

# 非匹配不确定高阶非线性系统的滑模控制新方法

蒲明, 吴庆宪, 姜长生, 王宇飞

(南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016)

**摘要:** 对具有非匹配不确定的高阶非线性系统, 采用改进的高阶滑模微分器获取已知状态的任意阶微分估计值, 再以恰当阶次的状态微分估计值之差, 得到非匹配不确定项及其微分的估计值, 证明了其误差任意小. 为避免奇异性和抖振, 采用两种方案设计了滑模控制器, 并设计鲁棒项提高系统鲁棒性. 基于Lyapunov理论证明了系统稳定性. 同现有其他方法相比, 该方法具有适用范围更广、收敛速度快、控制精度高、运算量小、保守性低等优点. 最后仿真证明了本文所有结论.

**关键词:** 非匹配不确定; 非线性; 高阶滑模微分器; 滑模; 无抖振

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## New method of sliding-mode control for higher order nonlinear system with mismatched uncertainties

PU Ming, WU Qing-xian, JIANG Chang-sheng, WANG Yu-fei

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China)

**Abstract:** For higher order nonlinear system with mismatched uncertainties, we propose a new higher order sliding-mode differentiator to obtain the arbitrary order estimates for the differential values of system states. The estimated value of mismatched disturbance and its differentiations are obtained from the differences between estimated differential values with proper orders of system states; the errors can be made arbitrary small. To avoid the singularity and chattering, we present two sliding-mode controller schemes with robust control terms to improve the system robustness. The system stability is proved by Lyapunov theorem. Compared with the existing methods, the proposed method has many advantages such as the wide application range for affine nonlinear systems, high convergence rate, high control precision, small calculation complexity, and low conservativeness, etc. Finally, simulation validates all conclusions.

**Key words:** mismatched uncertainties; nonlinear; higher order sliding-mode differentiator; sliding-mode; chattering-free

### 1 引言(Introduction)

滑模控制反应迅速、鲁棒性强、运算量小, 是现代控制方法中重要的分支. 但滑模控制存在两个严重缺陷. 其一是抖振问题. 一般地, 为了保证系统状态或误差轨迹进入并保持于滑模面上, 控制器中含有符号函数等不连续切换函数, 这是抖振产生的根源. 文献[1]采用饱和函数代替不连续函数来避免抖振. 这种方法简单易行, 实际应用的效果也较为理想, 但系统运动轨迹只能收敛到滑模面的某一邻域内. 文献[2]采用连续的Terminal吸引子函数代替符号函数作为趋近律. 这种解决抖振的方法并不彻底, 当控制器中存在自适应项等辅助项时, 仍然存在非连续项, 抖振仍然存在. 文献[3]采用高阶滑模控制, 在保证系统有限时间收敛的同时让滑模面去除了抖振, 如使 $s = \dot{s} = 0$ 等, 但其控制器中仍然有不连续项, 且高阶滑模控制难以应用于任意阶系统. 文献[4]采用动态滑模设计, 将所有不连续项全部放入

控制器的导数项中去, 经过积分, 控制器及滑模面均能很好地克服抖振, 但很多情况下, 微分的引入为控制器设计造成了不小的困难.

滑模的第2个缺陷是难以处理系统中的非匹配不确定问题<sup>[5]</sup>, 此时滑模不再具有不变性. 滑模的非匹配问题本质上是未知信息获得的问题. 在线性系统和离散系统中, 处理方法较为统一, 即利用LMI通过不等式放缩法略去非匹配项, 再设计控制器<sup>[6-7]</sup>, 本质上是一种大增益方案. 早期的非线性系统研究中一般假设系统不存在非匹配项或假设非匹配项只存在于高阶系统最后一个子系统中, 且存在上界常数或上界函数<sup>[8-9]</sup>. 针对一类具有严格反馈形式的非线性系统, 文献[10]吸纳自适应Backstepping方法来处理前 $n-1$ 个子系统的非匹配问题, 而用Terminal滑模设计不含非匹配项的第 $n$ 个子系统的控制器. 该方案假设非匹配项可表示为未知参数乘以已知光滑函数的形式. 这种方法将控制器设计的困难做了

很大简化, 需要太多非匹配不确定的先验信息, 在大多数工程应用中难以成立. 文献[11-13]从信息论的角度出发, 提出用观测器来估计未知的非匹配不确定, 再设计抵消项及整个控制器. 这一方案无需非匹配不确定的任何已知信息, 在控制精度和保守性方面也优于传统的大增益方案, 但文章存在很多尚需完善的地方: 假设仅前  $n-1$  个子系统存在非匹配不确定性; 参数设计保守性太大; 滑模观测器及控制器存在抖振; 文章将被估计量直接用估计量代替, 忽略掉了估计误差; 逼近  $y_i$  的滑模观测器设计为  $\hat{y}_i = x_{i+1} + k_i \text{sgn } s_i$ ,  $s_i = y_i - \hat{y}_{i-1}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . 显然文献忽视了包含未知非匹配不确定的  $y_i$  是不可得的这一前提. 也不能用  $\hat{s}_i = \hat{y}_i - \hat{y}_{i-1}$  来代替  $s_i$ , 因为  $\hat{s}_i \neq 0$  时,  $\hat{y}_i$  只是  $y_i$  的一个上界 ( $k_i$  取足够大值); 而当  $\hat{s}_i = 0$  时,  $\hat{y}_{i-1} = x_i$ , 未包含非匹配不确定的信息, 所以  $i \geq 2$  时,  $\hat{y}_i$  无法跟踪  $y_i$ . 若采用神经网络观测器<sup>[14]</sup>、模糊观测器<sup>[15]</sup>、非线性干扰观测器<sup>[16]</sup>等代替

滑模设计递阶观测器, 则会存在如下问题: 一是仍然会存在设计困难; 二是在高阶系统的控制器中将出现观测器估计值的高阶导数, 其有界性证明是非常困难的, 同理, 估计误差的有界证明也极其困难; 三是运算量将远远大于滑模观测器. 目前非匹配不确定高阶非线性系统控制仍然是一大难题.

