

# 基于特征模型自适应方法的一类最小相位 非线性系统稳定性分析

王 勇

(北京控制工程研究所 空间智能控制技术国家级重点实验室, 北京 100190)

**摘要:** 在特征建模理论中, 由全系数自适应控制器组成的闭环系统是一个非常复杂的混合系统, 采用传统自适应框架难以进行分析, 因此, 稳定性分析一直是该领域的一个难点. 本文以一类最小相位、相对阶为2的单输入单输出(SISO)高阶非线性系统为例, 通过一种新的特征建模方法, 把高阶混合系统变换为一个含有稳定未建模误差的、参数有界慢时变的采样间接自适应控制问题, 并利用基于欧拉近似离散化模型的采样系统稳定性分析方法进行了系统分析. 该方法可进一步推广到任意相对阶的SISO或多输入多输出(MIMO)系统甚至无限维最小相位系统中去.

**关键词:** 自适应控制; 全系数自适应控制; 特征模型; 采样系统  
**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## Stability analysis of characteristic model-based adaptive method for a class of minimum-phase nonlinear system

WANG Yong

(Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China)

**Abstract:** In the characteristic modeling theory, the closed-loop system composed of all-coefficient adaptive controller is a complex hybrid system that can not be analyzed in the framework of traditional adaptive control theory, leaving the stability analysis a long-time difficult problem to be solved. This paper investigates a class of minimum phase, single input single output (SISO)  $n$ th-order nonlinear system with second relative degree, and proposes a systematic stability analysis framework which transforms the higher order hybrid system to an indirect adaptive control problem with unmodeled dynamics and bounded, slowly varying parameters. Furthermore, this framework can be extended to more complex systems such as the SISO, multi-input multi-output (MIMO), and infinite-dimensional minimum phase systems with higher relative degree.

**Key words:** adaptive control; all-coefficient adaptive control; characteristic model; sampled-data system

### 1 引言(Introduction)

20世纪90年代, 吴宏鑫院士提出了特征建模思想和基于特征模型的全系数自适应控制方法, 该方法从控制角度出发, 不过分依赖于精确建模, 而是根据复杂的动力学模型重新构建反映控制要求和系统主要输入输出关系、在形式上更为简洁的特征模型, 并基于此模型采用全系数自适应控制方法进行控制器设计, 形成一套完整的建模和控制理论. 经过近20年的不断发展, 该理论和方法在建模和控制两方面均取得了很大的进展, 成功应用于9大类400多个系统. 相关专著和重要综述可参见文献[1-2]. 由于其简单易行, 在许多工程实际中得到成功应用, 但是对于具体的稳定性分析却造成了极大困难, 总结起来主要有以下几个难点:

1) 被控对象为连续系统而控制器为离散系统, 整个系统为复杂的混合系统, 基于近似离散化模型设计的控制器不一定能保证原系统的稳定性<sup>[3]</sup>.

2) 被控对象为各种形式的复杂的高阶线性或非线性系统, 而特征模型为较为统一的简单的线性差分方程, 这种在被控对象与辨识模型之间结构性的差异无法利用现有的自适应方法分析, 本文称为结构不匹配问题.

3) 在闭环系统中涉及混合辨识、区域稳定性、时变、非线性等问题, 增加了整个系统的分析难度.

在特征建模理论20多年的发展过程中, 已经解决许多基本的理论问题, 本文在前人的基础上在以下几点做了进一步的发展:

第一, 在特征建模方面, 原有的特征建模方法基

于系统稳定或输入输出及导数有界的假设构建特征模型<sup>[4-8]</sup>, 因此, 难以推广到更加一般的系统中, 本文通过研究高阶系统对低阶系统的耦合关系, 引入一种新的特征建模方法, 舍弃了该假定, 并把高阶子系统对输入输出低阶子系统的影响转化为一个线性参数化形式, 从而可以纳入经典自适应理论范畴。

第二, 在稳定性分析方面, 原有的方法采用欧拉近似离散化的方法构建特征模型, 仅限于在完全离散的框架内证明特征模型的稳定性<sup>[9-14]</sup>, 没有考虑混合系统的本质, 由于特征模型与原系统存在建模误差, 而欧拉近似离散化后与原精确离散模型也存在近似误差, 因此, 基于特征模型的稳定性不一定能保证原连续系统的稳定性, 本文充分考虑混合系统的本质特点, 通过上述新的特征建模方式, 把原来高阶混合系统的稳定性问题转化为一类含有稳定未建模误差的、参数慢变有界的低阶采样间接自适应控制问题, 并利用采样系统基于欧拉近似离散化模型的分析方法对特征模型及原系统的稳定性给出了详细的分析。

第三, 原有的对于辨识方法的分析也是基于离散系统, 没有考虑混合系统的差异, 本文利用文献[15]对混合辨识研究的结果, 在稳定性分析中充分考虑了这一点的影响。

此外, 以前的工作对于被控对象为非线性的系统一直没有进行系统的分析, 本文以一类相对阶为2的最小相位非线性系统为例, 提出了一个系统性的稳定性分析框架, 该框架可以进一步推广到相对阶大于2的单输入单输出(single input single output, SISO)和多输入多输出(multi-input multi-output, MIMO)高阶最小相位系统以及内动态为无限维最小相位的系统等稳定性分析中。此外, 对于一般的自适应控制理论而言, 本文揭示了互联系统的耦合关系, 给出了把高阶最小相位系统参数化为一个低阶的线性变参数形式的方法, 对于其他采样自适应系统的稳定性分析具有一定借鉴作用。

## 2 预备知识(Preliminary and setup)

实数集表示为 $\mathbb{R}$ , 采样周期 $h$ 假设是一个设计参数, 可以任意设置。  $x(k)$ 或 $x_k$ 表示向量或标量值 $x$ 在 $k$ 时刻的值,  $I$ 表示单位矩阵,  $\rho(A)$ 表示 $A$ 的谱半径。没有特别说明,  $\|x\|$ ,  $\|x\|_F$ 分别表示 $x$ 的欧氏范数和Frobenius范数。

由于基于近似离散化模型设计的控制器不一定可以保证原连续系统的稳定性, 对于采样系统稳定性分析, 经过Nešić、金辉宇等的研究<sup>[3, 16-18]</sup>, 已经有了一个系统的分析方法。下面列出与本文相关的基本结论: 设非线性对象 $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $f(x, u)$ 对 $x, u$ 都是局部Lipschitz连续的, 有采样控制器 $u(k) =$

$u_h(x(k))$ , 考虑系统的精确离散时间模型 $x(k+1) = F_h^{\text{ex}}(x(k), u_h(x(k)))$ 和欧拉近似模型 $x(k+1) = F_h^{\text{eu}}(x(k), u_h(x(k)))$ , 二者的稳定性关系存在以下结论。

**引理 1**<sup>[16]</sup> 考虑非线性对象 $\dot{x} = f(x, u)$ 及其采样控制器 $u(k) = u_h(x(k))$ , 如果

1)  $f(x, u)$ 对 $x$ 分段可微, 且对于 $\mathbb{R}^n$ 上任意包含原点的紧致集 $X$ , 都存在 $L_{x1}, L_{x2}, h_x^* > 0$ , 对于任意 $h \in (0, h_x^*)$ ,  $x, y \in X$ 有不等式

$$\begin{aligned} \|f(x, u_h(x)) - f(y, u_h(y))\| &\leq L_{x1}\|x - y\|, \\ \|f(x, u_h(x)) - f(y, u_h(x))\| &\leq L_{x2}\|x - y\|. \end{aligned}$$

2) 闭环Euler近似模型半全局指数稳定;

那么闭环精确离散模型是半全局指数稳定的。

**注 1** 该引理给出了依据欧拉近似离散模型设计采样控制器保证精确离散化模型稳定的充分条件, 近似解、精确解满足的关系可见文献[16]中的式(3.87)(或文献[18]中的式(39)):

$$\|F_h^{\text{ex}}(x(k), u_h(x(k))) - F_h^{\text{eu}}(x(k), u_h(x(k)))\| \leq rh^2\|x\|,$$

并得到连续系统指数稳定的推论(见文献[18]中定理2的注1):

$$\|x(t)\| \leq \left(\frac{L_1}{L_2}(e^{L_2 T^*} - 1) + 1\right)\|x(k)\|, \quad t \in [kT, kT + T),$$

