

# 离轴式拖车移动机器人的任意路径跟踪控制

刘昱, 马保离<sup>†</sup>

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

**摘要:** 离轴式拖车移动机器人属于非完整系统, 当车头线速度随时间变化且过零变号时, 难以用一个控制器实现系统对期望路径的跟踪. 本文研究离轴式拖车移动机器人系统的任意路径跟踪问题. 首先由系统和虚拟小车的运动学方程得到误差状态模型, 线性化后用坐标变换将其化为标准型, 然后基于Lyapunov方法构造出一种跟踪控制律. 只要车头的运动线速度有界且不趋于零, 其导数有界, 则所设计的控制律就可以保证系统跟踪任意的期望路径, 且跟踪误差最终一致有界, 最终界的大小与期望路径的曲率变化率成比例. 当期望路径的曲率变化率为零或趋于零时, 所设计的控制律可以保证拖车移动机器人指数收敛到期望路径. 仿真结果证实了控制律的有效性.

**关键词:** 离轴式拖车移动机器人; 坐标变换; 任意路径跟踪; Lyapunov方法

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Arbitrary path following control of off-axle tractor-trailer mobile robot

LIU Yu, MA Bao-li<sup>†</sup>

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** The tractor-trailer mobile robot with off-axle hitching is a classical nonholonomic system. It is difficult to use one controller to achieve path following when the linear velocity of the tractor is time-varying and sign changeable. This paper investigates the arbitrary path following problem of off-axle tractor-trailer robots with time-varying and sign changeable linear velocity. The error state model is first derived from the kinematic equations of the system and the virtual vehicle. The coordinate transformation is used to convert the simplified linearized error model to a normal form, and then a path-following control law is constructed via Lyapunov methods. Assume that the linear velocity of the tractor is bounded, not convergent to zero, and its derivative is bounded, then the designed control law guarantees that the tractor-trailer system is able to follow an arbitrary desired path. The size of the ultimate bound is proportional to the derivative of curvature. Moreover, asymptotic exponential convergence of the tractor-trailer to the desired path is achieved when the derivative of curvature is zero or convergent to zero. Simulation results show the effectiveness of the proposed control scheme.

**Key words:** off-axle tractor-trailer mobile robot; coordinate transformation; arbitrary path following; Lyapunov methods

### 1 引言(Introduction)

带拖车移动机器人是受非完整约束的控制系統. 对于连轴式拖车移动机器人, 已有学者将其运动学模型化为链式系统, 并设计控制律跟踪指定路径<sup>[1]</sup>. 离轴式拖车移动机器人应用广泛, 但其模型不能转化为链式系统<sup>[2]</sup>, 因此其控制问题引起了控制学界的普遍关注. 离轴式拖车移动机器人前进时拖车是自然稳定的, 控制律的设计可以借鉴已有的移动机器人控制器设计方法, 但后退时极易出现折叠、不稳定等现象. 为解决离轴式拖车移动机器人的后退跟踪控制问题, 霍伟、Morales等采用将最后一节拖车作为虚拟车头的方法设计控制律, 然后再通过递推关系式得到用实际车头控制量表示的

控制律<sup>[3-4]</sup>. Astolfi等基于Lyapunov方法设计了跟踪直线和圆周路径的控制器, 但是控制律的计算引入了新的微分方程, 需通过数值积分的方法解算<sup>[5]</sup>. Pradalier和Usher通过控制铰接角实现车头对期望路径的后退跟踪<sup>[6]</sup>. Petrov用高增益的方法对系统进行降阶并设计控制律实现了后退路径跟踪<sup>[7]</sup>. 周火凤、马保离等用内模原理对系统的时间-状态线性化模型设计线性动态反馈控制律, 保证路径跟踪误差有界和最终一致有界<sup>[8]</sup>. Matsushita和Murakami采用虚拟转向的方法实现系统对期望直线的跟踪<sup>[9]</sup>. Leng和Minor基于期望路径曲率提出一种转向和线速度分别控制的两级控制器, 但所设计的控制律只在车头速度为负时才有效<sup>[10]</sup>. 然而, 以上文献均假

收稿日期: 2012-07-17; 收修改稿日期: 2012-10-26.

