

一种复非线性系统的动力学特性和同步分析

据宏昌, 李红远

(广西工学院 鹿山学院 土木工程系, 广西 柳州 545616)

摘要: 本文介绍一种新复非线性系统并研究它的动力学特性(包括不变量、耗散度、平衡和稳定性、Lyapunov指数、混沌行为、混沌吸引子), 以及该系统产生混沌的必要条件, 发现在一定参数条件下, 系统存在2个或4个螺线形混沌吸引子, 通过研究驱动系统和响应系统的关系, 导出了混沌同步的控制函数显式表达式. Lyapunov函数分析证明, 系统误差是渐近稳定的, 控制函数可以使主动系统和响应系统完全同步.

关键词: 混沌; 吸引子; 同步; 主动控制; 平衡和稳定性

中图分类号: O415.5, O231.2 **文献标识码:** A

Dynamical properties and synchronization analysis for a complex nonlinear systems

QU Hong-chang, LI Hong-yuan

(Department of Civil Engineering, Lushan College of Guangxi University of Technology, Liuzhou Guangxi 545616, China)

Abstract: This paper introduces a new complex nonlinear system and studies their dynamic properties including the invariance, dissipativity, equilibria of stability, Lyapunov exponents, chaotic behaviors, chaotic attractors, along with necessary conditions for this system to generate a chaos. It is found that there are 2 or 4-scroll chaotic attractors for certain values of system parameters. Chaos synchronization of these attractors is studied via the active control, and explicit expressions for control functions to achieve chaos synchronization are derived. By using Lyapunov function, we prove that the error system is asymptotically stable, and the control function can completely synchronize both the active system and the response system.

Key words: chaos; attractor; synchronization; active control; equilibria of stability

1 引言(Introduction)

最近20年来, 大量动力学系统(如涉及实变量的系统)的物理特性已经成为研究确定非线性系统动力学特性和混沌同步的热点. 然而, 也存在一些没有被深入探索的涉及复变量的情况, 如本文所研究的用于描述和模拟失调激光物理和流体热传导的复杂的Lorenz方程, 其电场振幅和原子极化振幅都是复数^[1]. 复Chen和Lu混沌系统在文献[2]中也已经作了介绍和研究.

在2002年, Liu和Chen^[3]介绍了一种形式为

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + b_1yz, \\ \dot{y} = a_2y + b_2xz, \\ \dot{z} = a_3z + b_3xy \end{cases} \quad (1)$$

的实混沌非线性系统, 其中 a_i 和 b_i ($i = 1, 2, 3$)是实常数, 并设计了一个电路来实现系统(1). 该系统的混沌行为显示了2个和4个螺形线混沌吸引子^[4]. 具有参数

$$\begin{aligned} a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = c, \quad b_1 = -1, \\ b_2 = b_3 = 1, \quad a, b, c > 0 \end{aligned}$$

的系统(1)构建了Lorenz吸引子和Chen吸引子相互联系的桥梁^[5]. 该系统在系数为 $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c, b_1 = -1, b_2 = 1, b_3 = 1/3, a, b, c > 0$ 的情况下, 也可用于描述刚体(如卫星、飞船和火箭)的运动问题.

文献[6-8]研究了方程(1)的特殊情况的动力学行为和混沌同步问题. 文献[8]介绍了几种研究混沌非线性系统的混沌同步的方法. 本文将研究系统

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + b_1yz, \\ \dot{y} = a_2y + b_2xz, \\ \dot{z} = a_3z + \frac{b_3}{2}(\bar{x}y + x\bar{y}) \end{cases} \quad (2)$$

描述的复非线性系统的动力学特性和混沌同步现象, 其中 $x = u_1 + iu_2, y = u_3 + iu_4$ 是复变量, $i = \sqrt{-1}$, 而 $z = u_5$ 是实变量. 点表示对时间的导数, 而上划线(\bar{u})表示 u 的复共轭.

