

零相差跟踪控制器增益特性处理技术

周 黎^{1, 2}, 杨世洪¹, 高晓东¹

(1. 中国科学院 光电技术研究所, 四川 成都 610209; 2. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

摘要: 零相差跟踪控制系统增益误差随频率升高而增大, 同时零相差跟踪控制器对高频噪声有放大作用. 为了解决以上问题, 本文研究了一种对零相差跟踪控制器增益特性的处理方法. 采用了求解优化问题的思想, 通过对优化目标函数及约束条件的设置, 使设计得到的补偿器具有低频段增益误差补偿, 高频段增益衰减的性能. 文中详细介绍了补偿器的设计过程, 理论推导了参数计算公式. 比较仿真结果表明, 所设计的补偿器有效地提高了轨迹跟踪精度, 减小了控制器输出噪声含量, 有利于提高运动平稳性, 对工程实践具有参考价值.

关键词: 轨迹跟踪; 零相差跟踪控制; 增益误差补偿; 前馈控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Gain-characteristics manipulation technique for zero phase error tracking controller

ZHOU Li^{1, 2}, YANG Shi-hong¹, GAO Xiao-dong¹

(1. Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu Sichuan 610209, China;

2. Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: In a zero phase error tracking control system, the gain error increases as frequency increases; meanwhile, the zero phase error tracking control system exhibits amplification to high frequency noises. In order to solve these problems, a gain-characteristics manipulation method for zero phase error tracking controller is investigated based on the idea of optimization. By setting the optimization objective function and restriction conditions, we design the gain error compensator with gain-compensation in low frequency band and gain-attenuation in high frequency band. The design process is given in details and the parameter calculation formulas are derived analytically. Simulation results indicate that the designed compensator effectively increases the tracking accuracy and reduces noise content in controller output, thus, improving the motion smoothness and providing advantages for engineering applications.

Key words: trajectory tracking; zero phase error tracking control; gain error compensation; feedforward control

1 引言(Introduction)

零相差跟踪控制器(zero phase error tracking controller, ZPETC)是由日本学者M.Tomizuka提出的, 用于解决离散非最小相位系统的轨迹跟踪控制问题^[1], 轨迹跟踪分为两种: 已知轨迹的跟踪和未知轨迹的跟踪, ZPETC主要用于对已知轨迹的跟踪控制^[2]. 由于其实现简单、控制有效, 广泛应用于精密加工、激光切割、光盘硬盘寻址等对轨迹跟踪精度和定位精度有较高要求的场合^[3-4].

ZPETC能够实现对系统相位误差的理想补偿, 增益特性在低频段近似为1, 误差随频率升高而增大. 为了对幅频误差进行补偿, 进一步提高控制器的性能, 国内外学者进行了广泛的研究. 文献[2]设计了单一频率的运行轨迹, 对ZPETC进行了修正, 补偿了该频率输入时的增益误差; 文献[5]分析了跟踪误差与被跟踪轨迹之间的关系, 通过对误差的预测及施加

相应的补偿, 减小了误差的量级, 但对被跟踪轨迹有所限制; 文献[6]采用幂级数展开的方法设计补偿器, 根据精度要求选择幂级数的项数, 忽略高次项, 可将增益误差限制在任意要求的范围, 但实现较为复杂; 文献[7]采用比较系数法确定补偿器系数, 由于试图对整个频率段进行补偿, 在补偿器阶数较低时, 补偿后系统的增益特性存在较大的波动, 根据文中结论, 补偿器至少要达到10阶以上; 文献[8]采用最优化的方法设计补偿器, 推导了补偿器系数计算公式, 获得了较好的补偿效果.

本文借鉴文献[8]的最优化思想, 设计了一种考虑高频段抑制的补偿器, 在对低频段增益误差进行补偿的同时, 对高频噪声有抑制作用, 有利于降低系统运行时的震颤和噪音, 使运行更平稳. 本文详细给出了补偿器的设计过程, 通过比较仿真验证了其有效性和优越性.

2 零相差跟踪控制原理及存在的问题(Zero phase error tracking control theory and the problem)

零相差跟踪控制系统的基本结构如图1所示. 设计ZPETC作用于闭环之前, 使整个系统的输入输出在全频率范围内的相位差为零. 图中: $y_d(k)$ 为设计轨迹, $r(k)$ 闭环参考输入, $u(k)$ 为反馈控制器输出, $y(k)$ 为系统输出.

