第 30 卷第 8 期
2013 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 30 No. 8
Aug. 2013

DOI: 10.7641/CTA.2013.20928

自旋量子系统的可控李代数计算

王 萌[1,2], 周绍生[1†]

(1. 杭州电子科技大学 信息与控制研究所, 浙江 杭州 310018; 2. 杭州电子科技大学 理学院, 浙江 杭州 310018)

摘要: 动态系统可控性同是经典和量子控制中研究的一个基本问题, 本文研究了单自旋和双自旋量子系统的可控李代数的计算. 首先基于量子系统可控的等价性条件, 通过单量子系统Hamiltonian算符的李括号运算, 给出了与基系数相关的系统可控的充要条件. 然后利用Cartan分解方法构造了李代数$su(4)$的矩阵基, 同时根据可控性基本定理提出了Hamiltonian算符多重李括号的计算方法及系统的可控性判据.

关键词: 量子系统; 李代数; 基系数; 可控性; $su(4)$

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Calculations of the controllability Lie algebra for spin quantum systems

WANG Meng[1,2], ZHOU Shao-sheng[1†]

(1. Institute of Information and Control, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou Zhejiang 310018, China;
2. College of Science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

Abstract: Controllability of dynamical systems is a fundamental problem for both classical control as well as quantum control. This paper focuses on investigating the controllability Lie algebra of single-spin and two spin quantum systems. Firstly, based on the equivalent controllability conditions of quantum systems, some general necessary and sufficient conditions related to the basis coefficients are obtained by computing Lie brackets of Hamiltonian operators for single-spin quantum systems. Secondly, the matrix basis of Lie algebra $su(4)$ is generated by Cartan decomposition. Using the matrix basis and employing the controllability theorem of quantum system, a calculation method of multiple Lie brackets for the Hamiltonian operators and a controllability criterion of quantum systems are also put forward in this article.

Key words: quantum system; Lie algebra; basis coefficient; controllability; $su(4)$

1 引言(Introduction)

量子系统控制的理论问题中最早吸引众多数学家研究的是量子系统的可控性问题[1–2]. 但是由于系统本身的复杂性, 目前对于量子系统可控性研究主要基于李群李代数的分解及图论的方法, 且集中在有限维的模型上 [1,3].

最早提出量子系统可控性概念的是美国华盛顿大学G. M. Huang和T. J. Tarn于1983年在《J.Math.Phy.》中发表了名为“On the controllability of quantum-mechanical systems”的论文[4]. 该论文首先在理论上对线性量子系统的可控性进行研究, 成功获得了量子系统在某一特定的Hilbert空间有限维子流形上的全局可控性条件, 同时利用李代数方法对无限维空间量子系统的可控性进行了一些数学上的讨论, 从大的方向上对量子系统的控制进行了一些展望. 近年来, 随着越来越多研究人员的参与, 量子系统可控性研究也取得了一定的成果, 特别是许多特殊情况下的有限维系统已被解决. 2003年, Albertini和D’Alessandro对有限维量子系统定义了算符可控性、纯态可控性、等价态可控性, 并根据李群李代数理论给出各种可控性判据, 同时建立了不同可控性概念的联系[5]. Schirmer等人根据动力李群和李代数的概念针对量子系统又提出一种量子观测可控性定义, 并且针对有限能级量子系统完全可控性的一些限定条件[6], D.D’Alessandro利用李代数结构分解的方法研究了n维量子系统的可控性[7], C.Altafini基于图论的连通性定理得到了n维量子系统可控的充分条件[8]. 对于无限维量子系统的可控性研究还处于起步阶段, 少数人运用一些新的方法或者把有限维推广到无限维的方法来研究无限维系统的可控性[9–10].

本文将在以上研究结果的基础上, 进一步计算分析单自旋和双自旋量子系统的可控性. 第2部分介绍了李代数相关的李括号计算结果及预备定理. 第3部分由量子系统算符可控的基本定理得到了单自旋量子与基系数相关的系统可控的充要条件. 第4部分利用李代数的Cartan分解构造了双自旋量子系统Hamil-

收稿日期: 2012−09−04; 收修改稿日期: 2013−04−21.
†通信作者. E-mail: sszhou65@163.com; Tel.: +86 13282126860.
基金项目: 国家重点基础研究“973”计划资助项目(2012CB821204); 国家自然科学基金资助项目(61273093); 浙江省重点自然科学基金资助项目(LZ12F03001).

tonian算符的矩阵基, 通过基系数表示进行算符的算符多重李括号运算, 进而通过计算系数矩阵来判定系统的可控性.