2 系统(2)的动力学特性(Dynamical properties of system (2))

本节对系统(2)进行基本动力学分析. 与复系统(2)相应的的实系数系统为

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = a_1 u_1 + b_1 u_3 u_5, \\ \dot{u}_2 = a_1 u_2 + b_1 u_4 u_5, \\ \dot{u}_3 = a_2 u_3 + b_2 u_1 u_5, \\ \dot{u}_4 = a_2 u_4 + b_2 u_2 u_5, \\ \dot{u}_5 = a_3 u_5 + b_3 (u_1 u_3 + u_2 u_4). \end{cases} \quad (3)$$

系统(3)具有下列特性:

1) 对称性.

由于转换 $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \rightarrow (-u_1, -u_2, -u_3, -u_4, u_5)$ 时方程的不变性, 故系统关于 u_5 轴对称.

因 $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \rightarrow (u_1, u_2, -u_3, -u_4, -u_5)$ 或 $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \rightarrow (-u_1, -u_2, u_3, u_4, -u_5)$ 时运动方程不改变, 故系统关于 u_1, u_2 轴(或 u_3, u_4 轴)对称.

2) 耗散性.

式(3)的散度是

$$\nabla F = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial u_i} = 2a_1 + 2a_2 + a_3. \quad (4)$$

只要

$$2a_1 + 2a_2 + a_3 < 0, \quad (5)$$

系统(3)或(2)是耗散的.

3) 平衡和稳定性.

可以通过求解方程 $\dot{u} = 0 (i = 1, 2, \dots, 5)$ 来计算式(3)的平衡. 系统(3)有5个平衡点: $E_0 = (0, 0, 0, 0, 0)$, $E_{1,2} = (\pm u_1^*, \pm u_2^*, \pm u_3^*, \pm u_4^*, -u_5^*)$, $E_{3,4} = (\pm u_1^*, \pm u_2^*, \mp u_3^*, \mp u_4^*, u_5^*)$, 对于 $u_1^* = u_2^*$ 和 $u_3^* = u_4^*$ 的情况, 其中:

$$u_1^* = u_2^* = \sqrt{\frac{a_2 a_3}{2b_2 b_3}}, \quad u_3^* = u_4^* = \sqrt{\frac{a_1 a_3}{2b_1 b_3}}, \quad u_5^* = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}}.$$

如果

$$\frac{a_2 a_3}{b_2 b_3} > 0, \quad \frac{a_1 a_3}{b_1 b_3} > 0, \quad \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} > 0, \quad (6)$$

则存在非平凡平衡解.

在 E_0 处, 相关线性系统的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = a_1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = a_2$ 和 $\lambda_5 = a_3$. 如果

$$a_1 < 0, \quad a_2 < 0, \quad a_3 < 0, \quad (7)$$

平衡点 E_0 是稳定的, 否则是不稳定的. 而在 $E_i (i = 1, \dots, 4)$ 时, 特征值是

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_{4,5} = \frac{1}{2}(c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2}), \quad (8)$$

其中: $c_1 = 2a_1 + 2a_2 + a_3$, $c_2 = (a_1 + a_2)(a_1 + a_2 +$

$a_3)$.

系统(2)产生混沌的必要条件是式(5)–(6)保持不变, 而 E_0 是一个不稳定平衡点. 为了满足这些条件, 参数 $a_i, b_i (i = 1, 2, 3)$ 有许多种选择, 其中之一是 $a_1 = a > 0$, $a_2 = -b < 0$ 和 $a_3 = -c < 0$, $a, b, c > 0$ (a_1, a_2, a_3 中的一个或两个必须是正的, 而另一个为负值), $b_1 = -\delta_1 < 0$, $b_2 = \delta_2 > 0$ 和 $b_3 = \delta_3 > 0$, $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$ (b_1, b_2, b_3 的一个或两个必须是正的, 而另一个为负值).