<sup>†</sup>通信作者. Tel.: +86 010-82314723.

基金项目: 国家“973”计划资助项目(2012CB821202); 北京市自然科学基金资助项目(4122043, 4112034); 国家自然科学基金资助项目(60874012, 61174057).

定车头的线速度为非零常数或不改变符号的时变函数, 没有考虑车头线速度随时间变化且可能过零变号的情况. 本文研究车头轮轴中以连续时变且可能变号的线速度跟踪任意路径的控制问题. 首先建立系统的跟踪误差模型, 并给出路径跟踪问题的数学描述. 然后基于Lyapunov方法构造出控制律. 理论分析表明, 只要车头的运动线速度有界、不趋于零, 且期望路径的曲率变化率较小, 所设计的控制律可以实现拖车移动机器人对给定路径的跟踪, 且跟踪误差的界与期望路径的曲率变化率成正比. 对于曲率为常数或收敛于常数的路径, 所设计的控制律可以实现拖车移动机器人对给定路径的渐近指数跟踪. 最后对所设计的控制律进行了仿真实证.

## 2 问题描述(Statement of problem)

考虑图1所示的离轴式机器人系统, 首先定义车头的位姿为 $(x, y, \theta)$ ,  $(x, y)$ 表示 $P_1$ 点在某一横轴与水平方向平行、纵轴与竖直方向平行的平面直角坐标系中的位置, 车头与拖车连杆间的夹角为 $\varphi$ , 则可得到系统的运动学方程<sup>[5]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \omega = \frac{vu}{l_1}, \\ \dot{\varphi} = -\frac{v}{l_2} \sin \varphi - \frac{v}{l_1 l_2} (l_3 \cos \varphi + l_2)u, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $(v, \omega)$ 为车头的运动线速度和角速度,  $u = \tan \delta$ 是控制输入,  $\delta$ 为车头前轮相对车体的转向角. 由拖车结构可知, 应有 $|\varphi| < \pi/2$ .

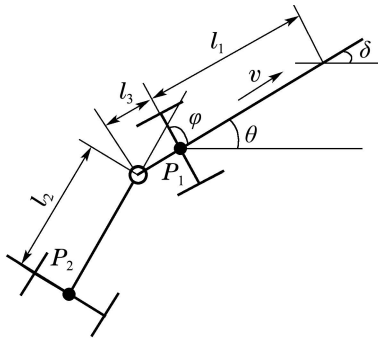


图1 离轴式拖车移动机器人示意图  
Fig. 1 Diagram of an off-axis tractor-trailer

为了研究车头 $P_1$ 的路径跟踪问题, 需要首先定义相应的跟踪误差. 以下利用移动机器人控制中常见的投影法定义路径跟踪误差.

假定 $(x_d, y_d, \theta_d)$ 为在期望几何路径上运动的虚拟小车的位置和姿态,  $(v_d, \omega_d)$ 为虚拟小车的运动速度和角速度, 则可以得到虚拟小车的运动方程

$$\dot{x}_d = v_d \cos \theta_d, \quad \dot{y}_d = v_d \sin \theta_d, \quad \dot{\theta}_d = \omega_d. \quad (2)$$

为了保证虚拟小车总是保持在期望几何路径上运

动, 要求虚拟小车的初始位置在期望几何路径上, 初始运动方向沿路径的切线方向, 并且其运动角速度等于期望几何路径曲率 $\chi_d$ 和线速度的积, 即

$$\omega_d = \chi_d v_d. \quad (3)$$

定义跟踪误差 $(x_e, y_e, \theta_e)$ 为车头和虚拟小车的位姿误差在固连于虚拟小车的坐标系中的投影, 即

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_d & \sin \theta_d & 0 \\ -\sin \theta_d & \cos \theta_d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_d \\ y - y_d \\ \theta - \theta_d \end{bmatrix}. \quad (4)$$