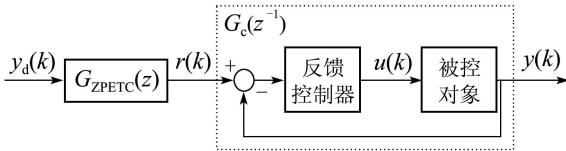


图1 零相差跟踪控制系统结构

Fig. 1 Zero phase error tracking control system structure

2.1 零相差跟踪控制原理(Zero phase error tracking control theory)

设离散化的闭环系统传递函数为

$$G_c(z^{-1}) = \frac{z^{-d} B_c(z^{-1})}{A_c(z^{-1})}, \quad (1)$$

式中 $B_c(z^{-1})$ 和 $A_c(z^{-1})$ 为关于 z^{-1} 的实系数多项式, 且互质. 满足 $A_c(0) = 1, B_c(0) \neq 0$, 即

$$B_c(z^{-1}) = b_{c0} + b_{c1}z^{-1} + \dots + b_{cm}z^{-m}, \quad (2)$$

$$A_c(z^{-1}) = 1 + a_{c1}z^{-1} + \dots + a_{cn}z^{-n}. \quad (3)$$

令

$$B_c(z^{-1}) = B_c^a(z^{-1}) \cdot B_c^u(z^{-1}), \quad (4)$$

其中 $B_c^a(z^{-1})$ 包含系统所有渐近稳定的零点, 并且 $B_c^u(z^{-1})$ 包含所有不稳定零点.

$$B_c^u(z^{-1}) = b_{c0}^u + b_{c1}^u z^{-1} + \dots + b_{cp}^u z^{-p}, \quad (5)$$

$$B_c^a(z^{-1}) = b_{c0}^a + b_{c1}^a z^{-1} + \dots + b_{cq}^a z^{-q}. \quad (6)$$

将零相差跟踪控制器设计为

$$G_{ZPETC}(z) = \frac{z^d A_c(z^{-1}) \cdot B_c^u(z)}{B_c^a(z^{-1}) \cdot [B_c^u(1)]^2}, \quad (7)$$

式中 $B_c^u(z)$ 为将 $B_c^u(z^{-1})$ 中的 z^{-1} 替换为 z 得到, 即

$$B_c^u(z) = b_{c0}^u + b_{c1}^u z + \dots + b_{cp}^u z^p. \quad (8)$$

在该控制器的作用下, 设计轨迹到系统输出的传递函数为

$$G_P(z) = \frac{B_c^u(z) \cdot B_c^u(z^{-1})}{[B_c^u(1)]^2}. \quad (9)$$

容易证明, 在整个频率段内系统相位差为零.

2.2 问题描述(Problem statement)

某零相差跟踪控制系统的幅频特性如图2中曲线1所示, 可以看出, 误差随频率升高而增大. 另一方

面, ZPETC本身可看做一个高通滤波器, 且高频段增益巨大, 达到几十分贝, 如图3中曲线1所示. 这个性质会带来两个问题^[9]: 一是由于名义模型和实际模型之间存在误差, 当轨迹阶次较低时, 存在大量高频分量, 经ZPETC放大后容易激发机械谐振, 引起冲击和残余振动等现象; 二是设计轨迹在数字系统中离散化时引入了高频噪声, 经ZPETC放大后引起系统执行器输出的震颤和噪音, 影响系统运行的平稳性.

文献[8]设计了一种补偿器, 可以减小系统的幅频增益误差, 如图2中曲线2, 但同时也增大了ZPETC的高频段增益, 如图3中曲线2. 文献[9]设计了一种零相差数字低通滤波器, 由于该滤波器对整个频率段内的幅度增益均有不同程度的衰减, 在抑制ZPETC高频段增益的同时, 也增大了系统幅频增益误差, 限制了系统对设计轨迹高频分量的跟踪能力. 简单的将两者相结合, 只能使其作用相互抵消, 不能得到期望的控制器性能. 本文研究了一种考虑高频段抑制的增益误差补偿器设计方法, 能够同时满足低频段误差补偿和高频段抑制的要求.