针对上述问题, 在文献[17]基础上, 首先采用 Terminal 吸引子函数代替高阶滑模微分器 (higher-order sliding-mode differentiator, HOSMD) 中的不连续函数, 避免微分器输出存在抖振. 用改进后的滑模微分器估计各级子系统状态的各阶微分. 再以恰当阶次的状态微分估计值之差得到非匹配不确定任意阶微分的估计值; 证明了其误差可以任意小. 为避免奇异性和抖振, 采用两种方案设计滑模控制器, 并设计了鲁棒控制项提高控制精度. 控制方案如图1所示. 基于 Lyapunov 理论证明了系统稳定. 最后将所设计控制方案用于仿真实验, 证明了本文所有结论.

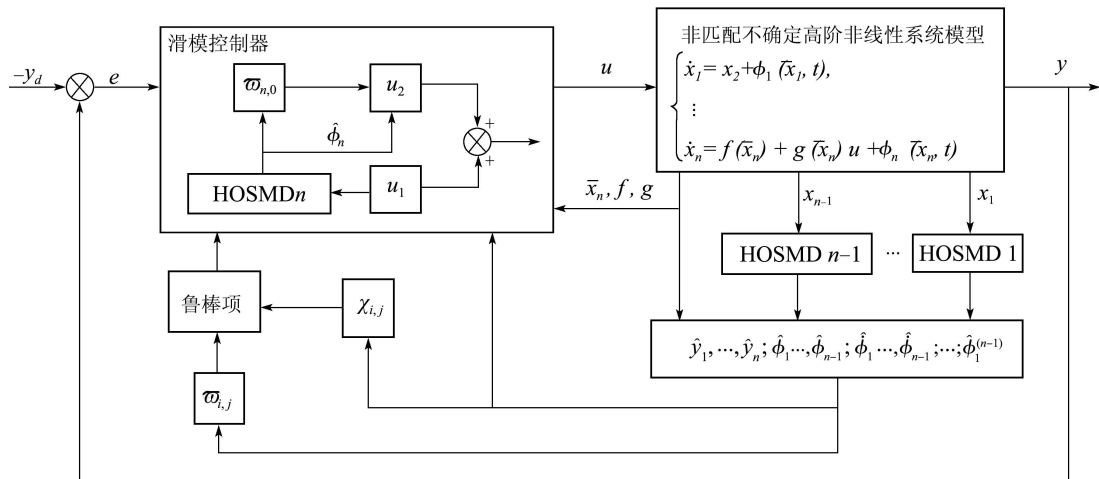


图 1 控制方案结构图

Fig. 1 Structure diagram of control scheme

## 2 问题描述(Problem description)

考虑如下  $n$  阶非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + \phi_i(\bar{x}_i, t), & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{x}_n = f(\bar{x}_n) + g(\bar{x}_n)u + \phi_n(\bar{x}_n, t), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x_i (1 \leq i \leq n)$  为可测系统状态;  $\bar{x}_i = (x_1, x_2, \dots, x_i)^T, 1 \leq i \leq n$ ;  $\phi_i(\bar{x}_i, t) (1 \leq i \leq n)$  为第  $i$  个子系统的非匹配不确定;  $f(\bar{x}_n), g(\bar{x}_n)$  为已知光滑函数;  $y$  为系统输出.  $y_d$  为希望输出, 其任意阶微分存在. 滑模控制器设计的目的是使非匹配不确定高阶非线性系统(1)的输出  $y$  跟踪上期望值  $y_d$ , 且消除抖振.

由式(1)取新的变量有

$$\begin{cases} y_0 = x_1, \\ y_1 = \dot{y}_0 = \dot{x}_1 = x_2 + \phi_1(\bar{x}_1, t), \\ y_2 = \dot{y}_1 = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 + \dot{\phi}_1(\bar{x}_1, t) = x_3 + \phi_2(\bar{x}_2, t) + \dot{\phi}_1(\bar{x}_1, t), \\ \vdots \\ y_{n-1} = \dot{y}_{n-2} = x_1^{(n-1)} = x_n + \sum_{j=n-1-i}^{n-1} \phi_i^{(j)}(\bar{x}_i, t), \\ y_n = \dot{y}_{n-1} = x_1^{(n)} = \dot{x}_n + \sum_{j=n-i}^{n-1} \phi_i^{(j)}(\bar{x}_i, t) = f(\bar{x}_n) + g(\bar{x}_n)u + \sum_{j=n-i}^n \phi_i^{(j)}(\bar{x}_i, t). \end{cases} \quad (2)$$

**假设 1** 系统(2)中 $\phi_i^{(j)}(\bar{x}_i, t)$ 是有界的,  $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n + 1 - i$ .

设 $e_0 = y_0 - y_d, e_1 = y_1 - \dot{y}_d, \dots, e_n = y_n - y_d^{(n)}$ . 取滑模面为

$$\sigma = e_{n-1} + c_{n-1}e_{n-2} + \dots + c_2e_1 + c_1e_0 + \int_0^t c_0e_0dt, \quad (3)$$

其中 $c_i(1 \leq i \leq n - 1)$ 为设计参数, 并使多项式

$$e_{n-1} + c_{n-1}e_{n-2} + \dots + c_2e_1 + c_1e_0 + \int_0^t c_0e_0dt$$

为Hurwitz的. 对式(3)求导, 并代入式(2)有

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= e_n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i e_i = y_n - y_d^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i e_i = \\ & f(\bar{x}_n) + g(\bar{x}_n)u + \sum_{j=n-i}^n \phi_i^{(j)}(\bar{x}_i, t) - \\ & y_d^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i e_i. \end{aligned} \quad (4)$$

若能设计滑模控制器使得滑模到达条件 $\sigma \dot{\sigma} < 0$ 成立, 则 $\sigma = 0$ 后,  $e_0$ 渐近收敛到0点, 输出跟踪上期望值. 为此, 采用改进的高阶滑模微分器获得式(4)中各非匹配项 $\phi_i(\bar{x}_i, t)$ 及其微分 $\phi_i^{(j)}(\bar{x}_i, t)$ 的估计值, 以设计控制器中的抵消项, 并设计对应的鲁棒项.

