

## 分数线性相位超前迭代学习控制

潘雪, 叶永强<sup>†</sup>, 王建宏

(南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016)

**摘要:** 线性相位超前迭代学习控制的超前拍数需要取整, 不利于控制系统的性能达到最优. 对此提出分数线性相位超前迭代学习控制. 对系统的收敛条件进行频域分析, 得到超前拍数, 学习增益和可学习带宽的范围. 通过调节超前拍数来提高系统的可学习带宽, 以达到更高的跟踪精度. 给出了分数线性相位超前的具体实现方法, 并在此基础上对整数与分数相位超前的补偿效果进行比较. 以机械臂为被控对象的仿真结果表明了分数线性相位超前更能提高系统的可学习带宽及跟踪精度.

**关键词:** 迭代学习控制; 分数线性相位超前; 频域分析; 超前拍数; 跟踪

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A

## Fractional linear phase-lead iterative learning control

PAN Xue, YE Yong-qiang<sup>†</sup>, WANG Jian-hong

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China.)

**Abstract:** Because the number of lead steps in a linear phase-lead iterative learning control must be an integer which hampers the optimization of a control system, we propose a fractional linear phase-lead iterative learning control method. The range of the lead step, the learning gain, and the learnable band can be calculated by analyzing the convergence condition in the frequency domain. By adjusting the number of lead steps, we can achieve a wider learnable band and a higher tracking accuracy. The detailed realization of the fractional lead is introduced, and the comparison of the compensation effects between it and the integer lead is given. A comparison simulation in controlling a robot arm-joint is carried out. The results show that the fractional linear phase-lead iterative learning control provides wider learnable band and higher tracking accuracy.

**Key words:** iterative learning control; fractional linear phase-lead; frequency domain analysis; lead step; tracking

### 1 引言(Introduction)

日本学者Uchiyama<sup>[1]</sup>于1978年首次提出了迭代学习控制(iterative learning control, ILC)思想. 由于文章用日文撰写, 因而没有引起太多关注. 直到1984年Arimoto<sup>[2]</sup>、Casalino和Bartonioli<sup>[3]</sup>及Craig<sup>[4]</sup>同时且各自独立发表了文章阐述对模型误差和干扰迭代补偿的思想, 才正式形成迭代学习控制这一研究领域, 并且至今仍是控制领域的研究热点<sup>[5-7]</sup>.

迭代学习控制是采用迭代的方法使输出信号完全跟踪期望轨迹<sup>[8]</sup>. 主要研究内容有学习算法的稳定性与收敛性<sup>[9]</sup>、学习控制过程的鲁棒性等. 其中, 学习算法的稳定性保证了随学习次数增加, 控制系统不发散. 但是对于学习控制系统而言, 仅仅稳定是没有实际意义的, 比如稳定的系统在迭代学习控制过程中会产生先收敛后发散的现象<sup>[10]</sup>. 针对这一问题, Longman<sup>[11]</sup>, Wang Danwei<sup>[12]</sup>分别提出了离散和连续线性相位超

前迭代学习控制(linear phase-lead iterative learning control, LPLILC)方案. 该方案引入简单的线性相位超前环节来补偿系统的相位滞后, 显著扩大了可学习的带宽, 不仅消除了系统先收敛后发散的现象, 还提高了系统的跟踪精度<sup>[11]</sup>. 离散线性相位超前迭代学习控制公式表示为

$$u_j(k) = u_{j-1}(k) + Le_{j-1}(k + \gamma), \quad (1)$$

其中:  $u_j(k)$ 是第 $j$ 次迭代的输入,  $u_{j-1}(k)$ ,  $e_{j-1}(k + \gamma)$ 分别为第 $j - 1$ 次迭代的输入与跟踪误差;  $k$ 表示了单次迭代中的第 $k$ 拍,  $\gamma$ 为超前拍数, 所以 $k + \gamma$ 表示第 $k + \gamma$ 拍;  $L$ 为增益系数. 式(1)对应的连续迭代学习控制为

$$u_j(t) = u_{j-1}(t) + Le_{j-1}(t + \Delta), \quad (2)$$

其中 $\Delta$ 为超前时间.

Wang Danwei和Ye Yongqiang在考虑到系统模型

收稿日期: 2012-09-20; 收修改稿日期: 2013-03-04.

<sup>†</sup>通信作者. E-mail: yongqiang\_leaf@hotmail.com; Tel.: +86 025-84892301.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61074161, 61034005); 江苏省自然科学基金资助项目(BK2010507); 教育部博士点基金新教师类资助项目(20103218120014); 江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目(CXZZ12.0158); 南京航空航天大学博士学位论文创新与创优基金资助项目(BCXJ13-07).