则存在 $\alpha, \lambda > 0$ 使得 $\|x(t)\| \leq \alpha e^{-\lambda t}\|x(0)\|$ 。

## 3 问题表示(Problem statement)

考虑如下—类最小相位、相对阶为2的单输入单输出高阶非线性系统:

$$\dot{x} = \mathcal{F}(x) + \mathcal{G}(x)u, \quad y = h(x), \quad (1)$$

其中:  $x \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态; 数字控制器 $u \in \mathbb{R}^n$ , 假设是分段常值信号;  $\mathcal{F}(x), \mathcal{G}(x), h(x)$ 均为光滑函数, 设原点为平衡点。

将引入如下假设:

**假设 1** 系统具有已知的强相对阶 $r = 2$ , 如对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $L_{\mathcal{G}}L_{\mathcal{F}}^i h(x) = 0, i = 0, \dots, r-2$ ,  $L_{\mathcal{G}}L_{\mathcal{F}}^{r-1}h(x) \neq 0$ , 系统(1)可以化为Byrnes-Isidori标准型

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = \pi(z, \xi) + g(z, \xi)u, \\ \dot{\xi} = \theta(\xi, z), \\ y = z_1. \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\xi(t) = [\xi_1(t) \ \dots \ \xi_{n-r}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n-r}$ 表示内动态状态变量,  $z(t) \in \mathbb{R}^r$ 表示外动态状态变量。

**假设 2** 系统为指数最小相位系统。

**假设 3**  $\pi(z, \xi), \theta(\xi, z)$ 对 $z, \xi$ 是局部Lipschitz连续的。

**假设 4** 高频增益符号已知, 不失一般性假设 $g(z, \xi) > 0$ 。

**注2** 假设1和2定义了该系统的结构特征, 满足此类假设的系统可以概括许多实际的控制对象. 假设2中的指数最小相位指的是零动态 $\dot{\xi} = \theta(\xi, 0)$ 在原点 $\xi = 0$ 处为局部指数稳定的. 假设3为一般的技术假设保证 $\pi(z, \xi)$ 与 $\theta(\xi, z)$ 在原点的有界邻域内具有线性增长界.

**3.1 全系数自适应控制器(All-coefficient adaptive control law)**

基于特征模型的全系数自适应控制器包括: 维持跟踪控制器、反馈控制器、逻辑积分和逻辑微分控制器等, 为了分析的方便, 本文仅考虑采用最基本的反馈控制器

$$u_{k+1} = -\frac{1}{\hat{g}_k + \lambda}(l_1 \hat{f}_{1,k} y_{k+1} + l_2 \hat{f}_{2,k} y_k), \quad (3)$$

其中:  $0 < l_1, l_2 \leq 1$ (典型的可取黄金分割系数 $l_1 = 0.382, l_2 = 0.618$ , 称为黄金分割控制器),  $\lambda$ 为设置参数,  $\hat{f}_{1,k}, \hat{f}_{2,k}, \hat{g}_k$ 为 $k$ 时刻的辨识参数.

基于特征模型的自适应控制一般采用如下2阶时变差分方程作为辨识模型:

$$\hat{y}_{k+2} = \phi_k^T \hat{\theta}_k, \quad (4)$$

其中:  $\phi_k^T = [y_{k+1} \ y_k \ u_{k+1}]^T, \hat{\theta}_k = [\hat{f}_{1,k} \ \hat{f}_{2,k} \ \hat{g}_k]^T, \hat{\theta}_k = \theta_k - \hat{\theta}_k$ .

由于通过特征建模把原来复杂的动力学模型构建为与其等价的线性形式, 因此特征模型的参数一般是未知时变且在一个已知的闭凸集内, 一般采用如下投影梯度法辨识得到:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{n,k+1} = \hat{\theta}_k + \frac{\alpha \phi_k (y_{k+2} - \phi_k^T \hat{\theta}_k)}{1 + \phi_k^T \phi_k}, \\ \hat{\theta}_{k+1} = \pi[\hat{\theta}_{n,k+1}]. \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\pi[\hat{\theta}_{n,k}]$ 表示 $\hat{\theta}_{n,k}$ 到有界凸闭集 $D_s$ 上的正交投影,  $\alpha$ 为自适应律增益( $0 < \alpha < 2$ ).

为了保证辨识参数指数化收敛, 引入如下充分激励假设:

**假设5**  $\phi$ 满足充分激励(persistent excitation, PE)条件.

为了简化分析, 本文仅考虑稳定性问题, 并且假设外部输入信号只要可以保证假设5成立即可. 以下将通过4个步骤依次给出整个分析过程.

**4 特征建模(Characteristic modeling)**

在特征建模之前首先引入如下引理.

**4.1 重要引理(Important lemma)**

**引理2** 考虑如下两个系统:

$$\dot{x} = f(t, x) + \varphi(t, x) + g(t, x)u, \quad (6)$$

$$\dot{v} = f(t, v) + \phi(t, v) + g(t, v)u, \quad (7)$$

其中:  $f(t, x), g(t, x)$ 为光滑函数,  $\varphi(t, x)$ 满足 $\|\varphi(t, x)\| \leq \int_0^t m e^{-\lambda(t-s)} \|x(s)\| ds, u$ 为任意控制输入,  $x \in \mathbb{R}^n, m > 0, \lambda > 0; v \in \mathbb{R}^n$ , 函数 $\phi(t, v)$ 满足

$$\|\phi(t, v)\| \leq \frac{m\sqrt{\tilde{c}_2}}{\lambda\sqrt{\tilde{c}_1}} \|v\|, \tilde{c}_2 \geq \tilde{c}_1 > 0.$$

如果存在控制器 $u$ , 使得系统(7)在不变紧集(紧集且为不变集) $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ 内指数稳定, 则系统(6)在 $X_1$ 内也是指数稳定的.

具体证明见附录.

**注3** 该引理给出了小增益定理的一个等价描述, 使得可以不需要计算互联系统两个子系统的增益乘积来判断系统的稳定性.

**4.2 步骤1: 系统变换(Step 1: transformation)**

根据假设1, 系统(1)可以通过相对阶分解, 化为一个 $n - 2$ 阶系统和一个2阶系统互联的形式(2). 又根据指数最小相位假设, 对于原点的一个邻域 $D$ , 存在 $r_\xi > 0$ , 当 $\{\|\xi\| \leq r_\xi\} \subset D$ 时, 存在Lyapunov函数 $V(\xi)$ , 对于所有 $\xi \in D$ 及正常数 $c_1, c_2, c_3, c_4$ 满足

$$\begin{aligned} c_1 \|\xi\|^2 &\leq V(\xi) \leq c_2 \|\xi\|^2, \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} \theta(\xi, 0) &\leq -c_3 \|\xi\|^2, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial \xi} \right\| &\leq c_4 \|\xi\|, \end{aligned}$$

并根据假设3的 $\theta(\xi, z)$ 局部Lipschitz性, 存在 $L_z > 0$ 满足 $\|\theta(\xi, z) - \theta(\xi, 0)\| \leq L_z \|z\|$ , 从而对 $V(\xi)$ 沿系统轨线微分可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} \theta(\xi, 0) + \frac{\partial V}{\partial \xi} (\theta(\xi, z) - \theta(\xi, 0)) \leq \\ &-c_3 \|\xi\|^2 + c_4 L_z \|\xi\| \|z\|. \end{aligned}$$

类似文献[19]中定理5.1的推导, 取 $W(t) = \sqrt{V}$ , 当 $V \neq 0$ 时, 由 $\dot{W} = \dot{V}/(2\sqrt{V})$ 可得

$$\dot{W} \leq -\frac{1}{2} \frac{c_3}{c_2} W + \frac{c_4 L_z}{2\sqrt{c_1}} \|z\|.$$

当 $V = 0$ 时, 可以验证 $D^+W(t) \leq \frac{c_4 L_z}{2\sqrt{c_1}} \|z\|$ , 因此对于所有的 $V(\xi)$ , 有

$$D^+W(t) \leq -\frac{1}{2} \frac{c_3}{c_2} W + \frac{c_4 L_z}{2\sqrt{c_1}} \|z\|,$$

$$\|\xi(t)\| \leq$$

$$\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|\xi_0\| e^{-tc_3/2c_2} + \frac{c_4 L_z}{2c_1}.$$

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)c_3/2c_2} (|z_1(\tau)| + |z_2(\tau)|) d\tau, \quad (8)$$

其中应用 $\|z(\tau)\| \leq |z_1(\tau)| + |z_2(\tau)|$ .