### 3 高阶滑模微分器设计(Design of HOSMD)

将文献[17]中HOSMD的不连续函数用Terminal吸引子函数代替, 改进后的 $N_i$ 阶滑模微分器如式(5)所示:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{z}_{i,0} &= v_{i,0} = -\lambda_{i,0} |z_{i,0} - x_i|^{N_i/(N_i+1)} \times \\ & \quad \text{sgn}(z_{i,0} - x_i) + z_{i,1}, \\ & \vdots \\ \dot{z}_{i,j} &= v_{i,j} = -\lambda_{i,j} \times \\ & \quad |z_{i,j} - v_{i,j-1}|^{(N_i-j)/(N_i-j+1)} \times \\ & \quad \text{sgn}(z_{i,j} - v_{i,j-1}) + z_{i,j+1}, \\ & \vdots \\ \dot{z}_{i,N_i-1} &= v_{i,N_i-1} = -\lambda_{i,N_i-1} \times \\ & \quad |z_{i,N_i-1} - v_{i,N_i-2}|^{1/2} \times \\ & \quad \text{sgn}(z_{i,N_i-1} - v_{i,N_i-2}) + z_{i,N_i}, \\ \dot{z}_{i,N_i} &= -\lambda_{i,N_i} |z_{i,N_i} - v_{i,N_i-1}|^{q_i/p_i} \times \\ & \quad \text{sgn}(z_{i,N_i} - v_{i,N_i-1}), \end{aligned} \right. \quad (5)$$

其中:  $v_{i,j}$ 为 $x_i$ 的第 $j + 1$ 阶微分估计值;  $z_{i,j}$ 为内部状态;  $\lambda_{i,0}, \lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,N_i}$ 为HOSMD设计参数;  $q_i, p_i$ 为Terminal吸引子设计参数. 为便于分析, 令 $\sigma_{i,0} = z_{i,0} - x_i, \dots, \sigma_{i,j} = z_{i,j} - x_i^{(j)}, \dots, \sigma_{i,N_i} = z_{i,N_i} - x_i^{(N_i)}$ . 则在Filippov意义下, 由式(5)得到式(6)所

示误差系统:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\sigma}_{i,0} &= -\lambda_{i,0} |\sigma_{i,0}|^{N_i/(N_i+1)} \text{sgn} \sigma_{i,0} + \sigma_{i,1}, \\ & \vdots \\ \dot{\sigma}_{i,j} &= -\lambda_{i,j} |\sigma_{i,j} - \dot{\sigma}_{i,j-1}|^{(N_i-j)/(N_i-j+1)} \times \\ & \quad \text{sgn}(\sigma_{i,j} - \dot{\sigma}_{i,j-1}) + \sigma_{i,j+1}, \\ & \vdots \\ \dot{\sigma}_{i,N_i-1} &= -\lambda_{i,N_i-1} |\sigma_{i,N_i-1} - \dot{\sigma}_{i,N_i-2}|^{1/2} \times \\ & \quad \text{sgn}(\sigma_{i,N_i-1} - \dot{\sigma}_{i,N_i-2}) + \sigma_{i,N_i}, \\ \dot{\sigma}_{i,N_i} &= -\lambda_{i,N_i} |\sigma_{i,N_i} - \dot{\sigma}_{i,N_i-1}|^{q_i/p_i} \times \\ & \quad \text{sgn}(\sigma_{i,N_i} - \dot{\sigma}_{i,N_i-1}) - x_i^{(N_i+1)}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

**定理 1**  $N_i$ 阶滑模微分器误差系统式(6), 对于任意有限初始状态 $\sigma_{i,j}(0), 1 \leq j \leq N_i$ 和任意 $N_i + 1$ 阶微分存在的 $x_i$ , 取一组足够大的正数 $\lambda_{i,0}, \lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,N_i}$ , 系统(6)是Lyapunov稳定的, 且

- 1) 若满足 $x_i^{(N_i+1)} = 0$ , 则 $\sigma_{i,j}$ 渐近收敛至零点.
- 2) 若满足 $x_i^{(N_i+1)} \neq 0$ , 且 $x_i^{(N_i)}$ 的Lipschitz常数具有上界 $L_i > 0$ , 则存在一有限时刻 $T_i$ , 使得 $t_i > T_i$ 后,  $\sigma_{i,j}$ 收敛至一包含0点的闭球 $B_{i,j}$ 内. 闭球半径满足式(7)–(8):

$$\begin{aligned} r(B_{i,j}) &= \frac{L_i^{((N_i-j+1)p_i)/q_i}}{\lambda_{i,N_i}^{((N_i-j+1)p_i)/q_i} \lambda_{i,N_i-1}^{N_i-j+1}} \times \\ & \quad \frac{1}{\lambda_{i,N_i-2}^{(N_i-j+1)/2} \dots \lambda_{i,j}^{(N_i-j+1)/(N_i-j)}}, \\ & 1 \leq j \leq N_i, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} r(B_{i,j+1}) &= \lambda_{i,j} (r(B_{i,j}))^{(N_i-j)/(N_i-j+1)}, \\ & 1 \leq j \leq N_i - 1. \end{aligned} \quad (8)$$

**证** 稳定性证明参见文献[17]. 下面只给出式(7)–(8)的证明.

将式(6)中前 $N_i - 1$ 个式子代入最后一式有

$$\begin{aligned} & \lambda_{i,N_i} \lambda_{i,N_i-1}^{q_i/p_i} \lambda_{i,N_i-2}^{q_i/(2p_i)} \cdot \lambda_{i,0}^{q_i/(N_i p_i)} \times \\ & |\sigma_{i,0}|^{q_i/((N_i+1)p_i)} = L_i, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} r(B_{i,0}) &= \\ & \left( \frac{L_i}{\lambda_{i,N_i} \lambda_{i,N_i-1}^{q_i/p_i} \lambda_{i,N_i-2}^{q_i/(2p_i)} \dots \lambda_{i,0}^{q_i/(N_i p_i)}} \right)^{\frac{(N_i+1)p_i}{q_i}} = \\ & \frac{L_i^{((N_i+1)p_i)/q_i}}{\lambda_{i,N_i}^{((N_i+1)p_i)/q_i} \lambda_{i,N_i-1}^{N_i+1} \lambda_{i,N_i-2}^{(N_i+1)/2} \dots \lambda_{i,0}^{(N_i+1)/N_i}}. \end{aligned}$$

由数学归纳法可得式(7)–(8). 证毕.