2 李代数预备知识(Lie algebra preliminaries)

定义 1 李代数$su(2^n)$是由复数域$\mathbb{C}$上的斜厄米矩阵组成的集合, 即

$$su(2^n) = \{A \mid A^\dagger + A = 0,\ A \in \mathbb{C}^{2^n \times 2^n}\}, \tag{1}$$

这里$A^\dagger$表示矩阵A的共轭转置.

由于Hamiltonian算符H是厄米算符, 即$H = H^\dagger$, 因而$-\mathrm{i}H \in su(2^n)$.

定义泡利矩阵$\sigma_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{y}, \sigma_\mathrm{z}$及单位阵$\sigma_\mathrm{I}$:

$$\begin{cases} \sigma_\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_\mathrm{y} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}, \\ \sigma_\mathrm{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \sigma_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

泡利矩阵$\sigma_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{y}, \sigma_\mathrm{z}$是厄米矩阵, 进而有$-\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_\mathrm{x}$, $-\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_\mathrm{y}, -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_\mathrm{z} \in su(2)$, 且为$su(2)$的一组基. 设

$$\lambda_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_\mathrm{x},\ \lambda_2 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_\mathrm{y},\ \lambda_3 = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_\mathrm{z}. \tag{3}$$

$\{\lambda_i\}_{i=1}^3$有如下关系[7]:

$$[\lambda_1, \lambda_2] = \lambda_3,\ [\lambda_2, \lambda_3] = \lambda_1,\ [\lambda_3, \lambda_1] = \lambda_2, \tag{4}$$

$$\lambda_1\lambda_1^\dagger = \lambda_2\lambda_2^\dagger = \lambda_3\lambda_3^\dagger = \frac{1}{4}\sigma_\mathrm{I}. \tag{5}$$

注 1 这里李括号对易运算定义为$[A, B] := AB - BA$; 反对易运算定义为$\{A, B\} := AB + BA$.

反对易括号运算有如下等式成立:

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\sigma_\mathrm{I},\ \{\lambda_i, \sigma_\mathrm{I}\} = 2\lambda_i, \tag{6}$$

其中$i, j = 1, 2, 3$.

引理 1[11] 李代数$su(4)$的直和分解$su(4) = \ell \oplus \mathfrak{M}$, 这里$\ell, \mathfrak{M}$分别表示为

$$\ell = \mathrm{span}\frac{1}{2}\mathrm{i}\{\sigma_\mathrm{x} \otimes \sigma_\mathrm{I}, \sigma_\mathrm{y} \otimes \sigma_\mathrm{I}, \sigma_\mathrm{z} \otimes \sigma_\mathrm{I}, \sigma_\mathrm{I} \otimes \sigma_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{I} \otimes \sigma_\mathrm{y}, \sigma_\mathrm{I} \otimes \sigma_\mathrm{z}\}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{M} = \mathrm{span}\frac{1}{2}\mathrm{i}\{\sigma_\mathrm{x} \otimes \sigma_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{x} \otimes \sigma_\mathrm{y}, \sigma_\mathrm{x} \otimes \sigma_\mathrm{z}, \sigma_\mathrm{y} \otimes \sigma_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{y} \otimes \sigma_\mathrm{y}, \sigma_\mathrm{y} \otimes \sigma_\mathrm{z}, \sigma_\mathrm{z} \otimes \sigma_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{z} \otimes \sigma_\mathrm{y}, \sigma_\mathrm{z} \otimes \sigma_\mathrm{z}\}. \tag{8}$$

引理1的直和分解是$su(4)$空间的Cartan分解, 且满足

$$[\ell, \ell] \subset \ell,\ [\ell, \mathfrak{M}] = \mathfrak{M},\ [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}] \subset \ell. \tag{9}$$

引理 2[11] 对多量子系统(见式(15))由算符矩阵张成的可控李代数$su(2^n)$, 令

$$\begin{cases} su_\ell(2^n) = \mathrm{span}\{A \otimes \sigma_\mathrm{z}, B \otimes \sigma_\mathrm{I}, \mathrm{i}I_{n\mathrm{z}}\}, \\ su_\mathfrak{M}(2^n) = \mathrm{span}\{A \otimes \sigma_\mathrm{x}, B \otimes \sigma_\mathrm{y}, \mathrm{i}I_{n\mathrm{x}}, \mathrm{i}I_{n\mathrm{y}}\}, \end{cases} \tag{10}$$

其中: $I_{n\tau} = \sigma_\mathrm{I} \otimes \sigma_\mathrm{I} \otimes \cdots \otimes \sigma_\mathrm{I} \otimes \sigma_\tau$, σ_τ在第n位上, $\tau = \{x, y, z\}$; 且这里$A, B \in su(2^{n-1})$.