把 $\|\xi(t)\|$ 分为两部分, 忽略 $\xi_0$ , 定义

$$p(t) = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \|\xi_0\| e^{-tc_3/2c_2}$$

和

$$q_i(z_i) = \frac{c_4 L_z}{2c_1} \int_0^t e^{-(t-\tau)c_3/2c_2} |z_i(\tau)| d\tau, \quad i=1, 2.$$

根据文献[20]的引理2.1和假设3, 存在光滑标量函数 $a_i(x) \geq 0$ ,  $b_i(x) \geq 0$ ,  $c(x) \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ 使得

$$|\pi(z, \xi)| \leq a_1(z_1) + a_2(z_2) + b_1(q_1(z_1)) + b_2(q_2(z_2)) + c(p(t)), \quad (9)$$

因此对于外部子系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = \pi(z, \xi) + g(z, \xi)u, \\ y = z_1 \end{cases} \quad (10)$$

设计控制器时可以不考虑内动态状态变量 $\xi(t)$ .

为了构建特征模型, 下面分析 $c(p(t))$ 和 $b_i(q_i(z_i))$ 的性质:

1)  $c(p(t))$ .

由于 $p(t)$ 独立于 $z$ 并且是指数收敛的,  $c(p(t))$ 可以看做未建模误差, 在设计控制器时不予考虑. 因此, 本文将首先分析不包含 $c(p(t))$ 的系统, 然后再考虑整个系统的稳定性.

2)  $b_i(q_i(z_i))$ .

根据 $b_i(x)$ 的局部Lipschitz性存在 $L_{bi} > 0$ ,  $i = 1, 2$ 满足

$$b_i(q_i(z_i)) \leq \frac{c_4 L_z L_{bi}}{2c_1} \int_0^t e^{-(t-\tau)c_3/2c_2} |z_i(\tau)| d\tau.$$

根据引理2, 包含此类形式函数上界的系统可利用上界函数 $\frac{L_z L_{bi} c_4 c_2}{c_1 c_3} \frac{\sqrt{\tilde{c}_2}}{\sqrt{\tilde{c}_1}} |z_i(t)|$  (左边常数项本质上为内动态的增益)来代替, 其中 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 > 0$ 由系统(10)所取Lyapunov函数决定. 又由于 $a_i(x)$ 的局部Lipschitz性, 存在 $L_{ai} > 0$ 使得 $a_i(z_i) \leq L_{ai} |z_i|$ , 所以根据引理2, 式(9)的上界可等价替换为

$$\begin{aligned} |\pi(z, \xi)| \leq & (L_{a_1} + \frac{L_z L_{b_1} c_4 c_2}{c_1 c_3} \frac{\sqrt{\tilde{c}_2}}{\sqrt{\tilde{c}_1}}) |z_1(t)| + (L_{a_2} + \\ & \frac{L_z L_{b_2} c_4 c_2}{c_1 c_3} \frac{\sqrt{\tilde{c}_2}}{\sqrt{\tilde{c}_1}}) |z_2(t)| + c(p(t)). \end{aligned} \quad (11)$$

综上所述, 经过相对阶分解后, 最初的高阶系统(1)变换为一个由 $n-2$ 阶非线性系统(内动态)和一个2阶非线性系统(外动态)组成的互联系统(2). 通过对外部子系统构建一个不依赖于内动态的函数上界, 将该互联系统解耦为级联系统, 其中内动态对外动态的影响体现为两部分: 其一是 $\xi_0$ 的影响, 因内动态为稳定的, 则使得外动态附加一个稳定的未建模误差 $c(p(t))$ ; 其二是过去的 $z$ 通过作用内动态产生的影响 $q_i(z_i)$ . 根据引理2, 含有 $\frac{c_4 L_z L_{bi}}{2c_1} \int_0^t e^{-(t-\tau)c_3/2c_2} |z_i(\tau)| d\tau$ 项的系统实质上可在控制器中只考虑它的一个由内动态增益构成的上界函数 $\frac{L_z L_{b_1} c_4 c_2}{c_1 c_3}$ .

$\frac{\sqrt{\tilde{c}_2}}{\sqrt{\tilde{c}_1}} |z_i(t)|$ , 从而可以构建一个线性参数化上界. 因此通过以上变换最初的高阶系统化为一个级联系统, 又根据级联系统稳定性相关定理, 只要表示外动态的2阶非线性系统(10)稳定即可, 根据引理2, 如果保证具有上界函数(11)的系统(10)指数稳定, 那么原系统也是稳定的. 所以, 原来的结构不匹配问题现在化为一个含有稳定未建模误差的标准的采样间接自适应控制问题.

### 4.3 步骤2: 特征建模(Step 2: characteristic modeling)

根据特征建模思想, 对系统输入输出关系构建特征模型. 有如下定理成立:

**定理1** 在采样周期 $h$ 满足某些条件下, 当控制要求为位置保持或位置跟踪时, 在假设1-5成立的条件下, 系统(1)的特征模型可表示为如下2阶差分方程形式:

$$Y_{k+2} = f_{1,k} Y_{k+1} + f_{2,k} Y_k + g_k u_{k+1}, \quad (12)$$

其特征参量满足如下性质:

- 1) 特征参量为状态变量和采样周期的函数;
- 2) 属于如下一个闭凸集 $D_s$ :

$$\begin{aligned} D_s = \{ & f_{1,k}, f_{2,k}, g_k \in \mathbb{R}, \\ & |f_{1,k} - 2| < \varepsilon_1(h, y), |f_{2,k} + 1| < \varepsilon_2(h, y), \\ & 0 < \varepsilon_3(h^2, y) < g_k < \varepsilon_4(h^2, y)\}, \end{aligned}$$

其中: 假设 $0 < h \ll 1$ 和 $\varepsilon_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为连续函数且分别为 $h, h^2$ 的同阶无穷小.

**注4** 采样周期 $h$ 满足某些条件表示 $h$ 应当满足采样定理并保证系统离散化后保证可控可观性和满足一定控制精度. 同阶无穷小和连续条件保证 $h \downarrow \Rightarrow \varepsilon_i \downarrow$ .

**证** 对式(10)进行欧拉离散化, 然后构建特征模型.

对式(10)的方程1进行后向欧拉差分, 方程2进行前向欧拉差分. 可得其欧拉近似离散化形式:

$$\begin{cases} z_{1,k+1} = z_{1,k} + h z_{2,k+1}, \\ z_{2,k+1} = z_{2,k} + h \pi(z_k, \xi_k) + h g(z_k, \xi_k) u_k. \end{cases} \quad (13)$$

如果令

$$f_1(z) z_1 + f_2(z) z_2 + d(p(t)) = \pi(z, \xi),$$

其中 $d(p(t))$ 为 $p(t)$ 的连续函数, 可以构建如下伪线性变参数系统:

$$\begin{cases} z_{1,k+1} = z_{1,k} + h z_{2,k+1}, \\ z_{2,k+1} = z_{2,k} + h f_1(z_k) z_{1,k} + h f_2(z_k) z_{2,k} + \\ \quad h g(z_k, \xi_k) u_k + h d(p(k)), \end{cases} \quad (14)$$

其中:

$$f_1(z) = \frac{(\pi(z, \xi) - d(p(t))) z_1}{z_1^2 + z_2^2},$$

$$f_2(z) = \frac{(\pi(z, \xi) - d(p(t)))z_2}{z_1^2 + z_2^2},$$

并且在保证系统向量场上下界式(11)不变的情况下设定

$$\begin{aligned} |f_1(z)| &\leq L_{a1} + \frac{L_{b1}L_z c_2 c_4 \sqrt{\tilde{c}_2}}{c_1 c_3 \sqrt{\tilde{c}_1}}, \\ |f_2(z)| &\leq L_{a2} + \frac{L_{b2}L_z c_2 c_4 \sqrt{\tilde{c}_2}}{c_1 c_3 \sqrt{\tilde{c}_1}}, \\ |d(p(t))| &\leq c(p(t)), \end{aligned}$$

因此, 式(14)与(13)的向量场具有相同的闭凸集, 因此, 根据绝对稳定性理论前者稳定可以保证后者也是稳定的.  $d(p(k))$ 可看作稳定的未建模误差, 在控制器设计时不予考虑, 因此, 特征建模过程中忽略该项. 对  $z_{1,k+1}, z_{2,k+1}$  前向移位, 并把  $z_{2,k+2}$  代入  $z_{1,k+2}$ , 并考虑到  $Y_k = z_{1,k}$ , 取特征变量  $z_1, u$  构建特征模型:

$$Y_{k+2} = f_{1,k}Y_{k+1} + f_{2,k}Y_k + g_k u_{k+1},$$

其中:

$$\begin{aligned} f_{1,k} &= 2 + hf_2(z_{k+1}) + h^2 f_1(z_{k+1}), \\ f_{2,k} &= -1 - hf_2(z_{k+1}), \\ g_k &= h^2 d(z_{k+1}, \xi_{k+1}). \end{aligned}$$

根据以上建立的关于  $f_1$  与  $f_2$  的上下界和  $d$  的表达式, 可以得到闭凸集  $D_s$ , 当  $h \ll 1$  存在与  $h$  同阶无穷小的连续函数  $\varepsilon_i$ , 有

$$\begin{aligned} |f_{1,k} - 2| &< \varepsilon_1(h, y), \\ |f_{2,k} + 1| &< \varepsilon_2(h, y), \\ 0 < \varepsilon_3(h^2, y) &< g_k < \varepsilon_4(h^2, y). \end{aligned}$$

证毕.