对上式求导, 并利用式(1)-(2)得

$$\begin{cases} \dot{x}_e = v \cos \theta_e - v_d + y_e \chi_d v_d, \\ \dot{y}_e = v \sin \theta_e - x_e \chi_d v_d, \\ \dot{\theta}_e = \frac{uv}{l_1} - \chi_d v_d. \end{cases} \quad (5)$$

由于虚拟机器人的位置和姿态以及运动线速度均是由车头在几何路径的投影所得到的, 所以有 $x_e = \dot{x}_e = 0$ . 由 $\dot{x}_e = 0$ 可以得到

$$v_d = \frac{v \cos \theta_e}{1 - y_e \chi_d}. \quad (6)$$

将式(6)和 $x_e = 0$ 代入式(5)的后两个方程, 并结合 $\dot{\varphi}$ 的方程, 记 $a_1 = 1/l_1$ ,  $a_2 = 1/l_2$ ,  $a_3 = l_3/(l_1 l_2)$ , 可以得到以车头跟踪误差表示的系统状态方程

$$\begin{cases} \dot{y}_e = v \sin \theta_e, \\ \dot{\theta}_e = v(a_1 u - \chi_d \frac{\cos \theta_e}{1 - y_e \chi_d}), \\ \dot{\varphi} = -a_2 v \sin \varphi - v(a_3 \cos \varphi + a_1)u. \end{cases} \quad (7)$$

容易求得当 $\chi_d$ 为常数时使得 $y_e = 0$ 的系统(7)的平衡点为 $(0, 0, \varphi_s)$ , 其中

$$\varphi_s = 2 \arctan \frac{\chi_d(a_1 + a_3)}{-a_1 a_2 - \sqrt{a_1^2 a_2^2 - \chi_d^2(a_1^2 - a_3^2)}},$$

且有

$$u_s = \frac{\chi_d}{a_1}. \quad (8)$$

虽然在求平衡点时假设 $\chi_d$ 不随时间变化, 但由后面的分析可知, 只要 $\chi_d$ 随时间的变化率足够小, 仍然能实现车头对给定路径的跟踪.

定义 $\varphi_e = \varphi - \varphi_s$ ,  $u_e = u - u_s$ , 得到系统的误差状态方程

$$\begin{cases} \dot{y}_e = v \sin \theta_e, \\ \dot{\theta}_e = a_1 v u_e + v \chi_d (1 - \frac{\cos \theta_e}{1 - y_e \chi_d}), \\ \dot{\varphi}_e = -a_2 v [\sin(\varphi_e + \varphi_s) - \sin \varphi_s] - v [a_3 \cos(\varphi_e + \varphi_s) + a_1] u_e - \dot{\varphi}_s. \end{cases} \quad (9)$$

由式(9)的前两个方程不难发现, 若系统无拖车, 车头可以跟踪任意路径. 现在考虑带拖车的情况, 将 $\varphi_s$ 看成扰动, 可以看出, 当 $\chi_d$ 较大时,  $|\varphi_s|$ 较大且接

近 $\pi/2$ , 系统稳定区较小, 则需要 $\dot{\varphi}_s$ 较小, 即 $\dot{\chi}_d$ 较小. 当 $\chi_d$ 较小时,  $|\varphi_s|$ 远远小于 $\pi/2$ , 系统稳定区较大,  $\dot{\varphi}_s$ 可以较大, 即 $\dot{\chi}_d$ 可以较大.

这样可得到控制目标: 给定 $(v, \dot{v})$ 有界,  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \neq 0$ , 设计 $u_e$ 使得 $(y_e, \theta_e, \varphi_e)$ 渐近稳定或有界且最终一致有界.