由以上分析可得系统(3)的不动点为

$$(0, 0, 0, 0, 0),$$

$$\begin{aligned} & (\pm u_1^*, \pm \sqrt{\frac{a_2 a_3}{2b_2 b_3}} - u_1^{*2}, \pm \sqrt{\frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}} u_1^*, \\ & \pm \sqrt{\frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}} \sqrt{\frac{a_2 a_3}{b_2 b_3}} - u_1^{*2}, -\sqrt{\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}}) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & (\pm u_1^*, \pm \sqrt{\frac{a_2 a_3}{b_2 b_3}} - u_1^{*2}, \mp \sqrt{\frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}} u_1^*, \\ & \mp \sqrt{\frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}} \sqrt{\frac{a_2 a_3}{b_2 b_3}} - u_1^{*2}, \sqrt{\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}}), \end{aligned}$$

其中 $u_1^* \in (0, \sqrt{\frac{a_2 a_3}{b_2 b_3}})$ 的特殊情况.

4) Lyapunov指数.

系统(3)的向量表达式为

$$\dot{U}(t) = H(U(t); \eta), \quad (9)$$

其中: $U(t) = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_5]^T$, $H = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_5]^T$, η 是一组参数, 而 $[\cdot]^T$ 表示表示矩阵转置. 由轨迹 $U(t)$ 发生微小偏差 δU 的线性化变分方程为

$$\delta \dot{U}(t) = L_{ij}(U(t); \eta) \delta U, \quad (10)$$

其中 $L_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial u_j}$ 是Jacobian矩阵:

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 u_5 & 0 & b_1 u_3 \\ 0 & a_1 & 0 & b_1 u_5 & b_1 u_4 \\ b_2 u_5 & 0 & a_2 & 0 & b_2 u_1 \\ 0 & b_2 u_5 & 0 & a_2 & b_2 u_2 \\ b_3 u_5 & b_3 u_4 & b_3 u_1 & b_3 u_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

系统的Lyapunov指数 λ_i 由文献[9]定义:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\delta u_i(t)\|}{\|\delta u_i(0)\|}. \quad (11)$$

为了找到 λ_i , 使用四阶简单的Runge-Kutta方法来数值求解方程(9)和(10).

对于 $a = 9.5$, $b = 19$, $c = 3$, $b_1 = -1$, $b_2 = b_3 = 1$, Lyapunov指数为: $\lambda_1 = 3.498349$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -13.705292$, $\lambda_5 = -21.531656$. 这意味着: 由于在 a_i 和 b_i 这样的取值情况下, 系统(3)的

一个Lyapunov指数是正值, 因此该系统处于混沌状态. 通过绘制两个相邻轨线的分离图, 可以直观显示这个系统的混沌行为. 图1是在初始条件附近, 系统(3)的两个计算结果, 反映了系统对初始条件的敏感依赖性.

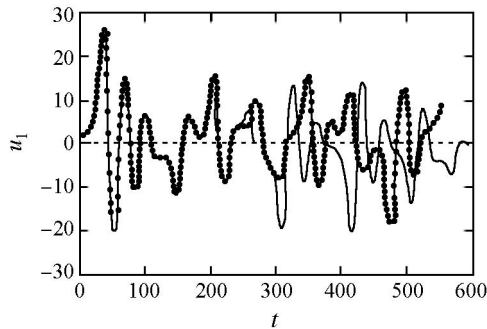
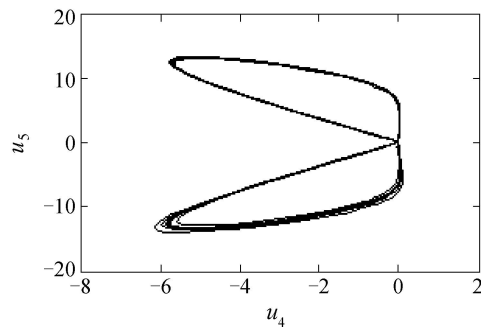


图1 方程(3)数值解对初始条件的依赖性
Fig. 1 Dependence on the initial conditions for two computed solutions of equations (3)

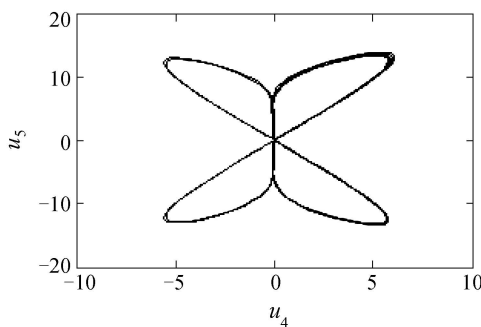
5) 混沌吸引子.