根据采样系统中基于欧拉近似离散化稳定性分析框架<sup>[16-18]</sup>, 此采样系统满足引理1的条件, 因此存在正常数  $\nu$ , 欧拉近似后式(13)的解  $z_{h,k+2}^{eu}$  与式(10)精确离散化后的解  $z_{h,k+2}^{ex}$  满足如下关系:

$$\|z_{h,k+2}^{ex} - z_{h,k+2}^{eu}\| \leq \nu h^2 \|z(k)\|. \quad (15)$$

### 5 稳定性分析(Stability analysis)

根据以上分析, 原来的结构不匹配问题现在化为一个含有稳定未建模误差的标准的采样间接自适应控制问题, 而通过欧拉近似离散化后, 根据采样系统基于近似离散化模型分析方法, 可以通过证明基于欧拉近似离散化得到的特征模型的指数稳定性来证明原精确离散化模型的指数稳定性. 因此, 问题进一步转换为一个标准的参数慢变且有界的间接离散自适应控制稳定性问题.

#### 5.1 步骤 3: 特征模型稳定性分析(Step 3: stability analysis of characteristic model)

首先看一下控制器与特征模型组成的闭环系统

的稳定性, 存在如下定理, 其中证明依据慢时变系统和自适应控制的稳定性分析方法.

**定理 2** 存在  $h^* > 0$  和可调参数  $\lambda$  对每个  $h \in (0, h^*)$ , 在满足充分激励的条件下, 自适应控制律(3)和(5)可以使得特征模型(12)在有界闭凸集  $D_s$  存在条件下, 闭环系统是半全局指数稳定的.

**证** 此定理的证明可以通过以下步骤形成:

1) 闭环系统.

由反馈控制律(3)和特征模型(12)构成的闭环系统可写为

$$\begin{aligned} Y_{k+2} &= (1 - l_1 \frac{g_k}{\hat{g}_k + \lambda}) \hat{f}_{1,k} Y_{k+1} + (1 - l_2 \frac{g_k}{\hat{g}_k + \lambda}) \cdot \\ &\quad \hat{f}_{2,k} Y_k + \tilde{f}_{1,k} Y_{k+1} + \tilde{f}_{2,k} Y_k, \end{aligned}$$

可简写为

$$W_{k+1} = A_k W_k + \Delta A_k W_k, \quad (16)$$

其中:

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1 - l_2 \frac{g_k}{\hat{g}_k + \lambda}) \hat{f}_{2,k} & (1 - l_1 \frac{g_k}{\hat{g}_k + \lambda}) \hat{f}_{1,k} \end{bmatrix}, \\ \Delta A_k &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{f}_{2,k} & \tilde{f}_{1,k} \end{bmatrix}, W_k = \begin{bmatrix} Y_k \\ Y_{k+1} \end{bmatrix}, \\ \tilde{f}_{1,k} &= f_{1,k} - \hat{f}_{1,k}, \tilde{f}_{2,k} = f_{2,k} - \hat{f}_{2,k}, \end{aligned}$$

可划分为标称系统  $W_{k+1} = A_k W_k$  和误差  $\Delta A_k W_k$ . 对于标称系统, 根据黄金分割控制器鲁棒性定理(见文献[15]定理1), 可以选择  $\lambda$  使得  $A_k$  的特征值在半径为  $r^*$  ( $0 < r^* < 1$ ) 的圆内, 因而可进一步调节  $r^*$  提高系统稳定裕度抵消  $\Delta A_k$  的影响.

2) 时变系统.

由于对于每个冻结状态  $A_k$  为  $D(0, r)$ -稳定的, 即  $\rho(A_k) < r^*$ , 其中  $0 < r^* < 1$ , 且由于辨识参数均属于有界闭凸集  $D_s$  内, 而选择的使系统稳定的  $\lambda$  可保证闭环状态矩阵  $A_k$  是有界序列. 由于特征参量均在闭凸集  $D_s$  内, 并根据  $D_s$  边界为采样周期的同阶无穷小, 则时变误差满足  $\|A_{k+1} - A_k\| = O(h)$ , 即通过减小采样周期可以使得时变误差无限减小, 成为一个慢变系统, 因此根据文献[21]中慢时变系统定理2.4.1可知时变系统  $W_{k+1} = A_k W_k$  是指数稳定的.

3) 包含辨识误差的系统.

由于  $\|\Delta A_k\| \leq \|\tilde{\theta}(k)\|$ , 基于欧拉近似离散化的自适应律(5)对于连续系统(10)组成混合辨识系统, 根据文献[15]中对于此类自适应律分析, 在假设5满足的条件下满足自适应性质定理(见文献[15]定理3)的条件, 由于  $d(p(k))$  可以看做自适应律的扰动, 所以

$$\sum_{k=0}^N \|\tilde{\theta}_k\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2(h, y)}{\varpi} + c_1 \varepsilon^2(h, y)(N + 1) +$$

$$c_2 \sum_{k=0}^N |d(p(k))|^2 + c_3 h^4 (N+1).$$

由于  $d(p(k))$  为指数稳定的, 因此根据文献 [21] 定理 2.6.2 采样时间充分小时系统在原点某个邻域  $X_1 \subset \mathbb{R}^n$  内是指数稳定的. 并由反馈控制器鲁棒性 (文献 [15] 定理 1) 可知, 可以减小采样周期使得  $X_1$  变大, 因此系统是半全局指数稳定的. 证毕.

## 5.2 步骤 4: 整个系统的稳定性分析 (Step 4: stability analysis of entire system)

以上分析了由特征模型组成的离散闭环系统的稳定性, 而要证明原连续系统的稳定性则依据采样系统基于欧拉近似离散化模型的稳定性分析方法, 有如下定理成立:

**定理 3** 如果定理 2 的条件成立, 那么在假设 1–5 满足的条件下由自适应控制律 (3)(5) 和系统 (1) 组成的闭环系统是指数稳定的.

**证** 此定理的证明可以通过以下步骤形成:

1) 首先证明欧拉近似离散化系统 (13) 是半全局指数稳定的.

根据定理 2 和  $z_{1,k+1} = z_{1,k} + h z_{2,k+1}$  可知  $z_{2,k+1}$  也是稳定的, 如果把  $d(p(k))$  看做外部输入, 当  $\xi_0$  属于内动态指数稳定吸引区内时, 在  $d(p(k))$  指数收敛的条件下, 系统 (14) 也是半全局指数稳定的. 根据鲁棒控制理论, 系统 (13) 也是半全局指数稳定的.

2) 其次证明连续系统 (10) 是半全局指数稳定的. 由于  $\pi(z, \xi)$  是局部 Lipschitz 连续的, 因此根据引理 1 和引理 2 及注 1, 原来的连续系统 (10) 也是半全局指数稳定的.

3) 最后, 由于系统零动态为指数稳定的, 外动态为半全局指数稳定的, 则根据相关定理 (见文献 [22] 定理 130), 整个闭环系统 (2) 在内动态的指数稳定吸引区内是指数稳定的, 由于式 (1) 与其等价, 因此, 原系统 (1) 也是指数稳定的.

4) 另据文献 [15] 中混合自适应定理 3 的性质 (1), 辨识参数  $\hat{\theta}$  关于  $z_1$  是输入状态稳定 (input-state stable, ISS) 的, 所以当系统稳定后,  $z_1$  趋于 0,  $\hat{\theta}$  最终也是渐近稳定的. 证毕.

如果进一步加强假设 2 为:

**假设 6** 系统内动态为指数 ISS 的, 即  $\theta(\xi, z)$  对于  $(\xi, z)$  是连续可微且是全局 Lipschitz 的, 对  $t$  一致. 零动态  $\dot{\xi} = \theta(\xi, 0)$  在原点  $\xi = 0$  处有全局指数稳定的平衡点.

