的邻居跟随者 $j$ 通信权重 $a_{ij}$ 被噪声扰动为 $a_{ij} + ra_{ij}\dot{\omega}$ ;对任意的 $b_k^i > 0$ ,跟随者 $i$ 与它的邻居领导者 $k$ 通信权重 $b_k^i$ 被噪声扰动为 $b_k^i + rb_k^i\dot{\omega}$ ,其中: $\omega$ 是定义在完全概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上的一维布朗运动, $\dot{\omega}$ 是一维白噪声, $0 < r < 1$ 为已知常数, $ra_{ij}$ 和 $rb_k^i$ 表示噪声密度.一个改进的基于邻居信息的反馈控制协议为

$$\begin{aligned} u_i(t) = & \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau)) + \\ & \sum_{k=N+1}^{N+m} b_k^i [\bar{x}_k - x_i(t-\tau)] + \\ & r \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau))\dot{\omega} + \\ & r \sum_{k=N+1}^{N+m} b_k^i [\bar{x}_k - x_i(t-\tau)]\dot{\omega}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$ .将协议(14)代入系统(1),写成向量形式,得

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -(\mathcal{H} \otimes I_n)x(t-\tau) + [\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes \\ & I_n \bar{x} - r(\mathcal{H} \otimes I_n)x(t-\tau)\dot{\omega} + \\ & [\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n \bar{x}\dot{\omega}. \end{aligned} \quad (15)$$

将式(15)写成Itô随机微分方程的形式,得

$$\begin{aligned} dx(t) = & -(\mathcal{H} \otimes I_n)x(t-\tau)dt + \\ & [\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n \bar{x}dt - \\ & r((\mathcal{H} \otimes I_n)x(t-\tau) - \\ & [\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n \bar{x})d\omega(t). \end{aligned} \quad (16)$$

为了方便分析,下面介绍一类特殊的随机时滞微分方程.考虑如下的随机时滞微分方程:

$$\begin{aligned} dx(t) = & \\ & [Ax(t) + Bx(t-\tau)]dt + Dx(t-\tau)dW(t), \end{aligned} \quad (17)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^N$ , $A, B, D$ 是常数矩阵.

**引理3** 假设存在正定矩阵 $P$ 和 $Q$ 满足 $P(A +$

$B) + (A + B)^T P = -Q$ .如果

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(Q) > & \|P\| \|D\|^2 + 2\|PB\| \times \\ & \sqrt{2\tau[4\tau(\|A\|^2 + \|B\|^2) + \|D\|^2]}, \end{aligned} \quad (18)$$

则随机时滞微分方程(17)的解是均方指数稳定的,即存在正常数 $C_1, C_2$ 使得

$$\mathbb{E}[\|x(t)\|^2] \leq \frac{C_1}{\lambda_{\min}(P)} e^{-C_2 t} \quad (19)$$

成立.

**证** 由假设可知,矩阵 $A+B$ 是赫尔维茨矩阵.利用Itô公式

$$\begin{aligned} d(x^T(t)Px(t)) = & \\ & 2x^T(t)P[Ax(t) + Bx(t-\tau)]dt + \\ & \text{tr}(x^T(t-\tau)D^T PDx(t-\tau))dt + \\ & 2x^T(t)PDx(t-\tau)dW(t), \end{aligned} \quad (20)$$

而

$$\begin{aligned} 2x^T(t)P[Ax(t) + Bx(t-\tau)] \leq & \\ -x^T(t)Qx(t) - 2x^T(t)PB(x(t) - x(t-\tau)) \leq & \\ -\lambda_{\min}(Q)|x(t)|^2 + \alpha|x(t)|^2 + & \\ \frac{\|PB\|^2}{\alpha}|x(t) - x(t-\tau)|^2 & \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \text{tr}(x^T(t-\tau)D^T PDx(t-\tau)) \leq & \\ \|P\| \|D\|^2 \|x(t-\tau)\|^2, & \end{aligned}$$

其中 $\alpha$ 为正常数.因此有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\gamma t} x^T(t)Px(t)) \leq & \\ \mathbb{E}[x^T(0)Px(0)] + & \\ \|P\| \|D\|^2 \int_0^t e^{\gamma s} \mathbb{E}\|x(s-\tau)\|^2 ds - & \\ (\lambda_{\min}(Q) - \alpha + \|P\|\gamma) \int_0^t e^{\gamma s} \mathbb{E}|x(s)|^2 ds + & \\ \frac{\|PB\|^2}{\alpha} \int_0^t e^{\gamma s} \mathbb{E}|x(s) - x(s-\tau)|^2 ds. & \end{aligned} \quad (21)$$

剩余部分证明与文献[25]中的定理2.1类似,只要令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \alpha_4 = \|D\|^2$ ,即可得到结论.