在上述条件下, 计算系统(3)的混沌吸引子的参数值.

固定 $b = 19, c = 3, b_1 = -1, b_2 = b_3 = 1$ 而改变 a . 对于较小的参数 a 的值, 系统具有2或4个螺形线混沌吸引子. 例如, 对 $a = 0.1226$, 系统(2)有2个螺形线混沌吸引子, 如图2(a), 而对于 $a = 0.1225$, 它具有一个4螺形线混沌吸引子, 如图2(b).



(a) $a = 0.1226$, 2螺形线吸引子



(b) $a = 0.1225$, 4螺形线吸引子

图2 方程(3)的混沌吸引子

Fig. 2 Chaotic attractors of equation (3)

固定

$$a = 9.5, c = 3, b_1 = -1, b_2 = b_3 = 1$$

改变 b , 系统(2)在 $8 < b < 100$ 时, 存在2个螺形线混沌吸引子.

固定

$$a = 9.5, b = 19, b_1 = -1, b_2 = b_3 = 1$$

改变 c , 系统(2)在 $0 < c < 16$ 时, 存在2个螺形线混沌吸引子.

3 系统(2)的混沌同步性(Chaos synchronization of system(2))

本节研究系统(2)在参数值

$$a_1 = a, a_2 = -b, a_3 = -c, a, b, c > 0, \\ b_1 = -1, b_2 = b_3 = 1$$

条件下的混沌同步. 系统(2)在该参数条件下为

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - yz, \\ \dot{y} = -by + xz, \\ \dot{z} = -cz + \frac{1}{2}(xy + x\bar{y}). \end{cases} \quad (12)$$

主动控制技术的思想^[10-13]为: 假定存在两个同样的复混沌系统, 且带有下标 d 的驱动系统控制带有下标 r 的响应系统.

设计一个控制器, 使响应系统跟随驱动系统, 最终两者完全同步. 对于系统(12), 驱动和响应系统分别定义为

$$\begin{cases} \dot{x}_d = ax_d - y_d z_d, \\ \dot{y}_d = -by_d + x_d z_d, \\ \dot{z}_d = -cz_d + \frac{1}{2}(x_d y_d + x_d \bar{y}_d), \\ \dot{x}_r = ax_r - y_r z_r + (v_1 + iv_2), \\ \dot{y}_r = -by_r + x_r z_r + (v_3 + iv_4), \\ \dot{z}_r = -cz_r + \frac{1}{2}(x_r y_r + x_r \bar{y}_r) + v_5. \end{cases} \quad (14)$$

其中: $x_d = u_{1d} + iu_{2d}, y_d = u_{3d} + iu_{4d}$ 是复状态变量, $z_d = u_{5d}$ 是实状态变量, $x_r = u_{1r} + iu_{2r}, y_r = u_{3r} + iu_{4r}$ 和 $z_r = u_{5r}, \bar{u}$ 表示复共轭变量, 而 $v_1 + iv_2, v_3 + iv_4$ 和 v_5 分别是需要确定的复和实控制函数.