则整个系统的稳定性由外动态子系统决定, 有如下推论:

**推论 1** 如果定理 2 的条件成立, 那么在假设 1,

3–6 成立的条件下由系统 (1) 组成的闭环系统是半全局指数稳定的.

## 6 仿真算例 (Example)

考虑如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \sin x_2 - 5x_1 + (1 + 4 \cos x_1)x_4, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + \sin x_1 \frac{4x_4}{1+x_4^2} x_3^2, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = x_3 - 2x_2 - x_2^2 \cos(x_1 + x_4) + (1 + x_2^2)u, \\ y = x_3. \end{cases}$$

从形式上可以看出, 系统相对阶为 2, 且内动态是指 ISS 的, 均满足以上假设, 属于本文研究对象.

**第 1 步** 计算内动态状态变量.

定义 Lyapunov 函数  $V_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$  及  $\xi = [x_1 \ x_2]^T$ .

计算  $\|\xi\|$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= x_1(-2x_1 \sin x_2 - 5x_1 + \\ &\quad (1 + 4 \cos x_1)x_4) + x_2 + \\ &\quad (-x_2 + \sin x_1 \frac{4x_4}{1+x_4^2} x_3^2) \leq \\ &\quad -(x_1^2 + x_2^2) + 5|x_1||x_4| + 2x_3^2|x_2|. \end{aligned}$$

根据 4.1 节步骤 1 中对内动态的处理可得

$$\|\xi\| \leq e^{-t} \|\xi_0\| + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-s)} (5|x_4| + 2x_3^2) ds.$$

计算  $\|\xi\|^2$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -3x_1^2 + \frac{5}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}x_4^2 - x_2^2 + 2x_3^2 x_2 \sin x_1 \leq \\ &\quad -0.5x_1^2 - (1 - \theta^2)x_2^2 + 2.5x_4^2 + \theta^{-2}x_3^4 \leq \\ &\quad -\alpha V + 2.5x_4^2 + \theta^{-2}x_3^4. \end{aligned}$$

其中取  $\alpha = \min(0.5, 1 - \theta^2)$ ,  $0 < \theta < 1$  可得

$$\|\xi\|^2 \leq e^{-\alpha t} \|\xi_0\|^2 + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} (5x_4^2 + 2\theta^{-2}x_3^4) ds.$$

**第 2 步** 解耦.

把  $\|\xi\|$  和  $\|\xi\|^2$  代入外动态可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \\ x_3 - 2x_2 - x_2^2 \cos(x_1 + x_4) + (1 + x_2^2)u &\leq \\ x_3 + 2\|\xi\| + \|\xi\|^2 + (1 + x_2^2)u &= \\ x_3 + 2e^{-t} \|\xi_0\| + \int_0^t e^{-(t-s)} (5|x_4| + 2x_3^2) ds &+ \\ e^{-\alpha t} \|\xi_0\|^2 + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} (5x_4^2 + 2\theta^{-2}x_3^4) ds &+ \\ (1 + x_2^2)u. & \end{aligned}$$

根据引理 2, 可取上界函数  $5|x_4(t)|$  代替  $5 \int_0^t e^{-(t-s)} |x_4(s)| ds$ , 取上界函数  $2x_3^2(t)$  代替  $2 \int_0^t e^{-(t-s)} x_3^2(s) ds$ ,

取上界函数  $\frac{5}{\alpha} x_4^2 + \frac{2}{\alpha \theta^2} x_3^4$  代替  $\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} (5x_4^2(s) +$

$$2\theta^{-2}x_3^4(s)ds.$$

**第3步 特征建模.**

忽略

$$2e^{-t}\|\xi_0\| \text{ 和 } e^{-\alpha t}\|\xi_0\|^2,$$

有

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = f_1(x)x_3 + f_2(x)x_4 + g(x)u, \end{cases}$$

其中:

$$|f_1(x)| \leq 1 + 2|x_3| + \frac{2}{\alpha\theta^2}|x_3^3|,$$

$$|f_2(x)| \leq 5 + \frac{5}{\alpha}|x_4|,$$

$$g(x) = 1 + x_2^2.$$

欧拉离散化并特征建模可得

$$Y_{k+2} = f_{1,k}Y_{k+1} + f_{2,k}Y_k + g_k u_{k+1},$$

其中:

$$f_{1,k} = 2 + hf_2(x_{k+1}) + h^2f_1(x_{k+1}),$$

$$f_{2,k} = -1 - hf_2(x_{k+1}),$$

$$g_k = h^2d(x_{k+1}, \xi_{k+1}).$$

**第4步 仿真.**

由于闭环系统的吸引区与采样时间、特征参量上下界及 $\lambda$ 密切相关, 并且又是混合系统, 计算其解析表达式非常困难, 但可以采用数值试探的方法检验吸引区与采样周期的大致关系. 由于吸引区 $D$ 是一个以原点为中心的联通区域, 从以上推导可以看出主要由 $x_2, x_3, x_4$ 决定, 因此, 构建一个由3个变量形成的以原点为球心的球体, 令其半径不断变大得到一系列初值来试探吸引区大小与 $h$ 关系, 从而对于每一组 $h, D_s, \lambda$ 得到最保守的一个吸引区, 并考虑到吸引区的大小主要受 $h$ 的影响, 忽略不同的特征参量上下界及 $\lambda$ 的影响, 采用试探的方法检验 $r$ 与 $h$ 的大致关系. 因此对于3个变量初值在球坐标系下可写为

$$x_2 = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$x_3 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_4 = r \cos \theta,$$

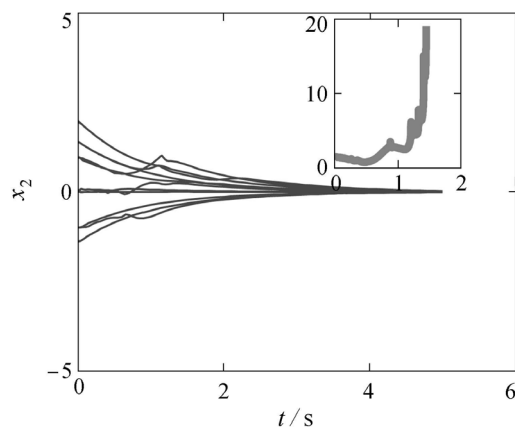
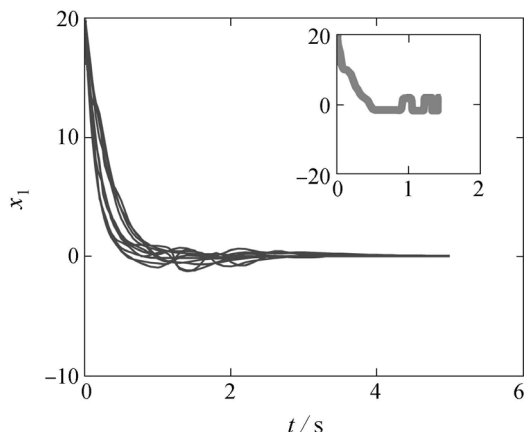
由于吸引区是连续的, 为了数值仿真, 对此球体进行离散化, 令 $r$ 以0.5为步距, 从0到20取值, 令 $\theta$ 和 $\varphi$ 以 $\pi/4$ 为步距, 分别从0到 $\pi$ 和 $2\pi$ 取值, 得到一系列半径逐渐变大的离散球体, 并认为以上精度是足够的. 从 $r = 0.5$ 开始计算位于球面上的3个变量, 并任意取 $x_1 = 20$ , 得到一组离散点作为系统初值进行仿真, 依次增大 $r$ 直到有一个初值导致系统发散为止, 下面在输入为白噪声时, 分别在 $h = 0.1\text{ s}$ ,  $h = 0.01\text{ s}$ 和 $h = 0.001\text{ s}$ 时对系统仿真, 仅给出导致系统发散的最后一组初值的仿真结果, 其中小图为不稳定初值导致系统发散的仿真曲线.