**定理2** 假设智能体之间的通信具有时延和噪声且连接拓扑 $\mathcal{G}$ 有一个有向生成树,则所有的跟随者能够聚集于 $m$ 个领导者组成的一个凸多边形区域的充分条件

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(Q) > & r^2 \|P\| \|\mathcal{H}\|^2 + 2\|P\mathcal{H}\| \times \\ & \sqrt{2\tau(4\tau + r^2) \|\mathcal{H}\|^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $P$ 和 $Q$ 是正定矩阵且满足 $P\mathcal{H} + \mathcal{H}^T P = Q$ .

**证** 由引理2及定理2的条件可知,  $\mathcal{H}$ 的特征根全位于右半平面, 故 $\mathcal{H}$ 可逆. 根据Lyapunov定理, 存在唯一的正定对称矩阵 $P$ 使得 $P\mathcal{H} + \mathcal{H}^T P = Q$ 成立. 作变换 $\delta(t) = x(t) - [\mathcal{H}^{-1}\mathcal{B}(I_m \otimes \mathbf{1}_N)] \otimes I_n \bar{x}$ , 结合式(16), 本文得到

$$d\delta(t) = -(\mathcal{H} \otimes I_n)\delta(t - \tau)dt - r(\mathcal{H} \otimes I_n)\delta(t - \tau)d\omega(t). \quad (23)$$

根据引理3, 令

$$A = 0, B = -(\mathcal{H} \otimes I_n), D = -r(\mathcal{H} \otimes I_n),$$

可知系统(23)的解是均方指数稳定的.

接下来要证明所有的跟随者聚集于多个领导者组成的凸形区域, 方法与定理1类似, 故省去.

**注3** 由定理2可知, 当智能体之间通信存在时延和随机噪声干扰时, 随着时间的变化所有的跟随者最终都能够聚集于多领导者组成的凸多边形区域.

### 5 仿真算例(Simulation examples)

本节将给出3个数值实例来验证文中的主要结果. 图1和图2分别给出了两个具有多个领导者的信息拓扑图 $\mathcal{G}_1, \bar{\mathcal{G}}_1$ 和 $\mathcal{G}_2, \bar{\mathcal{G}}_2$ , 显然图 $\mathcal{G}_1$ 和 $\mathcal{G}_2$ 都包含一个有向生成树. 其中: 三角形表示领导者, 圆形表示跟随者.

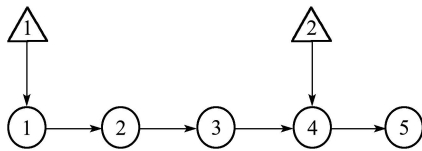


图1 有向图 $\mathcal{G}_1$ 和 $\bar{\mathcal{G}}_1$   
Fig. 1 Directed graph  $\mathcal{G}_1$  and  $\bar{\mathcal{G}}_1$

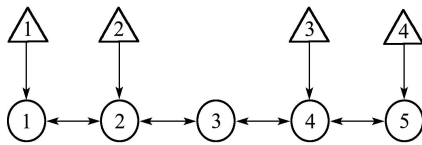


图2 有向图 $\mathcal{G}_2$ 和 $\bar{\mathcal{G}}_2$   
Fig. 2 Directed graph  $\mathcal{G}_2$  and  $\bar{\mathcal{G}}_2$

**例1** 考虑一个多智能体网络由2个领导者和5个跟随者组成, 如图1所示. 假设每个智能体都在一个水平线上运动. 给定领导者的初始条件 $\bar{x}_1(0) = 0, \bar{x}_2(0) = 1$ . 跟随者的初始条件是在区间 $[1, 10]$ 中随机选取. 利用LMI工具箱<sup>[23]</sup>, 通过解(5)可知时滞的上界为0.4999. 图3描述了5个跟随者跟随两个领导者的状态轨迹. 由图可知, 5个智能体都能够聚集于领导者1和2组成的长度为1的区间 $[0, 1]$ 内.