**注 1** 定理1中高阶滑模微分器误差系统达到平稳状态时, 各 $\dot{\sigma}_{i,N_i}$ 一定为0. 其次, 定理1的目的是得到高阶滑模微分器估计误差在稳态时的上界, 也即 $x_i^{(N_i)} = L$ 时对应的闭球 $B_{i,j}$ 半径. 上界 $L$ 是从稳态的角度定义的, 因此定理1证明分析中假定 $\dot{\sigma}_{i,N_i} = 0$ .

### 4 非匹配项估计(Estimation of mismatched uncertainty term)

**Step 1** 由于 $x_i(1 \leq i \leq n)$ 可测,用HOSMD获得 $\dot{x}_i(1 \leq i \leq n)$ 的估计值,记作 $\hat{x}_i(1 \leq i \leq n)$ .其误差定义为 $\tilde{x}_i = \dot{x}_i - \hat{\dot{x}}_i$ ,记为 $\tilde{x}_i \triangleq \chi_{i,1}, 1 \leq i \leq n$ .则非匹配不确定 $\phi_i(\bar{x}_i, t)$ 的估计值为

$$\hat{\phi}_i(\bar{x}_i, t) = \hat{\dot{x}}_i - x_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1. \quad (9)$$

复合干扰项的估计误差为

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i(\bar{x}_i, t) &= \phi_i(\bar{x}_i, t) - \hat{\phi}_i(\bar{x}_i, t) = \\ &(\dot{x}_i - x_{i+1}) - (\hat{\dot{x}}_i - x_{i+1}) = \\ &\dot{x}_i - \hat{\dot{x}}_i = \chi_{i,1}, 1 \leq i \leq n - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

由定理1可知,总是可以选择恰当的HOSMD参数使得 $\chi_{i,1}(1 \leq i \leq n - 1)$ 任意小.即对于任意给定的正数 $\varpi_{i,0} > 0(1 \leq i \leq n - 1)$ ,总能找到一组设计参数 $\lambda_{i,N_i}, \lambda_{i,N_i-1}, \dots, \lambda_{i,0}$ 使得

$$|\tilde{\phi}_i(\bar{x}_i, t)| < \varpi_{i,0}, 1 \leq i \leq n - 1. \quad (11)$$

**Step 2** 由于 $\ddot{x}_1 = x_3 + \phi_2(\bar{x}_2, t) + \dot{\phi}_1(\bar{x}_1, t)$ .同样采用HOSMD获得 $\ddot{x}_1$ 的估计值 $\hat{\ddot{x}}_1$ ,记其误差为 $\tilde{\ddot{x}}_1 = \ddot{x}_1 - \hat{\ddot{x}}_1 \triangleq \chi_{1,2}$ .则可得 $\dot{\phi}_1(\bar{x}_1, t)$ 估计值

$$\hat{\dot{\phi}}_1(\bar{x}_1, t) = \hat{\ddot{x}}_1 - x_3 - \hat{\phi}_2(\bar{x}_2, t). \quad (12)$$

结合式(10),其误差为

$$\begin{aligned} \tilde{\dot{\phi}}_1(\bar{x}_1, t) &= \dot{\phi}_1(\bar{x}_1, t) - \hat{\dot{\phi}}_1(\bar{x}_1, t) = \\ &\ddot{x}_1 - x_3 - \phi_2(\bar{x}_2, t) - \hat{\ddot{x}}_1 + x_3 + \hat{\phi}_2(\bar{x}_2, t) = \\ &\ddot{x}_1 - \hat{\ddot{x}}_1 - \phi_2(\bar{x}_2, t) + \hat{\phi}_2(\bar{x}_2, t) = \chi_{1,2} - \chi_{2,1}. \end{aligned}$$

即对于任意给定的正数 $\varpi_{1,1}$ ,总能找到两组设计参数 $\lambda_{1,N_1}, \lambda_{1,N_1-1}, \dots, \lambda_{1,0}$ 和 $\lambda_{2,N_2}, \lambda_{2,N_2-1}, \dots, \lambda_{2,0}$ 使得下式成立:

$$\begin{aligned} |\tilde{\dot{\phi}}_1(\bar{x}_1, t)| &= \\ |\chi_{1,2} - \chi_{2,1}| &< |\chi_{1,2}| + |\chi_{2,1}| < \varpi_{1,1}. \end{aligned} \quad (13)$$

**注 2** 很容易取一组参数 $\lambda_{1,n}, \lambda_{1,n-1}, \dots, \lambda_{1,0}$ 使式(11)和式(13)均成立.两者并不矛盾.下同.

同理可得

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_i(\bar{x}_i, t) &= \hat{\dot{x}}_i - x_{i+2} - \hat{\phi}_{i+1}(\bar{x}_{i+1}, t), \\ \tilde{\phi}_i(\bar{x}_i, t) &= \Xi_1(\chi_{i,2}, \chi_{i+1,1}), 2 \leq i \leq n - 2. \\ |\tilde{\phi}_i(\bar{x}_i, t)| &= \\ |\Xi_1(\chi_{i,2}, \chi_{i+1,1})| &< \varpi_{i,1}, 2 \leq i \leq n - 2. \end{aligned}$$

**Step j - 1** 依此类推,由数学归纳法可分别获得

$$\hat{\phi}_i^{(j-1)}(\bar{x}_i, t) = \hat{x}_i^{(j)} - x_{i+j} - \hat{\phi}_{i+j-1}(\bar{x}_{i+j-1}, t) -$$

$$\begin{aligned} &\hat{\phi}_{i+j-2}(\bar{x}_{i+j-2}, t) - \dots - \\ &\hat{\phi}_{i+1}^{(j-2)}(\bar{x}_{i+1}, t), \\ &1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq n - i. \end{aligned} \quad (14)$$

且对于任意给定正数 $\varpi_{i,j-1}$ ,总能取一组恰当的设计参数使得

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_i^{(j-1)}(\bar{x}_i, t)| &= \\ |\Xi_{j-1}(\chi_{i,j}, \chi_{i+1,j-1}, \dots, \chi_{i+j-1,1})| &< \varpi_{i,j-1}, \\ &1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq n - i. \end{aligned}$$

上式中 $\Xi_j$ 代表某一函数,当下标取值不同时,其具体形式不同,但按上述步骤可知 $\Xi_j$ 仅含加法运算.