1) 取 $h = 0.1\text{ s}$ . 闭凸集:  $f_{1,k} \in [1.5, 2.5]$ ,  $f_{2,k} \in [-1.5, -0.5]$ ,  $g_k \in [0.008, 0.012]$ , 在球坐标系下系统初值从 $r = 0 \sim 1.5$ 取值时系统都是稳定的, 而当 $r = 2$ 时, 存在 $x_0 = [20.0000 \ 1.4142 \ 1.4142 \ 0.0000]^T$ 导致系统发散, 图1仅绘出 $r = 2$ 时的仿真曲线;

2) 取 $h = 0.01\text{ s}$ . 闭凸集:  $f_{1,k} \in [1.95, 2.05]$ ,  $f_{2,k} \in [-1.05, -0.95]$ ,  $g_k \in [0.0008, 0.0012]$ , 在球坐标系下系统初值从 $r = 0 \sim 5.5$ 取值时系统都是稳定的, 而当 $r = 6$ 时, 存在 $x_0 = [20.0000 \ 4.2426 \ 4.2426 \ 0.0000]^T$ 导致系统发散, 图2仅绘出 $r = 6$ 时的仿真曲线;

3) 取 $h = 0.001\text{ s}$ . 闭凸集:  $f_{1,k} \in [1.995, 2.005]$ ,  $f_{2,k} \in [-1.005, -0.995]$ ,  $g_k \in [0.00008, 0.00012]$ , 在球坐标系下系统初值从 $r = 0 \sim 17$ 取值时系统都是稳定的, 而当 $r = 17.5$ 时, 存在 $x_0 = [20.0000 \ 17.5000 \ 0 \ 0]^T$ 导致系统发散, 图3仅绘出 $r = 17.5$ 时的仿真曲线;

从图1-3中可见, 随着采样周期的减小, 系统可稳定的球形区域不断增大, 由于此球形区域为最保守的吸引区, 因此, 以此为标准衡量可以体现采样周期与吸引区的关系.



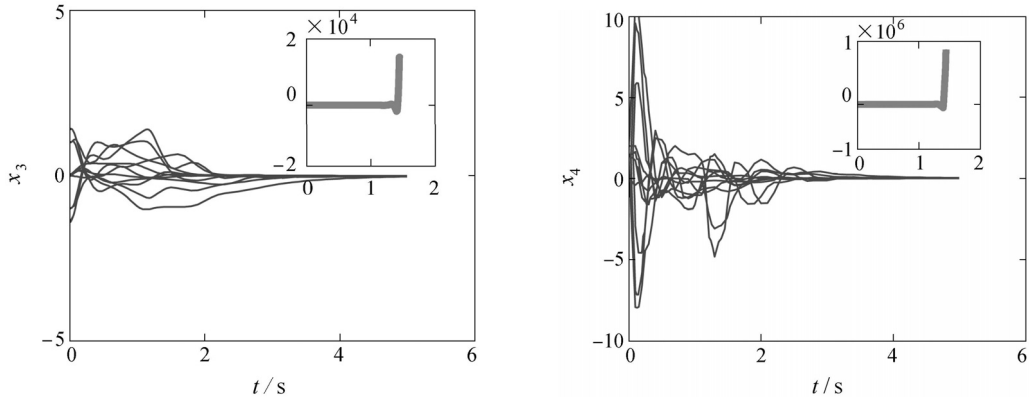


图1  $h = 0.1$  s时仿真曲线  
Fig. 1 System output when  $h = 0.1$  s

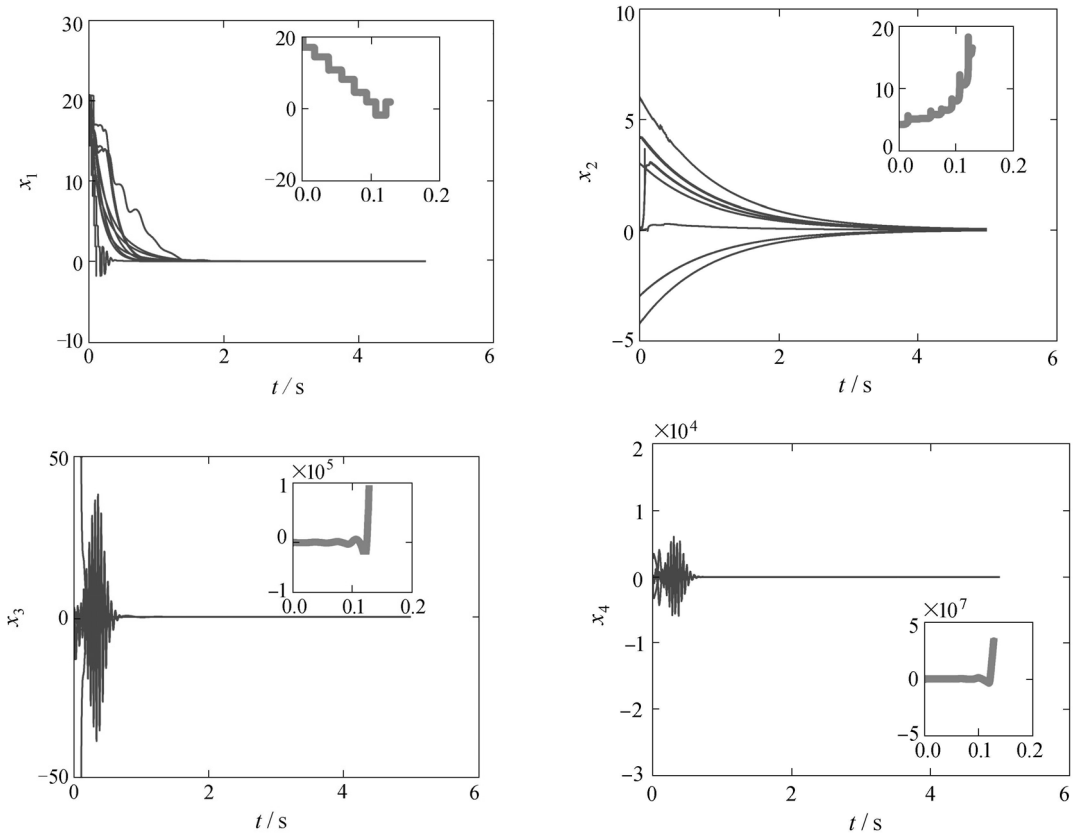
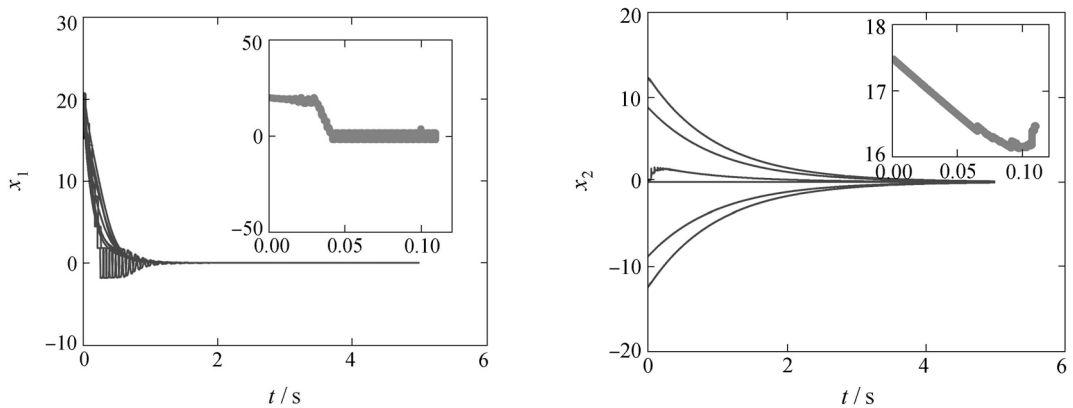
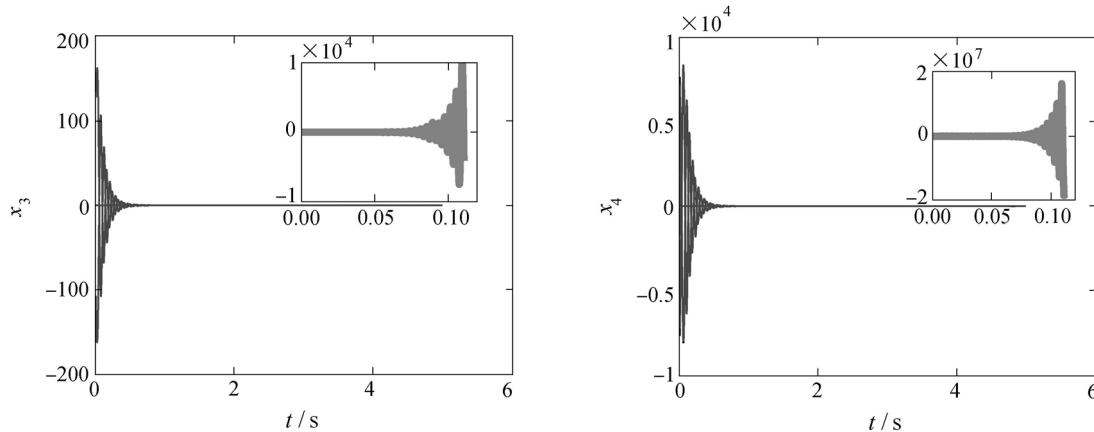