### 3 控制律设计(Controller design)

假定 $\dot{\chi}_d$ 为零或趋于零, 则 $\dot{\varphi}_s$ 为零或趋于零. 当 $y_e, \theta_e, \varphi_e$ 较小时, 为了简化控制律的设计, 将式(9)在平衡点线性化得到

$$\begin{cases} \dot{y}_e = v\theta_e, \\ \dot{\theta}_e = a_1 v u_e - v \chi_d^2 y_e, \\ \dot{\varphi}_e = -a_2 v \varphi_e \cos \varphi_s - v(a_3 \cos \varphi_s + a_1) u_e. \end{cases} \quad (10)$$

因此, 拖车移动机器人系统对给定路径的跟踪问题等价于上述误差状态方程原点的稳定性问题.

上面得到的系统误差状态方程(10)虽然是线性方程, 但难以直接设计控制律. 采用文献[11]的方法, 将误差状态方程(10)化为标准形式, 以便于控制律的设计. 取输出为

$$\xi_1 = y_e + d_1 \theta_e + d_2 \varphi_e, \quad (11)$$

其中:  $d_1, d_2$ 为待定系数, 对 $\xi_1$ 求导并令 $v u_e$ 的系数中常数项为零, 则待定系数需满足

$$d_1 a_1 - d_2 a_3 \cos \varphi_s - d_2 a_1 = 0. \quad (12)$$

选取

$$\xi_2 = \theta_e - d_1 \chi_d^2 y_e - d_2 a_2 \varphi_e \cos \varphi_s. \quad (13)$$

对 $\xi_2$ 求导并令 $v u_e$ 的系数中常数项为零, 则待定系数需满足

$$a_1 + d_2 a_2 a_3 \cos^2 \varphi_s + d_2 a_1 a_2 \cos \varphi_s = 0. \quad (14)$$

由待定系数的方程(12)(14)解得

$$\begin{cases} d_1 = -\frac{1}{a_2 \cos \varphi_s}, \\ d_2 = -\frac{a_1}{a_2 a_3 \cos^2 \varphi_s + a_1 a_2 \cos \varphi_s}. \end{cases} \quad (15)$$

选取

$$\xi_3 = -\chi_d^2 y_e - d_1 \chi_d^2 \theta_e + d_2 a_2^2 \varphi_e \cos^2 \varphi_s. \quad (16)$$

对 $\xi_3$ 求导并选取 $u_1$ 如式(17)所示, 解得 $u_e$ 如式(18)所示, 则经过近似反馈线性化的系统可表示为式(19):

$$\begin{aligned} u_1 = & -\chi_d^2 \theta_e - d_1 a_1 \chi_d^2 u_e + d_1 \chi_d^4 y_e - \\ & d_2 a_2^3 \varphi_e \cos^3 \varphi_s - d_2 a_2^2 a_3 u_e \cos^3 \varphi_s - \\ & d_2 a_1 a_2^2 u_e \cos^2 \varphi_s, \end{aligned} \quad (17)$$

$$u_e = \frac{-u_1 - \chi_d^2 \theta_e + d_1 \chi_d^4 y_e - d_2 a_2^3 \varphi_e \cos^3 \varphi_s}{d_1 a_1 \chi_d^2 + d_2 a_2^2 a_3 \cos^3 \varphi_s + d_2 a_1 a_2^2 \cos^2 \varphi_s}, \quad (18)$$

$$\dot{\xi}_1 = v \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = v \xi_3, \quad \dot{\xi}_3 = v u_1. \quad (19)$$

基于所得到的系统方程(19), 可以将拖车移动机器人任意路径跟踪问题叙述为: 给定 $v(t), \dot{v}(t)$ 有界,  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \neq 0$ , 且期望路径的曲率变化率足够小, 设计控制律 $u_1(\cdot)$ 使得系统(19)最终一致有界或渐近稳定.

下面首先针对系统(19)设计控制律, 然后将证明如果所设计的控制律可以使系统(19)渐近稳定, 那么相同的控制律可以使系统(9)的状态有界且最终一致有界.