特别地,对于 $\phi_i^{(n-i)}(\bar{x}_i, t)$ 的估计值可由下式得出:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_i^{(n-i)}(\bar{x}_i, t) &= \\ \hat{x}_i^{(n-i+1)} - \hat{x}_i^{(n-i)}, &1 \leq i \leq n - 1. \end{aligned} \quad (15)$$

### 5 控制器设计(Design of controller)

在式(6)中, $x_i^{(N_i+1)}$ 相当于HOSMD中的一种特殊干扰源.当 $N_i \geq n - i$ 时, $x_i^{(N_i+1)}$ 中含有微分项 $u^{(N_i-n+i)}$ .如果 $u^{(N_i-n+i)}$ 不存在,则定理1的条件无法满足,不能用定理1的结论和第4节中的方法来获取 $y_n$ 中非匹配项 $\phi_i^{(j)}(\bar{x}_i, t), 1 \leq i \leq n - 1, j = n - i$ .因此控制器的设计应当保证 $u^{(N_i-n+i)}$ 非奇异.

$\hat{\phi}_n(\bar{x}_n, t)$ 的求取,不仅存在上述困难,而且不能用 $\hat{\phi}_n(\bar{x}_n, t) = \hat{\dot{x}}_n - f(\bar{x}_n) - g(\bar{x}_n)u$ 来获得.因为 $\hat{\phi}_n(\bar{x}_n, t)$ 需由已知的 $u$ 解出,而 $u$ 的设计又需以 $\hat{\phi}_n(\bar{x}_n, t)$ 的获得为前提.同理, $\hat{\phi}_i^{(n-i)}(\bar{x}_i, t)(1 \leq i \leq n - 1)$ 只能由式(15)获得,而 $\hat{\phi}_i^{(j-1)}(\bar{x}_i, t)(1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq n - i)$ 则既可以由式(14)获得,又可以按式(15)所示方法获得.

为避免上述问题,设计如下控制器.

**定理 2** 对于非线性系统(1),设计滑模面如式(3)所示.再设计一组HOSMD如式(5)所示,且有 $N_i = n - i$ ,并按式(14)–(16)获得非匹配项及其各阶微分估计值.选择双曲正切函数(17)作为趋近滑模面的控制律,并设计滑模控制器式(18).则对于任意有界初始误差 $e_0(0)$ ,总是存在恰当的设计参数 $\lambda_{i,j}(1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N_i), c_i > 0(1 \leq i \leq n - 1)$ 以及Terminal设计参数 $p_i, q_i$ ,使得系统稳定且跟踪误差任意小.

$$\hat{\phi}_n(\bar{x}_n, t) = \hat{\dot{x}}_n - f(\bar{x}_n) - g(\bar{x}_n)u_1, \quad (16)$$

$$\Omega(\hat{\sigma}) = \frac{e^{a\hat{\sigma}} - e^{-a\hat{\sigma}}}{e^{a\hat{\sigma}} + e^{-a\hat{\sigma}}}, a > 0, \quad (17)$$

$$\begin{cases} u = u_1 + u_2, \\ u_1 = \\ g(\bar{\mathbf{x}}_n)^{-1}(-f(\bar{\mathbf{x}}_n) + y_d^{(n)} - \eta_1 \hat{\sigma} - \\ \eta_2 \Omega(\hat{\sigma}) - \sum_{i=1}^{n-1} [\hat{\phi}_i^{(j)}(\bar{\mathbf{x}}_i, t) + \varpi_{i,j} \Omega(\hat{\sigma})] - \\ \sum_{i=0}^{n-1} c_i (\hat{y}_i - y_d^{(i)} + \sum_{k=i-j}^i \varpi_{j,k} \Omega(\hat{\sigma}))), \\ u_2 = g(\bar{\mathbf{x}}_n)^{-1}(-\hat{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) - \\ \chi_{n,1} \Omega(\hat{\sigma}) - \varpi_{n,0} \Omega(\hat{\sigma})). \end{cases} \quad (18)$$

证 取Lyapunov函数为 $V = 0.5\sigma\sigma$ , 则

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma \dot{\sigma} = \\ &\sigma(e_n + c_{n-1}e_{n-1} + \cdots + c_1e_1 + c_0e_0) = \\ &\sigma(f(\bar{\mathbf{x}}_n) + g(\bar{\mathbf{x}}_n)u + \sum_{i=1}^n \phi_i^{(j)}(\bar{\mathbf{x}}_i, t) - \\ &y_d^{(n)} + c_{n-1}e_{n-1} + \cdots + c_1e_1 + c_0e_0). \end{aligned}$$