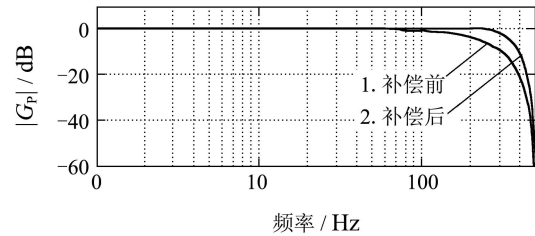


图2 增益误差补偿前后系统幅频特性

Fig. 2 Amplitude-frequency characteristic of system before & after gain error compensation

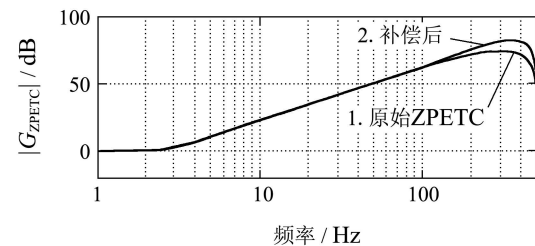


图3 增益误差补偿前后ZPETC幅频特性

Fig. 3 Amplitude-frequency characteristic of ZPETC before & after gain error compensation

3 考虑高频抑制的增益误差补偿(Gain error compensation with high frequency attenuation)

根据前文所述, ZPETC作用下系统传递函数如式(9), 可以表示为如下形式:

$$G_P(z) = \sum_{i=0}^M \gamma_i \cdot (z^i + z^{-i}), \quad (10)$$

式中 M 为不稳定零点的个数. 为保证系统零相差的

特性, 设计一种具有零相位延迟的补偿器结构如下:

$$R(z) = \sum_{k=0}^N \alpha_k \cdot (z^k + z^{-k}), \quad (11)$$

式中 N 为补偿器的阶数. 补偿后系统的传递函数可表示为

$$G_{P-M}(z) = \left(\sum_{k=0}^N \alpha_k \cdot (z^k + z^{-k}) \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^M \gamma_i \cdot (z^i + z^{-i}) \right). \quad (12)$$

要解决的问题是补偿器系数 α_k 的确定, 采用最优化的方法, 设定优化目标函数为

$$J = \min \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |G_{P-M}(e^{j\theta}) - 1|^2 d\theta \right), \quad (13)$$

式中: $\theta = \omega \cdot T_s$, T_s 为采样周期, 式(13)表示优化的目标为补偿后系统的传递函数在指定的频率域范围 $[\theta_1, \theta_2]$ 内, 与单位传递函数之差的 L_2 范数最小.

为了保证直流增益为1, 加入约束条件:

$$G_{P-M}(e^{j\theta})|_{\theta=0} = 1. \quad (14)$$

为了实现对高频段增益的抑制, 取 S 个频率点 $\theta_3, \theta_4, \dots, \theta_S + 2$, 满足

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots < \theta_{S+2}.$$

加入约束条件:

$$G_{P-M}(e^{j\theta})|_{\theta=\theta_i} = 0, \quad i = 3, 4, \dots, S, \quad (15)$$

即将 θ_3, θ_4 等 S 个频率点处的幅值约束到0. 求解式(13)–(15)构成的最优化问题, 定义Lagrange函数:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_{S+1}) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |G_{P-M}(e^{j\theta}) - 1|^2 d\theta + \\ & \lambda_1 [G_{P-M}(e^{j\theta})|_{\theta=0} - 1] + \\ & \sum_{i=2}^{S+1} [\lambda_i G_{P-M}(e^{j\theta})|_{\theta=\theta_{i+1}}]. \end{aligned} \quad (16)$$

利用式(12), 化简后得

$$\begin{aligned} \Gamma = \alpha^T A_1 \alpha - 2\gamma^T A_2 \alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta + \\ \lambda_1 \cdot [\beta_1^T \alpha - 1] + \sum_{i=2}^{S+1} \lambda_i \cdot \beta_i^T \alpha, \end{aligned} \quad (17)$$

式中:

$$\alpha = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_N]_{(N+1) \times 1}^T, \quad (18)$$

$$\gamma = [\gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \dots \quad \gamma_M]_{(M+1) \times 1}^T, \quad (19)$$

$$A_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} A(\theta)^T \gamma \gamma^T A(\theta) d\theta, \quad (20)$$

$$A_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} A(\theta) d\theta, \quad (21)$$

$$\beta_1 = [A^T(\theta) \cdot \gamma]|_{\theta=0}, \quad (22)$$

$$\beta_i = [A^T(\theta) \cdot \gamma]|_{\theta=\theta_{i+1}}, \quad i = 2, \dots, S+1, \quad (23)$$