**引理 1** 光滑映射 $\phi(x)$ 定义在 $\mathbb{R}^n$ 中一个区域 $\Omega$ 上, 如果雅可比矩阵 $\nabla \phi$ 在 $\Omega$ 中的一个点 $x = x_0$ 上是非奇异的, 则 $\phi(x)$ 是定义在 $\Omega$ 中 $x_0$ 的一个邻域上的局部微分同胚<sup>[12]</sup>.

经验证映射 $T : (y_e, \theta_e, \varphi_e) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 在原点是局部微分同胚的. 所以如果由 $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ 表示的系统(19)是渐近稳定的, 则系统(10)也是渐近稳定的.

系统(19)虽然形式简单, 但由于其为时变系统, 控制律的设计并不容易. 本节利用Lyapunov方法构造控制律.

定义 $\bar{\xi}_3 = k_1 \xi_1 + \xi_3 (k_1 > 0)$ , 则系统(19)化为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = v \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = -v k_1 \xi_1 + v \bar{\xi}_3, \\ \dot{\bar{\xi}}_3 = k_1 v \xi_2 + v u_1. \end{cases}$$

取备选Lyapunov函数

$$L = \frac{1}{2} k_1 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \xi_2^2 + \frac{1}{2} k_2 \bar{\xi}_3^2, \quad k_2 > 0, \quad (20)$$

则

$$\dot{L} = k_1 \xi_1 v \xi_2 + \xi_2 (-v k_1 \xi_1 + v \bar{\xi}_3) + k_2 \bar{\xi}_3 (k_1 v \xi_2 + v u_1).$$

取

$$u_1 = -(k_1 + \frac{1}{k_2}) \xi_2 - k_3 v \bar{\xi}_3, \quad k_3 > 0, \quad (21)$$

则 $\dot{L} = -k_2 k_3 v^2 \bar{\xi}_3^2 \leq 0$ . 因为 $L \geq 0, \dot{L} \leq 0$ , 所以 $\xi_1, \xi_2, \bar{\xi}_3$ 有界. 假定 $(v, \dot{v})$ 有界, 则容易证明 $\dot{L}$ 有界, 由Barbalat引理得,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{L} = 0$ . 假定 $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \neq 0$ , 则

$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\xi}_3 = 0$ . 因为 $\dot{\bar{\xi}}_3$ 有界, 因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\bar{\xi}}_3 = -\frac{v \xi_2}{k_2} - k_3 v^2 \bar{\xi}_3 = 0,$$

即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_2 = 0$ . 因为 $\dot{\xi}_2$ 有界, 因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\xi}_2 = -k_1 v \xi_1 + v \bar{\xi}_3 = 0,$$

即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_1 = 0$ . 由 $\bar{\xi}_3 = k_1 \xi_1 + \xi_3$ 得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_3 = 0$ . 综上所述, 系统(19)是渐近稳定的, 则系统(10)是渐近稳定的. 因为线性系统的渐近稳定与指数稳定是等价的. 所以对系统(10)所设计的控制律同样可以使其指数稳定. 进一步可知, 当 $\dot{\chi}_d$ 为零, 即 $\dot{\varphi}_s$ 为零, 此时未线性化的系统(9)也是指数稳定的.

前面的结论假设 $\dot{\chi}_d$ 为零或趋于零. 但实际情况并非总是如此, 现在假设 $\dot{\chi}_d$ 较小且不为零, 则 $\dot{\varphi}_s$ 较小, 此时可将系统(9)中 $-\dot{\varphi}_s$ 看成扰动, 由文献[13]中引理9.2可得系统(9)是有界且最终一致有界的, 且界的大小与扰动 $-\dot{\varphi}_s$ 成正比, 即与 $\dot{\chi}_d$ 成正比.