**例2** 考虑一个多智能体网络由4个领导者和5个跟随者组成, 如图2所示. 假设智能体之间的通信有时延和随机噪声干扰且它们都在一个平面上运

动. 给定跟随者和领导者的初始条件分别为

$$\begin{aligned} x_1(0) &= (0, 1)^T, x_2(0) = (0, 2)^T, x_3(0) = (0, 3)^T, \\ x_4(0) &= (0, 4)^T, x_5(0) = (0, 5)^T, \bar{x}_1(0) = (2, 2.5)^T, \\ \bar{x}_2(0) &= (2, 3.5)^T, \bar{x}_3(0) = (2.5, 3.5)^T, \\ \bar{x}_4(0) &= (2.5, 2.5)^T. \end{aligned}$$

取 $r = 0.1, P = I$ , 则 $Q = \mathcal{H} + \mathcal{H}^T$ . 通过简单计算可以得到 $\|\mathcal{H}\| = 4.0950$ 和 $\lambda_{\min}(Q) = \lambda_{\min}(\mathcal{H} + \mathcal{H}^T) = 1.8377$ . 利用定理2, 通过解式(22)可知时滞的上界为0.0165. 由图4可知, 随着时间的变化, 5个跟随者最终聚集于4个领导者组成的矩形区域内.

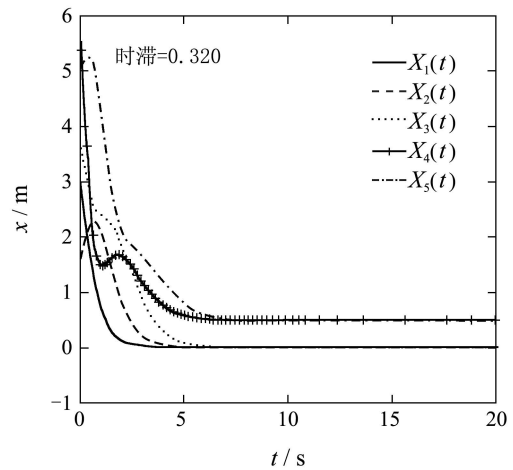


图3 有向图 $\mathcal{G}_1$ 下5个智能体的状态轨迹  
Fig. 3 State trajectories of five agents under the topology  $\mathcal{G}_1$

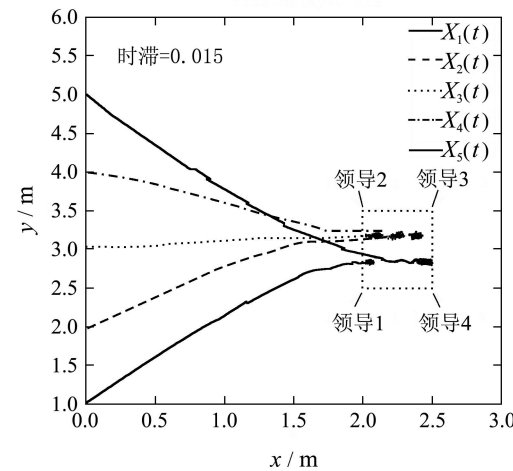


图4 有向图 $\mathcal{G}_2$ 下5个智能体的平面状态轨迹  
Fig. 4 State trajectories of five agents in a plane under the topology  $\mathcal{G}_2$

**例3** 考虑如图2组成的多智能体网络, 假设智能体之间的通信只有时延且它们都在一个三维空间里运动. 给定跟随者和领导者的初始条件分别为

$$\begin{aligned} x_1(0) &= (0, 0, 0)^T, x_2(0) = (2, 0, 0)^T, \\ x_3(0) &= (4, 0, 0)^T, x_4(0) = (0, 2, 0)^T, \\ x_5(0) &= (0, 4, 0)^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(0) &= (1, 0, 0.8)^T, \quad \bar{x}_2(0) = (0, 1, 0.8)^T, \\ \bar{x}_3(0) &= (2, 1, 0.8)^T, \quad \bar{x}_4(0) = (1, 0.8, 1)^T.\end{aligned}$$

由图5可知, 5个跟随者最终静止于4个领导者组成的四面体内。

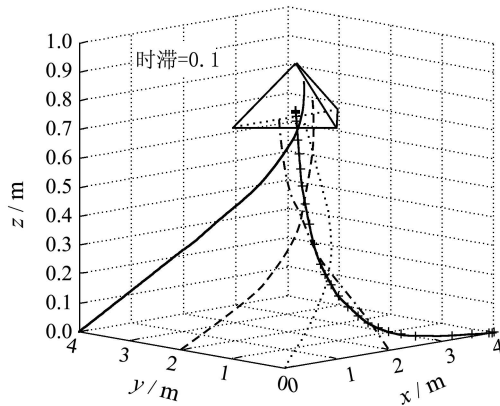


图5 有向图 $\mathcal{G}_2$ 下5个智能体的空间状态轨迹

Fig. 5 State trajectories of five agents in a three-dimensional space under the topology  $\mathcal{G}_2$