则李代数$su(2^n)$有直和分解$su(2^n) = su_\ell(2^n) \oplus su_\mathfrak{M}(2^n)$, 且

$$\begin{cases} [su_\ell(2^n), su_\ell(2^n)] \subset su_\ell(2^n), \\ [su_\ell(2^n), su_\mathfrak{M}(2^n)] = su_\mathfrak{M}(2^n), \\ [su_\mathfrak{M}(2^n), su_\mathfrak{M}(2^n)] \subset su_\ell(2^n). \end{cases} \tag{11}$$

对于多量子系统算符矩阵的李括号运算有如下引理:

引理 3[12–13] 给定矩阵$A_1, \cdots, A_n, B_1, \cdots, B_n \in su(2)$, 则$A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$和$B_1 \otimes \cdots \otimes B_n$的李括号运算可由下式给出:

$$[A_1 \otimes \cdots \otimes A_n, B_1 \otimes \cdots \otimes B_n] = \sum \frac{1}{2^{n-1}}((A_1, B_1) \otimes (A_2, B_2) \otimes \cdots \otimes (A_n, B_n)), \tag{12}$$

其中每个被加项中的括号$(\cdot,\ \cdot)$是

$$\begin{cases} [\cdot, \cdot], & k\text{是奇数时, 有}k\text{次}, \\ \{\cdot, \cdot\}, & n - k\text{次}, \end{cases} \tag{13}$$

求和是指当k为奇数时, 所有可能(不重复)的$[\cdot, \cdot]$和$\{\cdot, \cdot\}$的组合.

3 单自旋量子系统的可控性(Controllability of single-spin quantum systems)

3.1 量子系统的可控性(Controllability of quantum systems)

量子控制系统的量子态用Hilbert空间的态矢$|\psi(t)\rangle$描述, 它随时间演化遵循Schrodinger方程[14]:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle. \tag{14}$$

量子控制的主要目的是用外部场控制微观系统的量子态. 因此, 外部控制场$u(t)$通过Hamiltonian算符$H(H = H_0 + uH_1)$影响控制系统状态. 通过幺正变换$|\psi(t)\rangle = X(t)|\psi(0)\rangle$, 系统(14)转化为矩阵双线性模型[15]:

$$\dot{X}(t) = [\mathcal{H}_0 + u(t)\mathcal{H}_1]X(t), X(0) = I_{2^n \times 2^n}, \tag{15}$$

这里: $\mathcal{H}_0 = -\mathrm{i}H_0, \mathcal{H}_1 = -\mathrm{i}H_1, X(t) \in U(2^n)$, 且

$$U(2^n) = \{X \in \mathbb{C}^{2^n \times 2^n} | X^\dagger X = I_{2^n \times 2^n}\}.$$

定义 2[15] 对任意的幺正算符$X(t) \in U(2^n)$, 存在一个容许的控制场$u(t)$, 使得量子系统(15)从$X(0) = I$演化到$X(t)$, 则称该系统是算符可控的(本文中所提到的可控性均为算符可控性).

引理 4[5] 量子系统(15)是算符可控的充要条件是矩阵$\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$生成的李代数空间等价于$su(2^n)$. 由$\mathcal{H}_0,\ \mathcal{H}_1$生成的李代数$\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1\}_\mathrm{LA}$表示为

$$\mathrm{span}\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1\} = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, ad_{\mathcal{H}_0}\mathcal{H}_1, ad_{\mathcal{H}_0}^2\mathcal{H}_1, \cdots, ad_{\mathcal{H}_0}^k\mathcal{H}_1, \cdots\}, \tag{16}$$

这里: $ad_{\mathcal{H}_0}^k\mathcal{H}_1=[\mathcal{H}_0,[\mathcal{H}_0,\cdots,[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]]]$, k表示k重李括号运算.

显然, 当$\{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\}_{\rm LA}$与$su(2^n)$的维数相同时, 系统(15)是可控的, 且$su(2^n)$的维数为$4^n-1$.