复系统(13)可重新表示为一个5实数的一阶ODE, 其形式为

$$\begin{cases} \dot{u}_{1d} = au_{1d} - u_{3d}u_{5d}, \\ \dot{u}_{2d} = au_{2d} - u_{4d}u_{5d}, \\ \dot{u}_{3d} = -bu_{3d} + u_{1d}u_{5d}, \\ \dot{u}_{4d} = -bu_{4d} + u_{2d}u_{5d}, \\ \dot{u}_{5d} = -cu_{5d} + (u_{1d}u_{3d} + u_{2d}u_{4d}). \end{cases} \quad (15)$$

为了得到主动控制信号, 定义被控制响应系统和控制驱动系统之间的误差状态为

$$\begin{cases} e_{u_1} + ie_{u_2} = \\ x_r - x_d = (u_{1r} - u_{1d}) + i(u_{2r} - u_{2d}), \\ e_{u_3} + ie_{u_4} = \\ y_r - y_d = (u_{3r} - u_{3d}) + i(u_{4r} - u_{4d}), \\ e_{u_5} = z_r - z_d = (u_{5r} - u_{5d}). \end{cases} \quad (16)$$

方程(14)减去方程(13), 并利用式(16), 得

$$\begin{cases} \dot{e}_{u_1} + i\dot{e}_{u_2} = \\ a(e_{u_1} + ie_{u_2}) - u_{5d}(e_{u_3} + \\ ie_{u_4}) - e_{u_5}(u_{3r} + iu_{4r}) + (v_1 + iv_2), \\ \dot{e}_{u_3} + i\dot{e}_{u_4} = \\ -b(e_{u_3} + ie_{u_4}) - u_{5d}(e_{u_1} + \\ ie_{u_2}) + e_{u_5}(u_{1r} + iu_{2r}) + (v_3 + iv_4), \\ \dot{e}_{u_5} = \\ -ce_{u_5} + u_{1r}e_{u_3} + u_{2r}e_{u_4} + \\ u_{3d}e_{u_1} + u_{4d}e_{u_2} + v_5. \end{cases} \quad (17)$$

方程(17)描述了一个“误差”随着时间改变的力学系统, 该系统的ODE的实数形式可表示为

$$\begin{cases} \dot{e}_{u_1} = ae_{u_1} - u_{5d}e_{u_3} - u_{3r}e_{u_5} + v_1, \\ \dot{e}_{u_2} = ae_{u_2} - u_{5d}e_{u_4} - u_{4r}e_{u_5} + v_2, \\ \dot{e}_{u_3} = -be_{u_3} + u_{5d}e_{u_1} + u_{1r}e_{u_5} + v_3, \\ \dot{e}_{u_4} = -be_{u_4} + u_{5d}e_{u_2} + u_{2r}e_{u_5} + v_4, \\ \dot{e}_{u_5} = -ce_{u_5} + u_{1r}e_{u_3} + u_{2r}e_{u_4} + \\ u_{3d}e_{u_1} + u_{4d}e_{u_2} + v_5. \end{cases} \quad (18)$$

对于参数 a, b 和 $c(a, b, c > 0)$, 存在一个Lyapunov函数, 其形式为

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 e_{u_i}^2. \quad (19)$$

沿着系统(18)的解答, $V(t)$ 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & a(e_{u_1}^2 + e_{u_2}^2) - b(e_{u_3}^2 + e_{u_4}^2) - \\ & ce_{u_5}^2 + \sum_{i=1}^5 v_i e_{u_i} + 2u_{1r}e_{u_3}e_{u_5} + \\ & 2u_{2r}e_{u_4}e_{u_5} - e_{u_1}e_{u_3}e_{u_5} - e_{u_2}e_{u_4}e_{u_5}. \end{aligned} \quad (20)$$

对于主动控制函数而言, 存在多种选择. 如果选择控制输入函数 v_i 为

$$\begin{cases} v_1 = -ae_{u_1}, v_2 = -ae_{u_2}, \\ v_3 = (-2u_{1r} + e_{u_1})e_{u_5}, \\ v_4 = (-2u_{2r} + e_{u_2})e_{u_5}, v_5 = 0, \end{cases} \quad (21)$$