综上, 将控制律 $u = u_s + u_e$ 和式(8)(18)(21)应用于系统(1)可以得到如下结论:

**结论 1** 给定 $v(t)$ ,  $\dot{v}(t)$ 有界, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \neq 0$ , 如果期望路径的曲率变化率足够小, 则拖车移动机器人可以实现对给定路径的局部跟踪, 且跟踪误差是有界且最终一致有界的, 最终一致界的大小与期望路径的曲率变化率成正比. 进而, 如果期望路径的曲率变化率为零或趋于零, 则拖车移动机器人渐近指数收敛于给定路径.

#### 4 仿真实验(Simulation verification)

本节对系统跟踪圆和正弦路径的情况进行仿真验证, 在此之前先给出任意路径的曲率表达式.

设期望路径为 $f(x, y) = 0$ 且 $f$ 的二阶偏导数是连续的, 对 $t$ 求导得 $f_x v_d \cos \theta_d + f_y v_d \sin \theta_d = 0$ , 消去 $v_d$ 后再对 $t$ 求导得

$$\begin{aligned} & (f_{xx} v_d \cos \theta_d + f_{xy} v_d \sin \theta_d) \cos \theta_d - \\ & f_x \sin \theta_d \omega_d + (f_{xy} v_d \cos \theta_d + f_{yy} v_d \sin \theta_d) + \\ & f_y \cos \theta_d \omega_d = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

则

$$\chi_d = \frac{\omega_d}{v_d} = \frac{f_{xx} \cos^2 \theta_d + f_{xy} \sin 2\theta_d + f_{yy} \sin^2 \theta_d}{f_x \sin \theta_d - f_y \cos \theta_d}. \quad (23)$$

a) 跟踪圆路径的仿真结果.

设期望的圆周路径为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{(x - x_c)^2}{R^2} + \frac{(y - y_c)^2}{R^2} - 1, \\ f_x &= \frac{2(x - x_c)}{R^2}, \quad f_y = \frac{2(y - y_c)}{R^2}, \\ f_{xx} &= \frac{2}{R^2}, \quad f_{yy} = \frac{2}{R^2}, \quad f_{xy} = 0. \end{aligned}$$

经推导可得

$$\sin \theta_d = \frac{x - x_c}{R}, \quad \cos \theta_d = -\frac{y - y_c}{R},$$

代入曲率 $\chi_d$ 表达式可得 $\chi_d = 1/R$ 为常数. 选择 $(x_c, y_c) = (0, 0)$ ,  $R = 50$ , 初始条件选为

$$\begin{aligned} (x, y, \theta, \varphi, x_d, y_d, \theta_d)(0) &= \\ (R - 49, 0, -1.5, 0, R, 0, -\frac{\pi}{2}), \\ v &= 3(-0.5 - \sin \frac{t}{5}), \end{aligned}$$

时间区间 $[0, 200]$ . 控制器的系数为

$$k_1 = 0.0025, \quad k_2 = 40, \quad k_3 = 0.15.$$

仿真结果如图2-3所示, 图2为跟踪圆路径时误差状态变量随时间变化的情况, 图3为系统的实际路径和期望的圆路径.