式(17)的双曲正切函数使得定理1的条件满足, 不会出现 $\hat{x}_i^{(N_i+1)}$ 奇异的情况, 又因为

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) &= \phi_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) - \hat{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) = \\ \dot{x}_n - f(\bar{\mathbf{x}}_n) - g(\bar{\mathbf{x}}_n)u - (\dot{x}_n - f(\bar{\mathbf{x}}_n) - g(\bar{\mathbf{x}}_n)u_1) &= \\ \dot{x}_n - \hat{x}_n + g(\bar{\mathbf{x}}_n)u_1 - g(\bar{\mathbf{x}}_n)u = \tilde{x}_n - g(\bar{\mathbf{x}}_n)u_2 &= \\ \tilde{x}_n + \hat{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) + \chi_{n,1} \Omega(\hat{\sigma}) + \varpi_{n,0} \Omega(\hat{\sigma}) &= \\ \tilde{x}_n + \hat{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) - \phi_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) + \phi_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) &+ \\ \chi_{n,1} \Omega(\hat{\sigma}) + \varpi_{n,0} \Omega(\hat{\sigma}) &= \\ \tilde{x}_n - \tilde{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) + \phi_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) + \chi_{n,1} \Omega(\hat{\sigma}) &+ \\ \varpi_{n,0} \Omega(\hat{\sigma}), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) &= 0.5(\tilde{x}_n + \phi_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) + \\ &\chi_{n,1} \Omega(\hat{\sigma}) + \varpi_{n,0} \Omega(\hat{\sigma})), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \\ &\sigma(f(\bar{\mathbf{x}}_n) - f(\bar{\mathbf{x}}_n) + y_d^{(n)} - \\ &\sum_{i=1}^{n-1} (\hat{\phi}_i^{(j)}(\bar{\mathbf{x}}_i, t) + \varpi_{i,j} \Omega(\hat{\sigma})) - \\ &\sum_{i=0}^{n-1} c_i (\hat{y}_i - y_d^{(i)} + \sum_{k=i-j}^i \varpi_{j,k} \Omega(\hat{\sigma})) - \\ &\eta_1 \hat{\sigma} - \eta_2 \Omega(\hat{\sigma}) - \hat{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) - \chi_{n,1} \Omega(\hat{\sigma}) - \\ &\varpi_{n,0} \Omega(\hat{\sigma}) + \sum_{i=1}^n \phi_i^{(j)}(\bar{\mathbf{x}}_i, t) - y_n^{(d)} + \sum_{i=0}^{n-1} c_i e_i) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sigma\left(\sum_{i=1}^{n-1} [\tilde{\phi}_i^{(j)}(\bar{\mathbf{x}}_i, t) - \varpi_{i,j} \Omega(\hat{\sigma})] + \right. \\ &\sum_{i=0}^{n-1} c_i (\tilde{y}_i - \sum_{k=i-j}^i \varpi_{j,k} \Omega(\hat{\sigma})) - \eta_1 \hat{\sigma} - \\ &\eta_2 \Omega(\hat{\sigma}) + \tilde{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) - \chi_{n,1} \Omega(\hat{\sigma}) - \varpi_{n,0} \Omega(\hat{\sigma})) = \\ &\sigma\left(\sum_{i=1}^{n-1} [\tilde{\phi}_i^{(j)}(\bar{\mathbf{x}}_i, t) - \varpi_{i,j} \Omega(\hat{\sigma})] + \right. \\ &\sum_{i=0}^{n-1} c_i (\tilde{y}_i - \sum_{k=i-j}^i \varpi_{j,k} \Omega(\hat{\sigma})) - \eta_1 \hat{\sigma} - \\ &\eta_2 \Omega(\hat{\sigma}) + 0.5(\tilde{x}_n + \phi_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) - \\ &\chi_{n,1} \Omega(\hat{\sigma}) - \varpi_{n,0} \Omega(\hat{\sigma})) = \\ &\sigma(\Theta - \eta_1 \hat{\sigma} - \eta_2 \Omega(\hat{\sigma}) + \\ &0.5(\phi_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) - \varpi_{n,0} \Omega(\hat{\sigma}))). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Theta &= \sum_{i=1}^{n-1} [\tilde{\phi}_i^{(j)}(\bar{\mathbf{x}}_i, t) - \varpi_{i,j} \Omega(\hat{\sigma})] + \\ &\sum_{i=0}^{n-1} c_i (\tilde{y}_i - \sum_{k=i-j}^i \varpi_{j,k} \Omega(\hat{\sigma})) + \\ &0.5(\tilde{x}_n - \chi_{n,1} \Omega(\hat{\sigma})). \end{aligned}$$

因式(17)所取的双曲正切函数有 $\Omega(-\sigma) = -\Omega(\sigma)$ , 即 $\Omega(\sigma) = \Omega(|\sigma|) \text{sgn} \sigma$ , 再由第3节分析可知总是存在 $n$ 组设计参数 $\lambda_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq N_i$ , 使得 $|\Theta|$ 任意小. 同理, 总存在 $\eta_1, \eta_2, \varpi_{n,0}$ 使得 $\Theta - \eta_1 \hat{\sigma} - \eta_2 \Omega(\hat{\sigma}) + 0.5(\phi_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t) - \varpi_{n,0} \Omega(\hat{\sigma}))$ 在 $\sigma$ 任意小的区域内均有 $\dot{V} < 0$ 成立, 又多项式 $e_n + c_{n-1}e_{n-1} + \cdots + c_1e_1 + c_0e_0$ 是Hurwitz的, 所以系统(1)的输出以任意精度渐近跟踪上期望值.

证毕.

**注3** 以上证明中, 认为HOSMD的收敛速度足够快, 其收敛到稳态的动态时间可忽略. 理论上, 对于给定的任意小的时间段, HOSMD总是能选择足够大的设计参数保证这一假设成立; 根据现有文献中的仿真或应用, 这一假设也是合理的.

**注4** 对于 $\hat{\phi}_n(\bar{\mathbf{x}}_n, t)$ 的获取, 另一个方法是直接采用神经网络或者模糊系统作为观测器逼近. 控制器的保守性会更低. 配合自适应律设计, 可使系统跟踪误差收敛于0. 目前文献中关于观测器的研究和结论非常多, 限于篇幅, 本文不再给出详细设计过程.