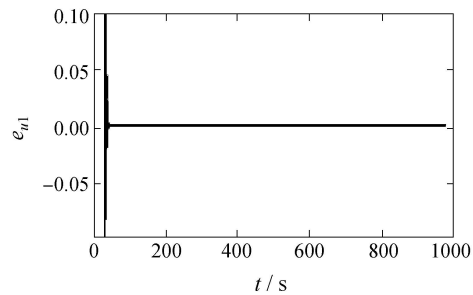
则方程(20)成为

$$\dot{V}(t) = -b(e_{u_3}^2 + e_{u_4}^2) - ce_{u_5}^2 < 0. \quad (22)$$

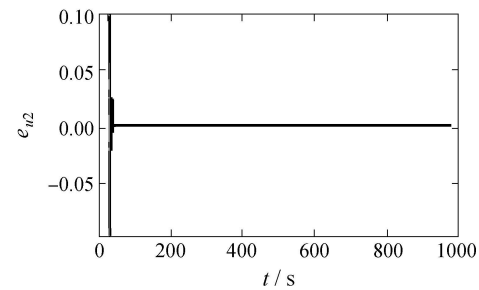
由于 $V(t)$ 是一个正定函数, 而它的导数是一个负定的, 直接意味着系统(18)的平衡点 $e_{u_i} = 0, i = 1, \dots, 5$ 是渐近稳定的, 即: 当 $t \rightarrow \infty, i = 1, \dots, 5$ 时, $e_{u_i} = 0$.

对应于图2(a)的2个螺形线混沌吸引子, 系统(12)在以下情况下, 运用方程(21), 数值求解系统(13)和(14): 参数 $a = 9.5, b = 19, c = 3$; 初始条件为 $t_0 = 0, u_{1d}(0) = 2, u_{2d}(0) = 1, u_{3d}(0) = -5, u_{4d}(0) = 3, u_{5d}(0) = -4$ 及 $u_{1r}(0) = -2, u_{2r}(0) = -1, u_{3r}(0) = 5, u_{4r}(0) = -3, u_{5r}(0) = 4$. 计算结果表明: 2个螺形线混沌吸引子在经过很短的10s后, 就达到了混沌同步. 该混沌吸引子的同步误差(式(18)的解答)见图3.

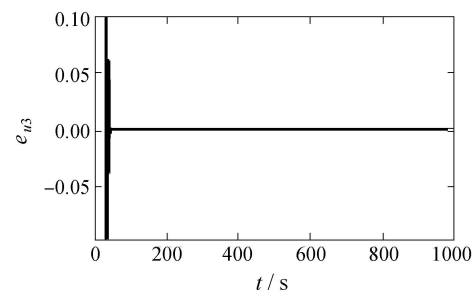
图3清楚表明: 同步误差 e_{u_i} 将在很短时间内收敛于零. 可同理证明, 与4个螺形线混沌吸引子相应的两个系统, 也混沌同步.



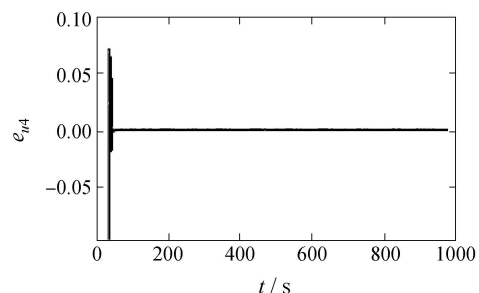
(a) (e_{u1}, t)



(b) (e_{u2}, t)



(c) (e_{u3}, t)



(d) (e_{u4}, t)

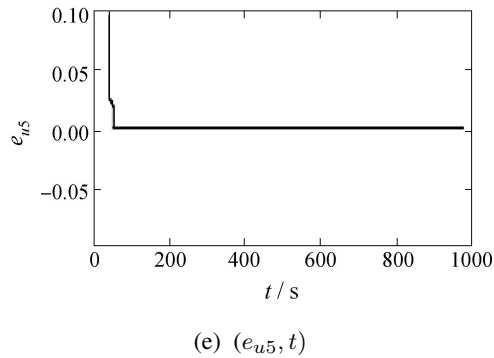


图3 系统(13)和(14)的同步误差(式(18)的解答)