其中:

$$A(\theta) = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & \cos \theta \cos \theta \\ \vdots & \vdots \\ \cos(M\theta) & \cos(M\theta) \cos \theta \\ \dots & \cos(N\theta) \\ \dots & \cos \theta \cos(N\theta) \\ \vdots & \vdots \\ \dots & \cos(M\theta) \cos(N\theta) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

式(17)分别对 $\alpha, \lambda_i (i = 1, 2, \dots, S+1)$ 微分, 令其值为0, 得

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \alpha} = 2A_1 \alpha - 2A_2^T \gamma + \sum_{i=1}^{S+1} \lambda_i \cdot \beta_i = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda_1} = \beta_1^T \alpha - 1 = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda_i} = \beta_i^T \alpha = 0, \quad i = 2, 3, \dots, S+1. \quad (27)$$

求解由以上 $S+2$ 个等式构成的方程组, 分别以 $\beta_i A_1^{-1}$ 左乘式(25), 代入式(26)–(27)的结论, 消去 α , 得到关于 λ_i 的方程组:

$$\begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_{S+1}^T \end{bmatrix} \cdot A_1^{-1} [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_{S+1}] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{S+1} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \beta_1^T A_1^{-1} A_2^T \gamma \\ \beta_2^T A_1^{-1} A_2^T \gamma \\ \vdots \\ \beta_{S+1}^T A_1^{-1} A_2^T \gamma \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

令 $\beta = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_{S+1}]_{(N+1) \times (S+1)}, \quad (29)$

$$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_{S+1}]_{(S+1) \times 1}^T, \quad (30)$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]_{(S+1) \times 1}^T, \quad (31)$$

得

$$\beta^T A_1^{-1} \beta \lambda = 2\beta^T A_1^{-1} A_2^T \gamma - 2C. \quad (32)$$

求解式(32), 得到计算 λ 的表达式为

$$\lambda = (\beta^T A_1^{-1} \beta)^{-1} \cdot (2\beta^T A_1^{-1} A_2^T \gamma - 2C). \quad (33)$$

根据式(25)可以得

$$\alpha = A_1^{-1} A_2^T \gamma - \frac{1}{2} A_1^{-1} \beta \lambda. \quad (34)$$

将式(34)代入 λ 的表达式(33), 得到计算 α 的表达式:

$$\begin{aligned} \alpha = A_1^{-1} A_2^T \gamma - A_1^{-1} \beta (\beta^T A_1^{-1} \beta)^{-1} \cdot \\ (\beta^T A_1^{-1} A_2^T \gamma - C). \end{aligned} \quad (35)$$

式(35)为满足约束条件时补偿器系数的最优解, 式中 $\alpha, \gamma, A_1, A_2, \beta, C$ 的定义分别如式(18)–(21)(29)(31)所示.

在设计补偿器时, 高频段幅度为0的约束条件的个数应小于补偿器的阶数, 即 $S < N$. 因为补偿器的阶数越高, 对频率域特性进行调整时灵活性越高, 能够满足更多的约束条件. 若补偿器的阶数过低, 会使设计得到的补偿器为了满足高频段滤波性能而牺牲了低频段补偿的性质, 无法兼顾高频段滤波和低频段误差补偿两方面的要求.

对某系统设计5阶补偿器, 设计时选择优化区间为 $[0, 0.25\pi]$, 高频段0幅度约束的频率点选择 $0.7\pi, 0.8\pi, 0.9\pi$, 补偿前后系统幅率特性的低频段和频段分别如图4–5所示. 补偿前后ZPETC频率特性见图6. 可以看出, 所设计的补偿器实现了要求的低频段增益误差补偿, 高频段滤波的性能. 0–100 Hz范围内, 在约50 Hz处增益误差达最大值, 约为 -0.05 dB. 加入补偿器后ZPETC高频段增益减小了约40 dB.

$$\alpha = [0.2844 \ 0.3342 \ -0.0351 \ -0.1072 \ -0.0033 \ 0.0269]^T. \quad (36)$$

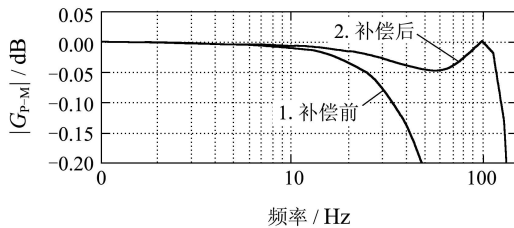


图4 补偿前后系统幅频特性(低频段)