**注5** 为简化分析, 仅研究SISO系统. 对于MIMO系统, 有类似的结论成立.

### 6 仿真(Simulation)

考虑如下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \cos(2t), \\ \dot{x}_2 = x_3 + \cos(2t), \\ \dot{x}_3 = x_4 + \cos(3t), \\ \dot{x}_4 = x_1 \sin x_2 + x_3 \sin x_4 + u + \cos(4t). \end{cases}$$

初始状态分别为  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0, u(0) = 0$ . 设计参数取为  $c_0 = 30, c_1 = 25, c_2 = 20, c_3 = 15, c_4 = 15, \eta_1 = 60, \eta_2 = 80, a = 3, \lambda_{10} = 100, \lambda_{1,1} = 90, \lambda_{1,2} = 80, \lambda_{1,3} = 70, \lambda_{1,4} = 60, \lambda_{2,0} = 100, \lambda_{2,1} = 90, \lambda_{2,2} = 80, \lambda_{2,3} = 70, \lambda_{3,0} = 100, \lambda_{3,1} = 90, \lambda_{3,2} = 80, \lambda_{4,0} = 100, \lambda_{4,1} = 90, q_i = 5, p_i = 7, i = 1, 2, 3, 4, \chi_{i,1} = 0.1,$

$1 \leq i \leq 4, \varpi_{i,j} = 0.01, 1 \leq i \leq 3, j = n - i, \varpi_{i,j,k} = 0.01, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq i, k = i - j, \varpi_{n,0} = 5.$

仿真结果如图2所示. 在干扰存在的情况下, 图2(a)所示状态和图2(d)所示滑模面均能以较快速度收敛, 且精度较高, 达到了预期的控制目的. 由于滑模控制器中采用连续的双曲正切函数作为趋近控制律而在HOSMD最后一层滑模面中采用连续的Terminal吸引子函数代替符号函数, 所以图2的4幅图中, 特别是图2(b)所示控制器输出, 曲线都较为光滑理想, 没有一般滑模控制和一般的滑模微分器中存在的抖振现象. 图2(c)是HOSMD作为间接干扰观测器得到的未知量  $y_2$  的估计误差, 稳态时其值在  $10^{-5}$  数量级, 这是常规观测器难以达到的估计精度.

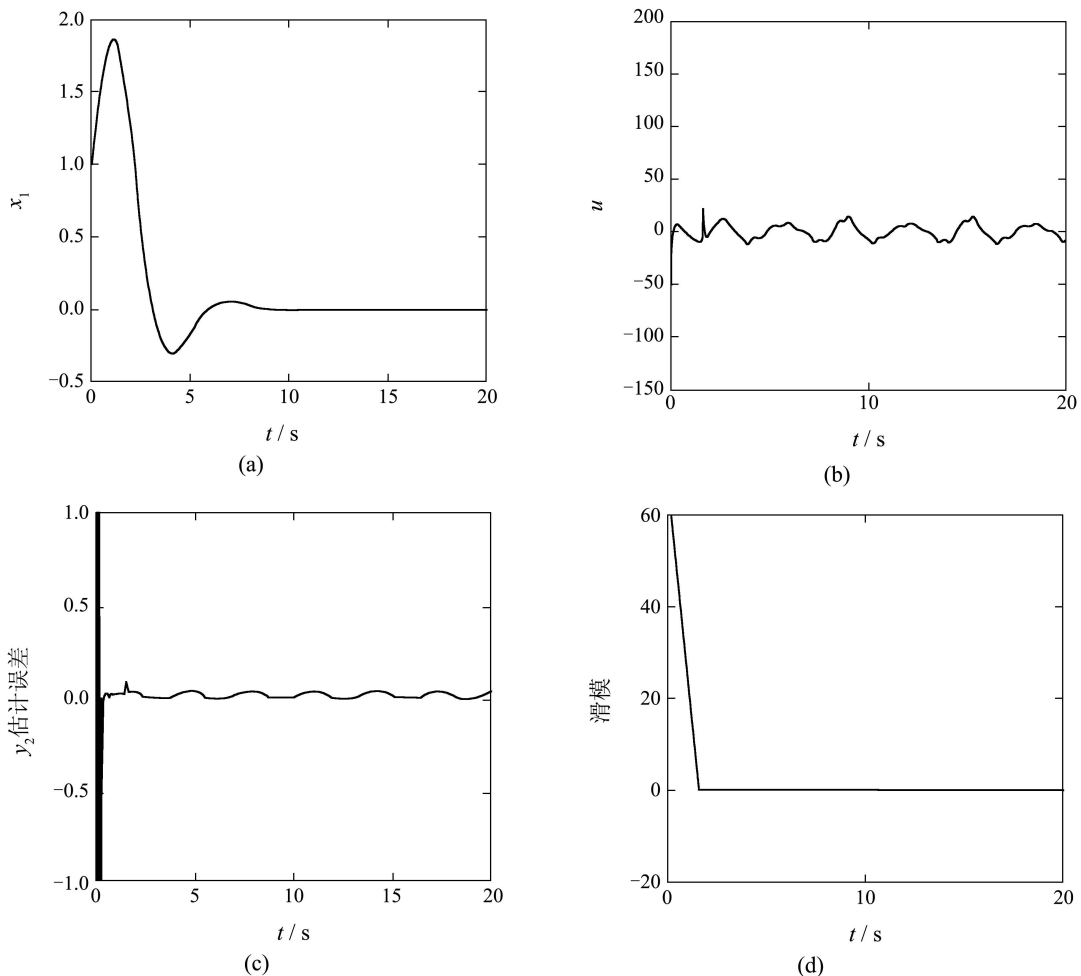


图 2 仿真结果

Fig. 2 simulation results

### 7 结论(Conclusion)

本文提出方案适用范围广: 对仿射非线性系统(1)普遍适用, 且适用于相对阶较大的系统. 实际上, 本文方法对更广义的如下系统同样适用:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_n) + g_i(\bar{x}_n)x_{i+1} + \phi_i(\bar{x}_i, t), \\ \quad 1 \leq i \leq n - 1, \\ \dot{x}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u + \phi_n(\bar{x}_n, t), \\ \mathbf{y} = \mathbf{x}_1, \end{cases}$$

其中:  $f_i(\bar{x}_n)$ ,  $g_i(\bar{x}_n)$ 已知,  $f_i^{(j)}(\bar{x}_n)$ ,  $g_i^{(j)}(\bar{x}_n)$ ,  $\phi_i(\bar{x}_i, t)$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $j \geq 1$ 未知.

收敛速度快: 首先是滑模控制器收敛速度快, 这是滑模区别于其他现代控制方法的显著标志. 其次HOSMD每一层均具有Terminal滑模的形式, 所以滑模微分器作为观测器收敛速度快, 而且在靠近平衡点阶段, 这一优势更加明显. 这在仿真中也有体现.