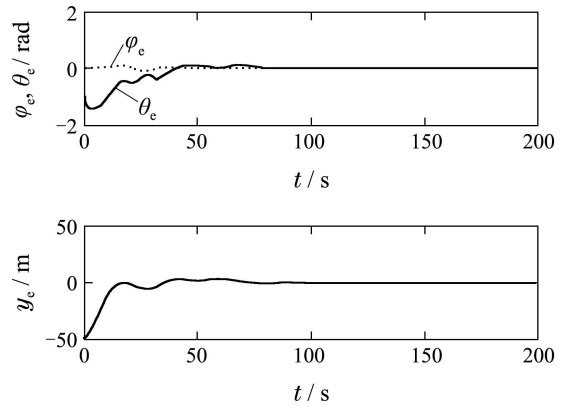


图2 跟踪圆路径的误差状态变量

Fig. 2 Error state variables of circle path following

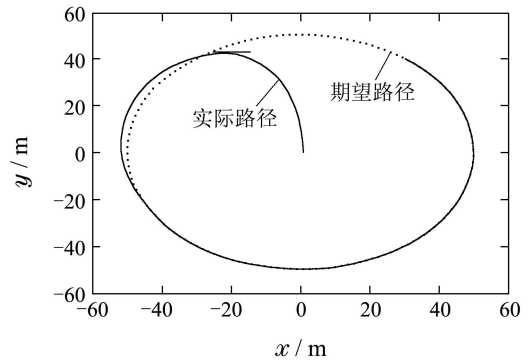


图3 实际和期望圆路径

Fig. 3 Real and desired circle paths

由图2知,  $y_e, \theta_e, \varphi_e$ 都渐近收敛到零, 即所设计的控制律可以使系统实现对给定圆周路径的渐近跟踪. 由图3知, 实现这种渐近跟踪的条件并不苛刻, 允许系统初始位置与期望路径有较大偏差.

b) 跟踪正弦路径的仿真结果.

设期望的正弦路径为 $f(x, y) = y - a \sin(bx)$ ,  $f_x = -ab \cos(bx)$ ,  $f_{xx} = ab^2 \sin(bx)$ ,  $f_{yy} = 0$ ,  $f_{xy} = 0$ , 由曲率相关知识和计算公式可知, 正弦曲线的曲率不是常数. 选择 $a = 1$ ,  $b = 0.05$ , 初始条件为

$$\begin{aligned} (x, y, \theta, \varphi, x_d, y_d, \theta_d)(0) &= \\ (0, -35, \arctan(ab), 0, 0, 0, \arctan(ab)), \\ v &= 3(-0.5 - \sin \frac{t}{5}), \end{aligned}$$

时间区间 $[0, 300]$ , 控制器的系数为 $k_1 = 0.0025$ ,  $k_2 = 40$ ,  $k_3 = 0.15$ .

仿真结果如图4-5所示, 图4为跟踪正弦路径时误差状态变量随时间变化的情况, 图5为系统的实际路径和期望的正弦路径. 从图4可以看出 $y_e, \theta_e, \varphi_e$ 较小,

这是由于期望正弦路径的曲率变化率较小,而跟踪误差与期望路径的曲率变化率成正比,所以跟踪误差也很小。可以看出所设计的控制律可以使系统实现对给定正弦路径的跟踪。图5说明在系统初始位置与期望路径偏差较大时,所设计的控制律是有效的。以上仿真结果证实了对于任意路径,系统跟踪误差有界且最终一致有界这一结论的正确性。