3.2 单量子系统的可控性条件(Controllability conditions of single quantum systems)

当$n=1$时, 量子系统(15)为单量子系统

$$\dot{X}(t)=[\mathcal{H}_0+u(t)\mathcal{H}_1]X(t),\ X(0)=I_{2\times 2},\quad(17)$$

其可控李代数$su(2)$的维数为3, 系统可控的充要条件是$\dim\{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\}_{\rm LA}=3$. 当$\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$线性无关时(否则$\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$线性相关时有$[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]=0$, 有$\dim\{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\}_{\rm LA}\leqslant 2$, 系统不可控), 需进一步分析$\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, $[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]$的线性关系. 由于$\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}su(2)$的一组基, 对于系统(17)中的$\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$, 存在一组实参数$m_i$, $n_i\in\mathbb{R}(i=1,2,3)$, 满足下列等式:

$$\begin{cases}\mathcal{H}_0=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+m_3\lambda_3,\\ \mathcal{H}_1=n_1\lambda_1+n_2\lambda_2+n_3\lambda_3.\end{cases}\quad(18)$$

定义 3　令参数$m_i=\langle\mathcal{H}_0,\ \lambda_i\rangle$, m_i表示$\mathcal{H}_0$在λ_i的投影值, 其中$\langle\mathcal{H}_0,\lambda_i\rangle$表示矩阵$\mathcal{H}_0$和$\lambda_i$的内积. 受文献[16]启发并利用式(5)有:

引理 5　对于参数$\{m_i\}_{i=1}^3$有以下等式恒成立:

$$m_i=\langle\mathcal{H}_0,\ \lambda_i\rangle=2{\rm Tr}(\mathcal{H}_0\lambda_i^\dagger).\quad(19)$$

这里易证$\langle\mathcal{H}_0,\ \lambda_i\rangle$为实数, 进而$\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$可改写成

$$\mathcal{H}_0=\langle\mathcal{H}_0,\lambda_1\rangle\lambda_1+\langle\mathcal{H}_0,\lambda_2\rangle\lambda_2+\langle\mathcal{H}_0,\lambda_3\rangle\lambda_3,\ (20)$$

$$\mathcal{H}_1=\langle\mathcal{H}_1,\lambda_1\rangle\lambda_1+\langle\mathcal{H}_1,\lambda_2\rangle\lambda_2+\langle\mathcal{H}_1,\lambda_3\rangle\lambda_3.\ (21)$$

对于内积运算$\langle\cdot,\cdot\rangle$有以下等式恒成立:

$$\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0\rangle=\sum_{i=1}^3 m_i^2\langle\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1\rangle=\sum_{i=1}^3 n_i^2,\quad(22)$$

$$\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\rangle=\sum_{i=1}^3 m_in_i.\quad(23)$$

对于矩阵$\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$的李括号运算$[\cdot,\cdot]$有以下等式恒成立:

$$\begin{aligned}&[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]=[\sum_{i=1}^3 m_i\lambda_i,\sum_{j=1}^3 m_j\lambda_j]=\\&[(m_2n_3-m_3n_2)\lambda_1+(m_3n_1-m_1n_3)\lambda_2+\\&(m_1n_2-m_2n_1)\lambda_3],\\&\langle[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1],[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]\rangle=\\&[(m_2n_3-m_3n_2)^2+(m_3n_1-m_1n_3)^2+\\&(m_1n_2-m_2n_1)^2].\end{aligned}\quad(24)$$

定理 1　基于式(20)–(24)结论有下式恒成立:

$$\begin{aligned}&\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0\rangle\langle\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1\rangle-\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\rangle^2=\\&\langle[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1],[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]\rangle.\end{aligned}\quad(25)$$

鉴于文献[17]及定理1相关结论, 有以下定理:

定理 2　李代数$su(2)$空间任意给定的2个线性无关矩阵$\mathcal{H}_0$和$\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$与$[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]$线性无关的充要条件是

$$\langle[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1],[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]\rangle\neq 0.\quad(26)$$

证　由$\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$与$[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]$的线性无关性知其基系数组成的矩阵行列式不等于零, 即

$$\begin{vmatrix}m_1&n_1&m_2n_3-m_3n_2\\m_2&n_2&m_3n_1-m_1n_3\\m_3&n_3&m_1n_2-m_2n_1\end{vmatrix}\neq 0.$$

上述行列式经计算得

$$\begin{aligned}&(m_2n_3-m_3n_2)^2+(m_3n_1-m_1n_3)^2+\\&(m_1n_2-m_2n_1)^2\neq 0.\end{aligned}$$

由式(24)知$\langle[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1],[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]\rangle\neq 0$.　证毕.