Fig. 3 Synchronization errors of systems (13) and (14) (solutions of system (18))

4 结论(Conclusion)

本文研究了一种新混沌复非线性系统(方程(2))的动力学行为及控制技术. 在最近的文献中, 已经介绍和研究了这个系统在实变量条件下的动力学行为. 在许多重要的工程应用中要使用复数的系统, 如在通信中, 双倍的变量数(通过引入复变量)可以增加传输信息的信息量及安全性. 通过研究该系统的基本特性(包括不变性、耗散性、平衡和稳定性、Lyapunov指数、混沌行为和混沌吸引子), 得到了该系统产生混沌的必要条件. 通过对比驱动系统和响应系统的关系, 得到了混沌同步的控制函数显式表达式. Lyapunov函数分析证明, 驱动系统和响应系统的混沌同步误差是渐近稳定的, 控制函数可以使驱动系统和响应系统完全同步.

参考文献(References):

- [1] NING C Z, HAKEN H. Detuned lasers and the complex Lorenz equations: Subcritical and supercritical Hopf bifurcations [J]. *Physical Review A*, 1990, 41(6): 3826 – 3837.
- [2] RAUH A, HANNIBAL L, ABRAHAM N. Global stability properties of the complex Lorenz model [J]. *Physica D*, 1996, 99(1): 45 – 58.
- [3] LIU W B, CHEN G R. A new chaotic system and its generation [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2003, 13(1): 26 – 267.

- [4] SUN J. Impulsive control of a new chaotic system [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2004, 64(6): 669 – 677.
- [5] LU J, CHEN G, CHENG D, et al. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(8): 2917 – 2926.
- [6] ELABBASY E M, AGIZA H N, EL-DESSOKY M. Global synchronization criterion and adaptive synchronization for new chaotic system [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2005, 23(10): 1299 – 1309.
- [7] LIU W, CHEN G. Can a three-dimensional smooth autonomous quadratic chaotic system generate a single fourscroll attractor [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14(4): 1395 – 1403.
- [8] MAHMOUD G M, ALY S A, FARGHALY A A. On chaos synchronization of a complex two coupled dynamo system [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2007, 33(1): 178 – 187.
- [9] 吴晓群, 陆君安, 谢进. 用采样数据反馈控制统一混沌系统到平衡点 [J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(6): 889 – 893. (WU Xiaoqun, LU Jun'an, XIE Jin. Control unified chaotic system to equilibrium points using sampled data feedback [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 889 – 893.)
- [10] 张群力. 环状脉冲控制下的多个混沌系统同步 [J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(2): 226 – 232. (ZHANG Qunli. Synchronization of multi-chaotic systems via ring impulsive control [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(2): 226 – 232.)
- [11] 宋运忠, 赵光宙, 齐冬莲. 混沌吕系统的约束控制 [J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(5): 795 – 798. (SONG Yunzhong, ZHAO Guangzhou, QI Donglian. Constrained control of chaotic Lu system [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 795 – 798.)
- [12] 宋莹, 陈增强, 袁著祉. 基于混沌优化的非线性预测控制器 [J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(4): 561 – 564. (SONG Ying, CHEN Zengqiang, YUAN Zhuzhi. A nonlinear predictive controller based on chaos optimization [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(4): 561 – 564.)
- [13] UCAR A, LONNGREN K E, BAI E W. Synchronization of the unified chaotic systems via active control [J]. *Chaos Solitons Fractals*, 2006, 27(5): 1292 – 1297.

作者简介:

据宏昌 (1965–), 男, 硕士生导师, 副教授, 目前研究方向为非线性控制、混杂系统, E-mail: qhc410603@126.com;

李红远 (1981–), 男, 讲师, 目前研究方向为非线性控制、计算力学, E-mail: cnlihongyuan@gmail.com.