Fig. 4 Amplitude-frequency characteristic of system before & after compensation (low frequency)

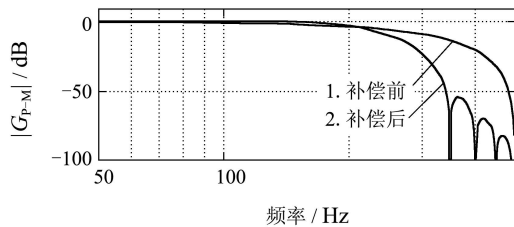


图5 补偿前后系统幅频特性(高频段)

Fig. 5 Amplitude-frequency characteristic of system before & after compensation (high frequency)

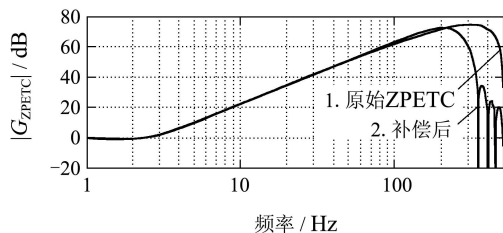


图6 补偿前后ZPETC幅频特性

Fig. 6 Amplitude-frequency characteristic of ZPETC before & after compensation

4 比较仿真(Comparative simulation)

为了验证所提出的ZPETC增益特性处理技术的有效性, 在Matlab/Simulink平台进行了比较仿真. 设被控系统传递函数为

$$G = \frac{1}{0.01s^2 + 0.2s}. \quad (37)$$

闭环反馈采用比例控制方式, 比例系数 $K_P = 3$. 以采样周期1 ms对闭环系统离散化, 设计ZPETC为

$$G_{ZPETC} = 1678z^2 - 1633z - 1700 + 1656z^{-1}. \quad (38)$$

利用式(35)计算, 得到5阶补偿器系数如下, 相关设计参数和幅频特性如前一节所述.

4.1 误差补偿(Error compensation)

设输入轨迹 y_d 为正弦函数, 幅值为1. 当频率分别为10 Hz和50 Hz时, 补偿前后轨迹跟踪误差分别如图7和图8所示. 可以看出, 输入10 Hz时两种情况下轨迹跟踪相对误差接近, 均为0.3%左右. 随着频率升高. 未加补偿的ZPETC控制下, 轨迹跟踪误差显著增大, 输入50 Hz时, 增大到约3%, 加入补偿后, 误差保持在约0.5%. 根据前文分析, 补偿后的系统在0–100 Hz范围内, 在约50 Hz处具有最大增益误差, 因此输入轨迹在该频率段范围内时, 最大轨迹相对误差约为0.5%.

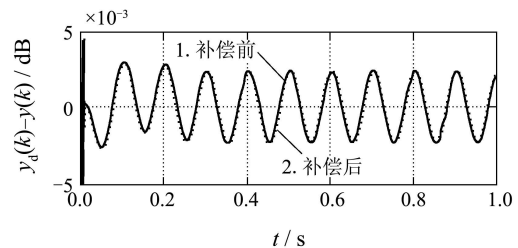


图7 补偿前后轨迹跟踪误差比较(10 Hz 输入)

Fig. 7 Tracking error comparison before & after compensation (10 Hz input)

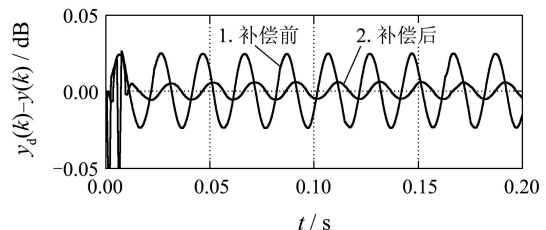


图8 补偿前后轨迹跟踪误差比较(50 Hz 输入)

Fig. 8 Tracking error comparison before & after compensation (50 Hz input)

4.2 噪声抑制(Noise suppression)

设输入轨迹 y_d 为幅值1, 频率1 Hz的正弦函数, 叠加 $\pm 5 \times 10^{-5}$ 范围内均匀分布随机噪声. 图9(a)为原始ZPETC控制下闭环反馈控制器的输出 $u(k)$, 可以

看出经过ZPETC放大后, $u(k)$ 叠加有明显的高频噪声. 图9(b)为采用文献[8]的方法设计的增益误差补偿器作用下的情况, 由于该补偿器对ZPETC的增益有进一步放大的作用(如图3), 导致噪声幅度进一步增大. 图9(c)为采用本文设计的高频段抑制的误差补偿器作用下的反馈控制器输出, 可以看出, 该补偿器在实现增益误差补偿的同时, 对高频噪声也具有一定的抑制作用, 噪声幅度小于以上两种情况.