控制精度高: 滑模控制具有优异的鲁棒性, 其次, HOSMD的估计精度不论是理论证明还是仿真结果均具有极优秀的表现.

运算量小: 一个滑模面的运算量仅相当于一个PID或一个神经元的运算量.

保守性低: 在文献[11-13]中, 要求如下假设成立:

$$\begin{aligned} & |\phi_i(\bar{x}_i, t)| + |\dot{\phi}_{i-1}(\bar{x}_i, t)| + \dots + \\ & |\phi_1^{(i-1)}(\bar{x}_i, t)| \leq b_{i-1}, 1 \leq i \leq n-1, \\ & |\dot{\phi}_{n-1}(\bar{x}_i, t)| + |\ddot{\phi}_{n-2}(\bar{x}_i, t)| + \dots + \\ & |\phi_1^{(n-1)}(\bar{x}_i, t)| \leq b_n, \end{aligned}$$

其中 $b_{i-1}$ ,  $b_n$ 均为某一已知正数. 首先, 该假设条件的成立较为困难. 实际系统中, 干扰往往是未知的. 干扰的任意阶导数上界已知这一点更是难以成立. 其次, 即使考虑上述两条假设成立, 文章的控制采用大增益方案, 即将控制器增益设计得足够大, 大于 $b_{i-1}$ ,  $b_n$ 以保证系统收敛. 这种方法也存在如下问题: 第一, 对于干扰快变的系统,  $b_{i-1}$ ,  $b_n$ 会非常大, 那么控制器增益也需要非常大, 这在应用中会引起控制器抖振, 甚至让系统不稳定; 第二, 控制器增益是相对上界 $b_{i-1}$ ,  $b_n$ 来设计的, 当干扰不大的时候, 过量的控制输出作用在被控系统上, 起到的效果和干扰一样. 而本文的方法是高精度的逼近干扰, 然后设计对应的控制项, 所以控制器是根据干扰的变化有针对性地输出. 因此所提出方案保守性低.

## 参考文献(References):

- [1] 袁性忠, 姜新建. 基于滑模变结构的倒立摆系统稳定控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 720-723. (YUAN Xingzhong, JIANG Xinjian. Stabilizing control of inverted pendulum using sliding mode control scheme [J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(5): 720-723.)
- [2] 张军. 近空间飞行器非线性不确定飞行运动的鲁棒自适应控制[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2009. (ZHANG Jun. *Robust adaptive control for nonlinear uncertain flight moving systems of near space vehicle* [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009.)
- [3] RASHED M, GOH K B, DUNNIGAN M W. Sensorless second-order sliding-mode speed control of a voltage-fed induction-motor drive using nonlinear state feedback [J]. *Electric Power Applications*, 2005, 152(5): 1127-1136.
- [4] PIEPER J. First order dynamic sliding mode control [C] // *Proceed-*

- ings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Florida: IEEE, 1998: 2415-2420.
- [5] 高为炳. 变结构控制理论基础[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 1990. (GAO Weibing. *Theoretical Basis of Variable Structure Control* [M]. Beijing: China Science and Technology Press, 1990.)
- [6] NIU Y, LAM J, WANG X. Sliding-mode control for nonlinear state-delayed systems using neural-network approximation [J]. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 2003, 150(3): 233-239.
- [7] HAN H C. An LMI-based switching surface design method for a class of mismatched uncertain systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(9): 1634-1638.
- [8] CAO W J, XU J X. Nonlinear integral-type sliding surface for both matched and unmatched uncertain systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(8): 1355-1360.
- [9] FERNANDO C, LEONID F. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(5): 853-858.
- [10] 李俊, 徐德民. 非匹配不确定非线性系统的自适应反演滑模控制[J]. 控制与决策, 1999, 14(1): 46-50. (LI Jun, XU Demin. Adaptive sliding mode controller for nonlinear systems with mismatched uncertainties based on adaptive backstepping scheme [J]. *Control and Decision*, 1999, 14(1): 46-50.)
- [11] STOSKY A, HEDRICK J K, YIP P P. The use of sliding mode to simplify the backstepping control method [C] // *Proceedings of the 1997 American Control Conference*. New Mexico: American Automatic Control Council, 1997: 1703-1708.
- [12] 李俊, 罗凯, 黄心汉. 非匹配非线性系统的多模变结构控制[J]. 华中理工大学学报, 1999, 27(3): 84-86. (LI Jun, LUO Kai, HUANG Xinhan. A multi-mode VS controller of nonlinear systems with non-matched uncertainties [J]. *Journal of Huangzhong University of Science and Technology*, 1999, 27(3): 84-86.)
- [13] 余昌华, 谢明江, 谢剑英. 非匹配不确定非线性系统的滑模跟踪控制[J]. 上海交通大学学报, 2001, 35(8): 1141-1147. (YU Changhua, XIE Mingjiang, XIE Jianying. Sliding mode tracking control of nonlinear systems with non-matched uncertainties [J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2001, 35(8): 1141-1147.)
- [14] ABDOLLAHI F, TALEBI H A, PATEL R V. A stable neural network-based observer with application to flexible-joint manipulators [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006, 17(1): 118-129.
- [15] TSENG C S, CHEN B S. Robust fuzzy observer-based fuzzy control design for nonlinear discrete-time systems with persistent bounded disturbances [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, 17(3): 711-722.
- [16] CHEN W H. Nonlinear disturbance observer-enhanced dynamic inversion control of missiles [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2003, 26(1): 161-166.
- [17] LEVANT A. High-order sliding modes, differentiation and output-feedback control [J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(9/10): 924-941.

## 作者简介:

蒲明 (1981-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为滑模控制、飞行器控制, E-mail: msznuaa@163.com;

吴庆宪 (1955-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为飞行器控制、非线性控制, E-mail: wuqingxian@nuaa.edu.cn;

姜长生 (1942-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为飞行器控制、非线性控制, E-mail: jiangcs@nuaa.edu.cn;

王宇飞 (1984-), 男, 博士研究生, 主要研究方向为模糊控制、飞行器控制, E-mail: wangyf@nuaa.edu.cn.