定理 3　单量子系统(17)可控的充要条件是对算符$\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$, 满足

$$\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0\rangle\langle\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1\rangle-\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\rangle^2>0.\quad(27)$$

证　充分性. 由定理1, 2知

$$\langle[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1],[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]\rangle\neq 0,$$

进而$\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$和$[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]$是线性无关的, 即

$$\dim\{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\}_{\rm LA}\geqslant 3.$$

必要性. 由定理2知

$$\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0\rangle\langle\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1\rangle-\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\rangle^2\geqslant 0$$

当单量子系统可控时, $\dim\{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\}_{\rm LA}=3$.

若$\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$是线性相关的, 则有$[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]=0$. 进而$\dim\{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\}_{\rm LA}\leqslant 2$, 这与系统可控相矛盾, 故$\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$和$[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]$是线性无关的. 由定理2知

$$\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0\rangle\langle\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1\rangle-\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\rangle^2>0.$$

证毕.

推论 1　单量子系统(17)算符可控的充要条件是对任意的控制$u\in\mathbb{R}$, 均满足

$$\langle\mathcal{H}_0+u\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0+u\mathcal{H}_1\rangle>0.\quad(28)$$

证　根据已知条件对任意的$u\in\mathbb{R}$有

$$\begin{aligned}&\langle\mathcal{H}_0+u\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_0+u\mathcal{H}_1\rangle=\\&\langle\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1\rangle u^2+2\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\rangle u+\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0\rangle^2>0.\end{aligned}$$

这里$\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0\rangle>0$, $\langle\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1\rangle>0$, 且$\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\rangle\in\mathbb{R}$. 其等价于以$u$为参数的一元二次方程. 其中

$$\Delta=4(\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\rangle^2-\langle\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_0\rangle\langle\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_1\rangle)<0$$

恒成立. 该式即定理3可控性条件.　证毕.

对单量子双输入控制u_1,u_2矩阵双线性系统

$$\dot{X}(t)=[\mathcal{H}_0+u_1(t)\mathcal{H}_1+u_2(t)\mathcal{H}_2]X(t),\quad(29)$$

其可控性需计算$\{\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2\}$生成李代数空间的维数. 当$\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$线性无关时, 显然其维数为3, 系统(29)是可控的; 若其中2个矩阵是线性相关且与另外一

个矩阵线性无关时, 可用单输入控制系统模型(17)的相关方法进行判别.

4 双自旋量子系统的可控性(Controllability of two spin quantum systems)

当$n=2$时, 量子系统(15)为双量子系统:

$$\dot{X}(t)=[\mathcal{H}_0+u(t)\mathcal{H}_1]X(t),\ X(0)=I_{4\times 4}. \tag{30}$$

系统的每一个单量子态都属于2维Hilbert空间H_1, 双量子系统的状态可用4维的Hilbert空间$H_1\otimes H_2$表示. 双量子系统模型的Hamiltonian算符$\mathcal{H}$可由式(7)–(8)的15个基元线性表出, 具体形式如下:

$$\theta_1=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ \theta_2=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&0&-\mathrm{i}&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0&0&0\\0&\mathrm{i}&0&0\end{bmatrix},$$

$$\theta_3=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},\ \theta_4=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$\theta_5=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&\mathrm{i}&0\end{bmatrix},\ \theta_6=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},$$

$$\theta_7=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\ \theta_8=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\theta_9=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix},\ \theta_{10}=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&-\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\theta_{11}=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix},\ \theta_{12}=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&0&-\mathrm{i}&0\\0&0&0&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0&0&0\\0&-\mathrm{i}&0&0\end{bmatrix},$$

$$\theta_{13}=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix},\ \theta_{14}=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\\0&0&0&\mathrm{i}\\0&0&-\mathrm{i}&0\end{bmatrix},$$

$$\theta_{15}=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

由引理3及李代数$su(4)$空间在李括号运算的封闭性(见式(9))得

$$[\theta_\alpha,\theta_\beta]=[\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_i\otimes\sigma_j,\ \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_k\otimes\sigma_l]\in su(4), \tag{31}$$

其中: $i,j,k,l\in\{x,y,z,I\}$; $\theta_\alpha,\theta_\beta\in\mathcal{K}$, $\mathcal{K}=\{\theta_h|h=1,2,\cdots,15\}$.