## 6 结论(Conclusions)

研究了一个通信时延和噪声影响下的连续时间多智能体系统跟随者-多领导者聚集问题. 得到所有的跟随者聚集于一个由多个领导者组成的凸多边形区域的充分条件. 应用数值仿真实例说明结论的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] XIAO F, WANG L, CHEN J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2605 – 2611.
- [2] FAX J A, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465 – 1476.
- [3] SABER R O. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 401 – 420.
- [4] CUCKER F, SMALE S. Emergent behavior in flocks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 852 – 862.
- [5] REN W, BEARD R W, KINGSTON D B. Multi-agent Kalman consensus with relative uncertainty[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. New York: IEEE, 2005, 3: 1865 – 1870.
- [6] XIAO L, BOYD S, LALL S. A scheme for robust distributed sensor fusion based on average consensus[C] // *Proceedings of the 4th International Conference on Information Process in Sensor Networks*. New York: IEEE, 2005: 63 – 70.
- [7] SABER R O, SHAMMA J S. Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion[C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. New York: IEEE, 2005: 6698 – 6703.
- [8] SABER R O, MURRAY R M. Consensus problem in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [9] 刘德进, 刘成林. 具有通信时延的离散时间二阶多个体网络的一致性问题的研究[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(8): 1108-1112. (LIU Dejing, LIU Chenglin, Consensus problem of discrete-time second-order multi-agent network with communication delay[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(8): 1108 – 1112.)
- [10] 谭拂晓, 关新平, 刘德荣. 具非平衡拓扑结构的多智能体网络系统一致性协议[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(10): 1087 – 1092. (TAN Fuxiao, GUAN Xinping, LIU Derong. Consensus protocol in networked multi-agent systems with non-balanced topology[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(10): 1087 – 1092.)
- [11] LYNCH N. *Distributed Algorithms*[M]. San Francisco, California: Morgan Kaufmann, 1996.
- [12] BARAHONA M, PECORA L M. Synchronization in small-world systems[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(5): 054101.
- [13] REN W, BEARD R W, ATKINS E M. A survey of consensus problems in multi-agent coordination[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. New York: IEEE, 2005: 1859 – 1864.
- [14] 杨文, 汪小帆, 李翔. 一致性问题综述[C] // 25届中国控制会议. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006: 1491 – 1495. (YANG Wen, WANG Xiaofan, LI Xiang. A survey of consensus problem in multi-agent systems[C] // *Proceeding of the 25th Chinese Control Conference*. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2006: 1491 – 1495.)
- [15] 王晓丽, 洪奕光. 多智能体系统分布式控制的研究新进展[J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2010, 7(2/3): 70 – 81. (WANG Xiaoli, HONG Yiguang. New progress in the study of distributed control of multi-agent system[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2010, 7(2/3): 70 – 81.)
- [16] HU J P, YUAN H W. Collective coordination of multi-agent systems guided by multiple leaders[J]. *Chinese Physics B*, 2009, 18(9): 3777 – 3782.
- [17] SHI G, HONG Y G. Global target aggregation and state agreement of nonlinear multi-agent systems with switching topologies[J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1165 – 1175.
- [18] JI M, FERRARI-TRECCATE G, EGERSTEDT M, et al. Containment control in mobile networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(8): 1972 – 1975.
- [19] CAO Y, REN W. Containment control with multiple stationary or dynamic leaders under a directed interaction graph[C] // *Proceedings of the 48th Joint IEEE Conference on Decision & Control and the 28th Chinese Control Conference*. Piscataway: IEEE, 2009: 3014 – 3019.
- [20] XIAO F, WANG L. Consensus protocols for discrete-time multi-agent systems with time-varying delays[J]. *Automatica*, 2008, 44(10): 2577 – 2582.
- [21] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [22] HU J P, HONG Y G. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays[J]. *Physica A*, 2007, 374(2): 853 – 863.
- [23] GAHIENT P, NEMIROVSKI A, LAUB A, et al. *LMI Control Toolbox User's Guide*[M]. Natick: The Math Works, 1995.
- [24] SUN Y Z, ZHAO D H, RUAN J. Consensus in noisy environments with switching topology and time-varying delays[J]. *Physica A*, 2010, 389(19): 4149 – 4161.
- [25] MAO X. Robustness of exponential stability of stochastic differential delay equations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 442 – 447.

## 作者简介:

刘学良 (1983—), 男, 博士研究生, 从事多智能体系统协调控制、时滞系统等方面的研究, E-mail: liuxueliang83@163.com;

胥布工 (1956—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统的控制及其应用等方面的研究, E-mail: aubgxu@scut.edu.cn;

谢立华 (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、传感器网络、多智能体系统协调控制等方面的研究, E-mail: ELHXIE@ntu.edu.sg.