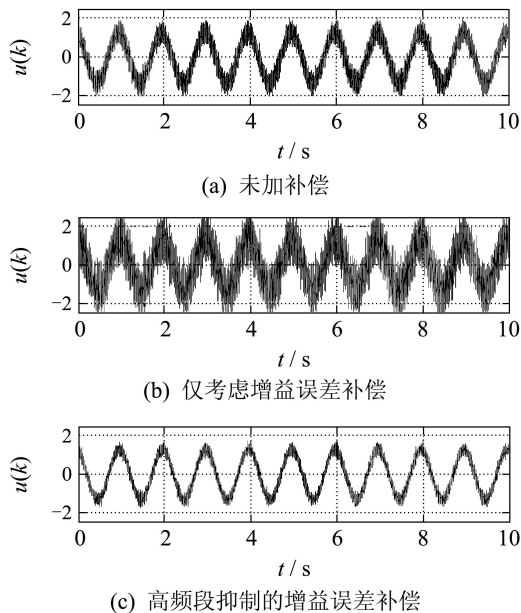


图9 反馈控制器输出比较

Fig. 9 Feedback controller output comparison)

5 结论(Conclusion)

本文采用最优化的思想, 设计了一种具有高频抑制特性的ZPETC增益误差补偿器, 用以解决零相差跟踪控制系统增益误差随频率升高而增大以及ZPETC对高频噪声放大的问题. 比较仿真结果表明, 所设计的补偿器明显减小了系统轨迹跟踪误差, 提高了控制精度, 并减小了控制器输出的噪声含量, 有利于提高运动平稳性. 补偿后的系统优于未补偿和只考虑增益误差补偿时的情况. 文中详细的给出了设计过程, 理论推导了参数计算公式, 对工程实践具有参考价值.

参考文献(References):

- [1] TOMIZUKA M. Zero phase error tracking algorithm for digital control[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1987, 109(3): 65 – 68.
- [2] PARK H S, CHANG P H, LEE D Y. Continuous zero phase error tracking controller with gain error compensation[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. New York: IEEE, 1999, 6: 3554 – 3558.
- [3] NIU W, TOMIZUKA M. A general framework of coordinated motion control subjected to actuator saturation[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Piscataway: IEEE, 1998, 6: 3843 – 3847.
- [4] OHISHI K, KUDO K, HAYAKAWA Y, et al. Robust feedforward tracking servo system for optical disk recording system[C] // *The 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Piscataway: IEEE, 2001: 1710 – 1715.
- [5] TORFS D, SWEVERIS J, DE SCHUTTER J. Quasi-perfect tracking control of non-minimal phase systems[C] // *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*. Piscataway: IEEE, 1991, 12: 241 – 244.
- [6] YAMADA M, FUNAHASHI Y, FUJIWARA S. Zero phase error tracking controller with a desired gain error and application[C] // *UKACC International Conference on Control*. Exeter: IET, 1996: 674 – 679.
- [7] ADNAN R, SAMAD A M, TAHIR N M, et al. Trajectory zero phase error tracking control using comparing coefficients method[C] // *The 5th International Colloquium on Signal Processing & Its Applications*. Piscataway: IEEE, 2009: 385 – 390.
- [8] YEH S S, HSU P L. An optimal and adaptive design of the feedforward motion controller[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1999, 4(4): 428 – 439.
- [9] KEMPF C J, KOBAYASHI S. Disturbance observer and feedforward design for a high-speed direct-drive positioning table[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999, 7(5): 513 – 526.

作者简介:

周黎 (1983—), 男, 博士研究生, 研究方向为光电系统控制技术, E-mail: zhoulil108@yahoo.com.cn;

杨世洪 (1966—), 男, 研究员, 研究方向为光电探测技术及传感器应用技术, E-mail: shyong@126.com;

高晓东 (1964—), 男, 研究员, 博士生导师, 研究方向为航空测量及光电探测技术, E-mail: xdkao@sina.com.