由于$\mathcal{K}$为$su(4)$的一组基, 对于算符$\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1\in su(4)$, 存在实参数$m_i,n_j$, 满足

$$\mathcal{H}_0=\sum_{i=1}^{15}m_i\theta_i,\ \mathcal{H}_1=\sum_{j=1}^{15}n_j\theta_j, \tag{32}$$

$$[\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1]=\sum_{i<j}^{i,j\in\{1,2,\cdots,15\}}(n_im_j-n_jm_i)\,[\theta_i,\theta_j]=\sum_{k=1}^{15}l_k^1\theta_k. \tag{33}$$

由式(31)计算得式(33)的系数$l_k^1(k=1,\cdots,15)$为

$$\begin{cases}
l_1^1=-(m_2n_3-m_3n_2)-(m_{10}n_{13}-m_{13}n_{10})-\\ \quad(m_{11}n_{14}-m_{14}n_{11})-(m_{12}n_{15}-m_{15}n_{12}),\\
l_2^1=(m_1n_3-m_3n_1)+(m_7n_{13}-m_{13}n_7)+\\ \quad(m_8n_{14}-m_{14}n_8)+(m_9n_{15}-m_{15}n_9),\\
l_3^1=-(m_1n_2-m_2n_1)-(m_7n_{10}-m_{10}n_7)-\\ \quad(m_8n_{11}-m_{11}n_8)-(m_9n_{12}-m_{12}n_9),\\
l_4^1=-(m_5n_6-m_6n_5)-(m_8n_9-m_9n_8)-\\ \quad(m_{11}n_{12}-m_{12}n_{11})-(m_{14}n_{15}-m_{15}n_{14}),\\
l_5^1=(m_4n_6-m_6n_4)+(m_7n_9-m_9n_7)+\\ \quad(m_{10}n_{12}-m_{12}n_{10})+(m_{13}n_{15}-m_{15}n_{13}),\\
l_6^1=-(m_4n_5-m_5n_4)-(m_7n_8-m_8n_7)-\\ \quad(m_{10}n_{11}-m_{11}n_{10})-(m_{13}n_{14}-m_{14}n_{13}),\\
l_7^1=-(m_2n_{13}-m_{13}n_2)+(m_3n_{10}-m_{10}n_3)-\\ \quad(m_5n_9-m_9n_5)+(m_6n_8-m_8n_6),\\
l_8^1=-(m_2n_{14}-m_{14}n_2)+(m_3n_{11}-m_{11}n_3)+\\ \quad(m_4n_9-m_9n_4)-(m_6n_7-m_7n_6),\\
l_9^1=-(m_2n_{15}-m_{15}n_2)+(m_3n_{12}-m_{12}n_3)-\\ \quad(m_4n_8-m_8n_4)+(m_5n_7-m_7n_5),\\
l_{10}^1=(m_1n_{13}-m_{13}n_1)-(m_3n_7-m_7n_3)-\\ \quad(m_5n_{12}-m_{12}n_5)+(m_6n_{11}-m_{11}n_6),\\
l_{11}^1=(m_1n_{14}-m_{14}n_1)-(m_3n_8-m_8n_3)+\\ \quad(m_4n_{12}-m_{12}n_4)-(m_6n_{10}-m_{10}n_6),\\
l_{12}^1=(m_1n_{15}-m_{15}n_1)-(m_3n_9-m_9n_3)-\\ \quad(m_4n_{11}-m_{11}n_4)+(m_5n_{10}-m_{10}n_5),\\
l_{13}^1=-(m_1n_{10}-m_{10}n_1)+(m_2n_7-m_7n_2)-\\ \quad(m_5n_{15}-m_{15}n_5)+(m_6n_{14}-m_{14}n_6),\\
l_{14}^1=-(m_1n_{11}-m_{11}n_1)+(m_2n_8-m_8n_2)+\\ \quad(m_4n_{15}-m_{15}n_4)-(m_6n_{13}-m_{13}n_6),\\
l_{15}^1=-(m_1n_{12}-m_{12}n_1)+(m_2n_9-m_9n_2)-\\ \quad(m_4n_{14}-m_{14}n_4)+(m_5n_{13}-m_{13}n_5).
\end{cases} \tag{34}$$

由引理4知量子系统的可控性判据主要是计算其Hamiltonian算符生成的李代数空间的维数. 在式(32)中令$n_i = l_i^1$, 则通过式(34)计算可得$[\mathcal{H}_0, [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]]$在基$\mathcal{K}$下的系数$l_i^2$; 再令$n_i = l_i^2$, 进一步迭代计算可得到$ad_{\mathcal{H}_0}^3\mathcal{H}_1$在基$\mathcal{K}$下的系数$l_i^3$; 这样一直做下去, 令$n_i = l_i^j$, 可得$ad_{\mathcal{H}_0}^{j+1}\mathcal{H}_1$在基$\mathcal{K}$下的系数$l_i^{j+1}$. 最后, 通过由上述迭代计算得到的$\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$多重李括号在各个基下的系数矩阵来判断系统(30)的可控性.