图2  $h = 0.01$  s时仿真曲线  
Fig. 2 System output when  $h = 0.01$  s





图3  $h = 0.001$  s时仿真曲线Fig. 3 System output when  $h = 0.001$  s

## 7 总结(Conclusions)

本文详细分析了基于特征模型的全系数自适应方法对于最小相位系统的稳定性,基本步骤可总结为如下几点: 1) 根据相对阶分解把高阶系统化为一个互联系统,由于最小相位特性导致内动态为ISS(输入状态稳定)的; 2) 采用一种特殊变换,把该互联系统转化为一个串联系统,其中外动态子系统具有分布时延环节; 3) 为了对该分布时延环节构建一个线性化参数上界,给出了一个引理,利用该引理可以对串联系统中外动态子系统构建特征模型; 4) 利用串联系统稳定性,整个系统的稳定性可以转化为外动态子系统的稳定性问题,因此,原高阶系统的稳定性问题转化为低阶系统的间接采样自适应控制问题; 5) 利用欧拉离散化对低阶系统进行特征建模,化为一个离散、间接、参数慢变有界的自适应控制问题,并进行稳定性分析; 6) 最后利用“基于近似离散时间模型的采样控制分析框架”分析原连续系统的稳定性问题。

不足之处主要是在理论上给出了指数稳定性的结论,但是对于实际构建具体的吸引区仍然非常困难,而且具体结论由于受到当前采样系统稳定性分析框架仅限于指数稳定性的限制,很难进一步放宽假设推广到渐进稳定性最小相位系统。

## 参考文献(References):

- [1] 吴宏鑫, 胡军, 解永春. 基于特征模型的智能自适应控制 [M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2009.  
(WU Hongxin, HU Jun, XIE Yongchun. *Characteristic Model-Based Intelligent Adaptive Control* [M]. Beijing: China Science and Technology Press, 2009.)
- [2] WU H X, HU J, XIE Y C. Characteristic model-based adaptive control method and applications [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part C: Applications and Review*, 2007, 37(2): 213 –

221.

- [3] NEŠIĆ D, TEEL A R. A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1103 – 1122.
- [4] 吴宏鑫, 解永春, 李智斌, 等. 基于对象特征模型描述的智能控制 [J]. *自动化学报*, 1999, 25(1): 9 – 17.  
(WU Hongxin, XIE Yongchun, LI Zhibin, et al. Intelligent control based on description of plant characteristic model [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(1): 9 – 17.)
- [5] 吴宏鑫, 刘一武, 刘忠汉, 等. 特征建模与挠性结构的控制 [J]. *中国科学(E辑)*, 2001, 31(2): 137 – 149.  
(WU Hongxin, LIU Yiwu, LIU Zhonghan, et al. Characteristic modeling and control for flexible structure [J]. *Science China (Series E)*, 2001, 31(2): 137 – 149.)
- [6] 孟斌, 吴宏鑫. 线性定常系统特征模型的证明 [J]. *中国科学(E辑)*, 2007, 37(10): 1258 – 1277.  
(MENG Bin, WU Hongxin. Proof of characteristic model of linear system [J]. *Science China (Series E)*, 2007, 37(10): 1258 – 1277.)
- [7] 孙多青, 吴宏鑫. 多变量线性系统的特征模型及控制方法 [J]. *航天控制*, 2004, 22(6): 4 – 10.  
(SUN Duoqing, WU Hongxin. Characteristic model and control method of MIMO high-order linear systems [J]. *Aerospace Control*, 2004, 22(6): 4 – 10.)
- [8] 孙多青, 吴宏鑫. 多变量线性时变系统的特征模型及自适应模糊控制方法 [J]. *宇航学报*, 2005, 26(6): 677 – 681.  
(SUN Duoqing, WU Hongxin. Characteristic model and control method of MIMO high-order linear systems [J]. *Journal of Astronautics*, 2005, 26(6): 677 – 681.)
- [9] XIE Y C, WU H X. The application of the golden section in adaptive robust controller design [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1992, 18(2): 177 – 185.
- [10] 解永春, 吴宏鑫. 全系数自适应控制方法的鲁棒性 [J]. *自动化学报*, 1997, 23(2): 151 – 159.  
(XIE Yongchun, WU Hongxin. The robustness of the all-coefficient adaptive control method [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1997, 23(2): 151 – 159.)
- [11] 解永春. 航天器鲁棒自适应控制方法及其应用研究 [D]. 北京: 中国空间技术研究院北京控制工程研究所, 1994.  
(XIE Yongchun. *Study on robust adaptive control method and application of Spacecraft* [D]. Beijing: Beijing Institute of Control Engineering of China Academy of Space Technology, 1994.)
- [12] 齐春子. TDRS多变量自适应控制方法研究 [D]. 北京: 中国空间技术研究院北京控制工程研究所, 1999.

(QI Chunzi. *Study on TDRS multi-variable adaptive control method* [D]. Beijing: Beijing Institute of Control Engineering of China Academy of Space Technology, 1999.)

[13] 孙多青, 吴宏鑫. 四阶时变离散系统的一致渐进稳定性 [J]. 控制理论与应用, 2006, 23(6): 845 – 852.  
(SUN Duoqing, WU Hongxin. Uniformly asymptotic stability of the 4th-order time-varying discrete systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(6): 845 – 852.)

[14] 齐春子, 吴宏鑫, 吕振铎. 多变量全系数自适应控制系统稳定性的研究 [J]. 控制理论与应用, 2000, 17(4): 489 – 494.  
(QI Chunzi, WU Hongxin, LÜ Zhenduo. Study on the stability of multi-variable all-coefficient adaptive control system [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(4): 489 – 494.)

[15] 王勇. 全系数自适应控制器若干稳定性性质分析 [J]. 空间控制技术与应用, 2012, 38(2): 10 – 16.  
(WANG Yong. Analysis for some stability properties of all-coefficient adaptive controller [J]. *Aerospace Control and Application*, 2012, 38(2): 10 – 16.)

[16] 金辉宇. 基于近似模型的非线性采样系统研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2007.  
(JIN Huiyu. *Study on nonlinear sampled-data system based on approximated model* [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2007.)

[17] 金辉宇, 殷保群. 非线性采样系统指数稳定的新条件 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(8): 821 – 826.  
(JIN Huiyu, YIN Baoqun. A new condition for exponential stability for nonlinear sampled-data system [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(8): 821 – 826.)

[18] 金辉宇, 康宇, 殷保群. 局部Lipschitz系统的采样控制 [C] //第29届中国控制会议论文集. 北京: 北京理工大学出版社, 2010: 992 – 997.  
(JIN Huiyu, KANG Yu, YIN Baoqun. Sampled-data control of locally lipschitz system [C] //*Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2010: 992 – 997.)

[19] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002.

[20] LIN W, QIAN C. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: a nonsmooth feedback framework [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(5): 757 – 774.

[21] 郭雷. 时变随机系统—稳定性、估计和控制 [M]. 吉林: 吉林科学技术出版社, 1993.  
(GUO Lei. *Time-varying Stochastic System—Stability, Estimation and Control* [M]. Jilin: Jilin Science and Technology Press, 1993.)

[22] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems* [M]. 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Springer Verlag, 1995.