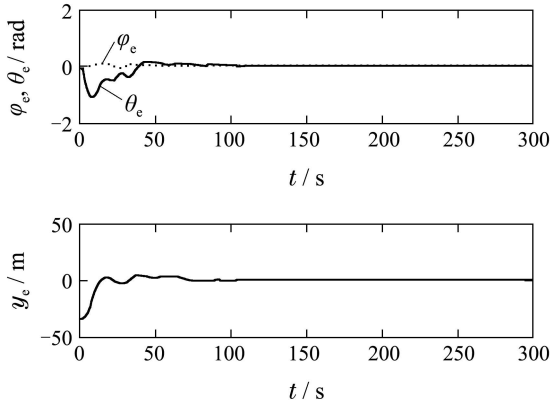


图4 跟踪正弦路径的误差状态变量

Fig. 4 Error state variables of sine path following

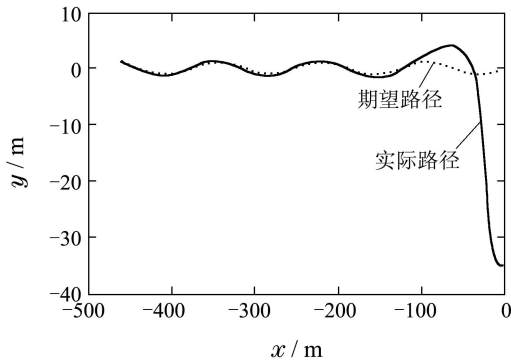


图5 实际和期望正弦路径

Fig. 5 Real and desired sine paths

## 5 结论(Conclusions)

本文研究离轴式拖车移动机器人的任意路径跟踪问题。基于所推导的跟踪误差模型,采用坐标变换对线性化后的系统误差模型进行简化,并应用Lyapunov方法构造控制律。在拖车移动机器人线速度可变号的情况下,所设计的控制律可以使离轴式拖车移动机器人跟踪曲率变化率不大的任意期望路径,且跟踪误差是有界且最终一致有界的。当期望路径的曲率变化率为零或趋于零时,可以保证拖车移动机器人渐近指数收敛到期望的路径。仿真结果证实了本文所提出方法的有效性。

## 参考文献(References):

[1] SAMSON C. Control of chained systems: application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots [J]. *IEEE*

*Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(1): 64 – 77.

- [2] 何战斌, 马保离. 离轴式拖车移动机器人的反馈镇定 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(7): 758 – 762.  
(HE Zhanbin, MA Baoli. Feedback stabilization of tractor-trailers with off-axle hitching [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(7): 758 – 762.)
- [3] 霍伟, 程贇. 移动机器人拖车的后退路径跟踪控制设计 [C] //第25届中国控制会议论文集. 哈尔滨: IEEE, 2006: 1562 – 1566.  
(HUO Wei, CHENG Zuan. Backward path-following control of mobile robots with trailers [C] // *Proceedings of the 25th Chinese Control Conference*. Harbin: IEEE, 2006: 1562 – 1566.)
- [4] MORALES J, MARTINEZ J L, MANDOW A, et al. Virtual steering limitations for reversing an articulated vehicle with off-axle passive trailers [C] // *Proceedings of the 35th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. Piscataway, NJ: IEEE Computer Society, 2009: 2385 – 2390.
- [5] ASTOLFIA, BOLZEM P, LOCATELLI A. Path-tracking of a tractor-trailer vehicle along rectilinear and circular paths: a Lyapunov-based approach [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2004, 20(1): 154 – 160.
- [6] PRADALIER C, USHER K. Robust trajectory tracking for a reversing tractor trailer [J]. *Journal of Field Robotics*, 2008, 25(6): 378 – 399.
- [7] PETROV P. Nonlinear backward tracking control of an articulated mobile robot with off-axle hitching [C] // *Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Signal Processing, Robotics and Automation*. Athens, Greece: World Scientific and Engineering Academy and Society, 2010: 269 – 273.
- [8] 周火凤, 马保离, 宋丽辉, 等. 离轴式拖车移动机器人的跟踪控制 [J]. *自动化学报*, 2010, 36(9): 1272 – 1278.  
(ZHOU Huofeng, MA Baoli, SONG Lihui, et al. Path following control of tractor-trailers with off-axle hitching [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(9): 1272 – 1278.)
- [9] MATSUSHITA K, MURAKAMI T. Nonholonomic equivalent disturbance based backward motion control of tractor-trailer with virtual steering [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2008, 55(1): 280 – 287.
- [10] LENG Z, MINOR M A. A simple tractor-trailer backing control law for path following with side-slope compensation [C] // *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Shanghai: IEEE, 2011: 2386 – 2391.
- [11] HAUSER J, SASTRY S, KNKOTOVIC P. Nonlinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(3): 392 – 398.
- [12] 斯洛坦, 李卫平. 应用非线性控制 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2006.  
(SLOTINE J E, LI Weiping. *Applied Nonlinear Control* [M]. Beijing: China Machine Press, 2006.)
- [13] 哈里尔. 非线性系统 [M]. 第3版. 北京: 电子工业出版社, 2011.  
(KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. 3rd Edition. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011.)

## 作者简介:

刘 昱 (1987–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为非线性控制、拖挂车轮式移动机器人跟踪控制, E-mail: wsllayu@126.com;

马保离 (1963–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性系统控制、机器人控制, E-mail: mabaoli@buaa.edu.cn.