若L为一个$m \times n$矩阵, 则L秩的定义为L中线性无关的列向量(行向量)的个数. 于是, 将此概念拓广到行数和列数为无限的情形. 记具有可列个分量的实向量全体为X, 即

$$X = \{(x^1, x^2, \cdots)^{\mathrm{T}} | x^j \in \mathbb{R}\}. \tag{35}$$

定义加法和数乘运算如下:

$$\begin{aligned}&(x^1, x^2, \cdots)^{\mathrm{T}} + (y^1, y^2, \cdots)^{\mathrm{T}} = \\ &(x^1 + y^1, x^2 + y^2, \cdots)^{\mathrm{T}}, \\ &\gamma(x^1, x^2, \cdots)^{\mathrm{T}} = (\gamma x^1, \gamma x^2, \cdots)^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{36}$$

$\forall (x^1, x^2, \cdots)^{\mathrm{T}},\ (y^1, y^2, \cdots)^{\mathrm{T}} \in X,\ \gamma \in \mathbb{R}$. X关于上述加法和乘法构成一个线性空间. 对一个行数和列数均为无限的矩阵L, 可认为它是由(可列)无限个X中的向量构成的向量组.

定义 4[18] 无限列(行)矩阵L的秩定义为: 组成L的列向量中线性无关向量组包含的最多可能的向量的个数, 而当L中存在无限个线性无关的向量时定义矩阵L的秩为无穷大, 即

$$\mathrm{rank} L = \sup\{k | x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k} \in X\}, \tag{37}$$

这里$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}$是线性无关的.

上面的定义对于行数有限、列数无限, 或行数无限、列数有限的矩阵同样也是适用的. 于是, 若L的行数或列数有限, 则L的秩必有限.

定理 4 双自旋量子系统(30)算符可控的充要条件是其Hamiltonian算符各个多重李括号运算下的基系数矩阵L是行满秩的. 这里矩阵L为

$$L = \begin{bmatrix} m_1 & n_1 & l_1^1 & \cdots & l_1^j & \cdots \\ m_2 & n_2 & l_2^1 & \cdots & l_2^j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ m_i & n_i & l_i^1 & \cdots & l_i^j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ m_{15} & n_{15} & l_{15}^1 & \cdots & l_{15}^j & \cdots \end{bmatrix}. \tag{38}$$

基系数矩阵L的无限个列向量$\{X\}_{i=1}^{\infty}$均属于欧氏空间$\mathbb{R}^{15}$. 若矩阵L是行满秩的, 则对L的任意列向量, 一定存在15个线性无关的向量将所有列向量线性表出, 进而满足$\dim\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1\}_{\mathrm{LA}} = 15$, 即

$$\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1\}_{\mathrm{LA}} = su(4),$$

由引理4知系统(30)是可控的.

以上主要通过构造李代数$su(2)$及$su(4)$空间的基来表示Hamiltonian算符的多重李括号计算, 并进一步推导单自旋量子和双自旋量子系统的可控性. 当$n > 2$时, 系统(15)的可控性研究方法可参照双自旋量子系统的可控性判别思路, 可由引理2中Cartan分解构造李代数$su(2^n)$空间的基$\{\theta_i\}_{i=1}^{4^n-1}$, 对于系统的Hamiltonian算符$\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1 \in su(2^n)$, 存在实参数$m_i, n_j \in \mathbb{R}$, 满足

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{i=1}^{4^n-1} m_i\theta_i,\ \mathcal{H}_1 = \sum_{j=1}^{4^n-1} n_j\theta_j, \tag{39}$$

$$\begin{aligned}&[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1] = \\ &\sum_{\substack{i<j}}^{i,j\in\{1,2,\cdots,4^n-1\}} (n_i m_j - n_j m_i)\,[\theta_i, \theta_j] = \sum_{k=1}^{4^n-1} l_k^1\theta_k.\end{aligned} \tag{40}$$

通过计算式(40)中李括号$[\theta_i, \theta_j]$, 可得系数l_k与m_i, n_j的关系式; 同理, 令$n_i = l_i$, 由l_k与m_i, n_j的关系式可计算$[\mathcal{H}_0, [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]]$在基下的系数$l_i^2$, 再令$n_i = l_i^2$, 这样一直做下去; 最后, 通过迭代计算得到的$\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$多重李括号在各个基下的系数矩阵(有限行、无限列)来判定系统(15)的可控性.