附录(Appendix)

**引理1的证明** 假设存在控制器  $u = u_0$  使得系统  $\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u$  在紧集  $X_1$  内指数稳定, 即在  $X_1$  内存在 Lyapunov 函数  $V(t, x)$  和正常数  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4$  满足

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 \|x\|^2 &\leq V(t, x) \leq \tilde{c}_2 \|x\|^2, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(f(t, x) + g(t, x)u_0) &\leq -\tilde{c}_3 \|x\|^2, \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq \tilde{c}_4 \|x\|. \end{aligned}$$

定义  $W(t, v) = V(t, v)$ , 以上结论对  $\dot{v} = f(t, v) + g(t, v)u$  同样满足. 进一步设计控制器  $u = u_0 + w$  保证系统(6)的稳定, 有

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(f(t, x) + g(t, x)u_0) +$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x} \varphi(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x)w \leq \\ &-\tilde{c}_3 \|x\|^2 + \tilde{c}_4 \|x\| \int_0^t m e^{-\lambda(t-s)} \|x(s)\| ds + \\ &\frac{\partial V}{\partial x} g(t, x)w \leq \\ &-\frac{\tilde{c}_3}{\tilde{c}_2} V + \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1} \sqrt{V} \int_0^t m e^{-\lambda(t-s)} \sqrt{V} ds + \\ &\frac{\partial V}{\partial x} g(t, x)w. \end{aligned} \tag{A1}$$

对于  $\int_0^t m e^{-\lambda(t-s)} \sqrt{V} ds$ , 有

$$\begin{aligned} \int_0^t m e^{-\lambda(t-s)} \sqrt{V} ds &= \\ \int_0^t m e^{-\lambda(t-s)} \left( \int_0^s \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dr \right) ds + \int_0^t m e^{-\lambda(t-s)} \sqrt{V(0)} ds &= \\ \int_0^t \left( \int_r^t m e^{-\lambda(t-s)} ds \right) \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dr + \int_0^t m e^{-\lambda(t-s)} \sqrt{V(0)} ds &= \\ \frac{m}{\lambda} \int_0^t \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dr - \frac{m}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dr + \\ \frac{m}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \sqrt{V(0)} &= \\ \frac{m}{\lambda} \sqrt{V(t)} - \frac{m}{\lambda} e^{-\lambda t} \sqrt{V(0)} - \frac{m}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dr &\leq \\ \frac{m}{\lambda} \sqrt{V(t)} - \frac{m}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dr, \end{aligned}$$

所以可以得到  $\int_0^t m e^{-\lambda(t-s)} \|x(s)\| ds$  的一个上界:

$$\begin{aligned} \int_0^t m e^{-\lambda(t-s)} \|x(s)\| ds &\leq \\ \frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_1}} \frac{m}{\lambda} \left( \sqrt{V(t)} - \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dr \right) &\leq \\ \frac{\sqrt{\tilde{c}_2}}{\sqrt{\tilde{c}_1}} \frac{m}{\lambda} \|x(t)\| - \frac{1}{\sqrt{\tilde{c}_1}} \frac{m}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dr. \end{aligned}$$

下面讨论在控制律设计时, 只考虑该上界的第1部分  $\frac{\sqrt{\tilde{c}_2}}{\sqrt{\tilde{c}_1}} \frac{m}{\lambda} \|x(t)\|$  即可. 把上式代入式(A1)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{\tilde{c}_3}{\tilde{c}_2} V + \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1} \sqrt{V} \frac{m}{\lambda} (\sqrt{V(t)} - \\ &\int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dr) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x)w \leq \\ &-\frac{\tilde{c}_3}{\tilde{c}_2} V + \frac{\sqrt{\tilde{c}_2}}{\sqrt{\tilde{c}_1}} \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} V + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x)w - \\ &\frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1} \sqrt{V} \frac{m}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dr. \end{aligned}$$

如果存在  $w$  保证系统(7)在扇形区域内绝对指数稳定, 即存在  $\tilde{c}_5 > 0$  使得

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -\frac{\tilde{c}_3}{\tilde{c}_2} W + \frac{\sqrt{\tilde{c}_2}}{\sqrt{\tilde{c}_1}} \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} W + \frac{\partial W}{\partial v} g(t, v)w < \\ &-\tilde{c}_5 W(t, v). \end{aligned}$$

根据  $W(t, v)$  与  $V(t, x)$  的等价性, 式(A1)可变为

$$\dot{V} \leq -\tilde{c}_5 V - \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1} \sqrt{V} \frac{m}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{\dot{V}}{2\sqrt{V}} dr.$$

下面证明  $\dot{V} \leq -\tilde{c}V$ , 其中  $\tilde{c} > 0$ . 首先证明存在一条轨线  $\dot{U} = -\tilde{c}U$  满足

$$\dot{U} = -\tilde{c}_5 U - \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1} \sqrt{U} \frac{m}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda(t-r)} \frac{\dot{U}}{2\sqrt{U}} dr. \quad (\text{A2})$$

利用分步积分把上式变换为一般形式为

$$\dot{U} = -\tilde{c}_5 U - \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1} \sqrt{U} \frac{m}{\lambda} e^{-\lambda t} (e^{\lambda r} \sqrt{U}|_0^t - \lambda \int_0^t e^{\lambda r} \sqrt{U} dr).$$

把  $\dot{U} = -\tilde{c}U$  和  $U = e^{-\tilde{c}t} U_0$  代入上式可得

$$\begin{aligned} \dot{U} &= -\tilde{c}_5 e^{-\tilde{c}t} U_0 - \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} e^{-(\lambda+\tilde{c}/2)t} \\ & (e^{(\lambda-\tilde{c}/2)t} - 1 - \lambda \int_0^t e^{(\lambda-\tilde{c}/2)r} dr) U_0 = \\ & -\tilde{c}_5 e^{-\tilde{c}t} U_0 - \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} e^{-(\lambda+\tilde{c}/2)t} (e^{(\lambda-\tilde{c}/2)t} - \\ & 1 - \frac{\lambda}{\lambda-\tilde{c}/2} e^{(\lambda-\tilde{c}/2)t} + \frac{\lambda}{\lambda-\tilde{c}/2}) U_0 = \\ & -\tilde{c}_5 e^{-\tilde{c}t} U_0 - \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} e^{-(\lambda+\tilde{c}/2)t} \\ & (1 - \frac{\lambda}{\lambda-\tilde{c}/2}) (e^{(\lambda-\tilde{c}/2)t} - 1) U_0 = \\ & (-\tilde{c}_5 e^{-\tilde{c}t} + \frac{\tilde{c}_4}{2\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} e^{-\tilde{c}t} \frac{1}{\lambda-\tilde{c}/2} - \\ & \frac{\tilde{c}_4}{2\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} \frac{1}{\lambda-\tilde{c}/2} e^{-(\lambda+\tilde{c}/2)t}) U_0 = \\ & -(\tilde{c}_5 - \frac{\tilde{c}_4}{2\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} \frac{1}{\lambda-\tilde{c}/2} + \\ & \frac{\tilde{c}_4}{2\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} \frac{1}{\lambda-\tilde{c}/2} e^{-(\lambda-\tilde{c}/2)t}) U. \end{aligned}$$

可见当  $\lambda - \tilde{c}/2 > 0$  且

$$\tilde{c}_5 - \frac{\tilde{c}_4}{2\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} \frac{1}{\lambda-\tilde{c}/2} + \frac{\tilde{c}_4}{2\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} \frac{1}{\lambda-\tilde{c}/2} e^{(\tilde{c}/2-\lambda)t} = \tilde{c} \quad (\text{A3})$$

时,  $U = e^{-\tilde{c}t} U_0$  为式(A2)的一个解.

如果忽略时变项仅考虑由如下更简单的关系式构成的微分方程:

$$\tilde{c}_5 - \frac{\tilde{c}_4}{2\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} \frac{1}{\lambda-\tilde{c}/2} = \tilde{c}, \quad (\text{A4})$$

设其对应的解为  $U'(\tilde{c}_5)$ . 从上式可以看出对于任意  $\tilde{c}_5 > 0$ , 当  $\tilde{c} \in (0, 2\lambda)$  时必有满足式(A2)的  $\tilde{c}$ . 根据微分方程解的唯一性可知  $U'(\tilde{c}_5)$  为此微分方程的解.

根据微分方程关于参数的连续性定理(见文献[19]定理3.5), 当选择初始条件相同时, 由于式(A3)与式(A4)相差  $\frac{\tilde{c}_4}{2\tilde{c}_1} \frac{m}{\lambda} \frac{1}{\lambda-\tilde{c}/2} e^{(\tilde{c}/2-\lambda)t}$  且  $\lambda - \tilde{c}/2 > 0$  导致其指数收敛, 所以  $U(\tilde{c}_5)$  将逐渐逼近  $U'(\tilde{c}_5)$ , 且由  $\tilde{c}_5$  和  $\tilde{c}$  关系式可知  $U'(\tilde{c}_5) \geq U(\tilde{c}_5)$ . 又根据比较引理, 有  $V(\tilde{c}_5) \leq U(\tilde{c}_5)$ , 即  $V(\tilde{c}_5)$  有一个指数收敛的上界  $U = e^{-\tilde{c}t} U_0$ . 所以系统(6)指数稳定, 即在式(6)的控制律设计时, 只考虑该上界的第1部分  $\frac{\sqrt{\tilde{c}_2}}{\sqrt{\tilde{c}_1}} \frac{m}{\lambda} \|x(t)\|$  即可. 证毕.

作者简介:

王勇 (1978-), 男, 博士研究生, 目前研究方向为航天器自适应控制, E-mail: wyongzju@163.com.