5 小结(Conclusion)

本文基于多重李括号的运算方法研究了自旋量子系统的可控性问题. 在文献[17]相关结论的基础上, 通过计算李代数空间的维数得到了单自旋量子与基系数矩阵相关的系统可控的充要条件; 同时利用李代数的Cartan分解方法, 构造了双(多)自旋量子系统Hamiltonian算符生成的李代数空间的矩阵基, 并进一步计算给出了双自旋量子系统的与基系数矩阵相关的可控性判据, 该方法较文献[5,9]的可控性基本定理更便于计算.

参考文献(References):

[1] D'ALESSANDRO D. *Introduction to Quantum Control and Dynamics* [M]. New York: Chapman & Hall/CRC, 2007.

[2] CONG S, ZHENG Y S, JI B C, et al. Survey of progress in quantum control system [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2003, 20(1): 1 – 9.

[3] DONG D, PETERSEN I R. Quantum control theory and applications: a survey [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 12(4): 2651 – 2671.

[4] HUANG G M, TARN T J, CLARK J W. On the controllability of quantum-mechanical systems [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1983, 24(11): 2608 – 2618.

[5] ALBERTINI F, D'ALESSANDRO D. Notions of controllability for bilinear multilevel quantum systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(8): 1399 – 1403.

[6] SCHIRMER S G, FU H, SOLOMON A I. Complete controllability of quantum systems [J]. *Physical Review A*, 2001, 63(6): 063410.

[7] D'ALESSANDRO D. Constructive decomposition of the controllability Lie algebra for quantum systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(6): 1416 – 1421.

[8] ALTAFINI C. Controllability of quantum mechanical systems by root space decomposition of su(N) [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2002, 43(5): 2051 – 2062.

[9] TARN T J, CLARK J K, LUCARELLI D G. Controllability of quantum mechanical systems with continuous spectra [C] //*Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney: IEEE, 2000, 1: 943 – 948.

[10] WU R B, TARN T J, LI C W. Smooth controllability of infinite dimensional quantum mechanical systems [J]. *Physical Review A*, 2006, 73(1): 012719.

[11] KHANEJA N, GLASER S J. Cartan decomposition of SU(2^n) and control of spin systems [J]. *Chemical Physics*, 2001, 267(1): 11 – 23.

[12] ALTAFINI C. Representing multiqubit unitary evolution via Stokes tensors [J]. *Physical Review A*, 2004, 70(3): 032331.

[13] ZHOU S S, FU S Z. Matrix representations for adjoint and anti-adjoint operators in multi-spin 1/2 systems [J]. *Quantum Information Processing*, 2011, 10(3): 379 – 394.

[14] 丛爽, 楼越升. 利用相位的自旋1/2量子系统的相干控制 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(2): 187 – 192.
(CONG Shuang, LOU Yuesheng. Coherent control of spin 1/2 quantum systems using phases [J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(2): 187 – 192.)

[15] 陈宗海, 董道毅, 张陈斌. 量子控制导论 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2005.
(CHEN Zonghai, DONG Daoyi, ZHANG Chenbin. *Introduction to Quantum Control* [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2005.)

[16] ZHOU S S, YAN F. Norm invariance property of two-spin 1/2 systems [C] //*The International Conference on Automatic Control and Artificial Intelligence*. Xiamen: IET, 2012, 6: 4504 – 4507.

[17] WU J W, LI C W, ZHANG J, et al. Controllability of quantum systems on the Lie group $SU(1,1)$ [EB]. 2007, http://arxiv.org/abs/0708.3147.

[18] 李训经, 雍炯敏, 周渊. 控制理论基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
(LI Xunjing, YONG Jiongmin, ZHOU Yuan. *Introduction to Control Theory* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2002.)

作者简介:

王 萌 (1987–), 男, 硕士, 目前研究方向为量子系统的分析与控制, E-mail: wm135757@yahoo.cn;

周绍生 (1965–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为非线性系统、随机系统、量子系统的分析与设计, E-mail: sszhou65@163.com.