不确定性的情况下首次将超前时间和学习增益进行了解耦设计<sup>[13]</sup>. Zhang Bin等人在Wang Danwei和Ye Yongqiang工作的基础上,提出了一种参数自整定方案<sup>[14]</sup>.该方案在线地根据迭代学习控制的效果自适应地调整超前拍数和学习带宽,以达到长期稳定及最佳跟踪精度.但是,上述离散迭代学习控制(1)中, $\gamma$ 必须是整数.其对应的连续迭代学习控制(2)中,理论上 $\Delta$ 可以是大于等于0的任意数,但计算机执行还是需要离散化, $\Delta$ 也只能是一系列离散的值.所以文献[14]提出的自整定方法目前只能有级地调整超前时间 $\Delta$ (或超前拍数 $\gamma$ ),还不能实现无级自整定.由于实际物理对象的相位延迟特性千变万化,而受限于 $\gamma$ 或 $\Delta$ 只能取整数离散值,线性相位超前补偿的效果不一定能达到最大的可学习带宽和最高的跟踪精度.

如果 $\gamma$ 可以为分数,就扩大了系统的参数选择范围,有利于优化相位补偿效果,从而提高可学习带宽和跟踪精度.因此本文提出了分数线性相位超前的概念.通过对其频域误差收敛条件的分析得到系统参数的解耦计算.同时,考虑到模型的不确定性,在参数设计中给出足够裕度.由于小范围的学习增益改变对迭代学习控制的性能影响有限,所以主要通过选择超前拍数来达到更宽的可学习带宽和更高的跟踪精度.文章还给出了分数线性相位超前的滤波器近似实现方法,并在此基础上对整数与分数的相位超前补偿效果进行了对比.最后,通过机械臂的仿真,验证了分数相位超前迭代学习控制算法的有效性.

## 2 分数线性相位超前迭代学习控制(Fractional linear phase-lead iterative learning control)

### 2.1 问题描述(Statement of problem)

考虑单输入单输出(SISO)离散状态空间方程:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \\ y(k) = Cx(k) + v(k), \end{cases} \quad (3)$$

其中: $x$ 为状态变量, $u$ 为输入, $y$ 为输出, $w$ 和 $v$ 分别代表确定性干扰和输出干扰.设定期望轨迹 $y_d$ 具有 $p$ 拍, $y_d(k)$ 表示第 $k$ 拍的期望轨迹位置;那么,对于 $x$ ,拍次 $k=0, 1, 2, 3, \dots, p-1$ ;对于 $y$ ,拍次 $k=1, 2, 3, \dots, p$ .

用下标 $j$ 表示第 $j$ 次迭代,对式(3)中的第 $j$ 次迭代过程进行 $z$ 变换并考虑到 $w$ 和 $v$ 与 $j$ 无关,设 $x(0)$ 为状态初值,有

$$\begin{cases} zX_j(z) = AX_j(z) + x(0) + BU_j(z) + W(z), \\ Y_j(z) = CX_j(z) + V(z). \end{cases} \quad (4)$$

根据式(4)可以得到输出的表达式为

$$Y_j(z) = G_p(z)U_j(z) + C(zI - A)^{-1}x(0) + C(zI - A)^{-1}W(z) + V(z), \quad (5)$$

其中 $G_p(z) = C(zI - A)^{-1}B$ 为输入输出传递函数.

对式(1)进行 $z$ 变换得到

$$U_j(z) = U_{j-1}(z) + LE_{j-1}(z + \gamma). \quad (6)$$

线性相位超前迭代学习的控制框图<sup>[15]</sup>见图1.

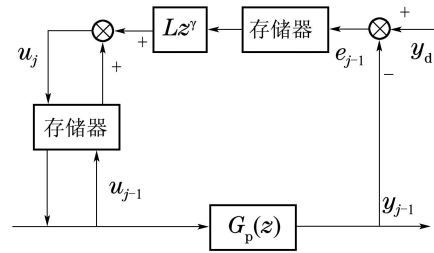


图1 线性相位超前迭代学习控制方框图

Fig. 1 Diagram of linear phase-lead iterative learning control

### 2.2 参数设计(Design of parameters)

易知

$$E_j(z) = Y_d(z) - Y_j(z). \quad (7)$$

根据式(5)和式(7),有

$$E_j(z) - E_{j-1}(z) = Y_{j-1}(z) - Y_j(z) = G_p(z)(U_{j-1}(z) - U_j(z)). \quad (8)$$

结合式(6)和式(8),得到

$$E_j(z) = (1 - Lz^\gamma G_p(z))E_{j-1}(z). \quad (9)$$

$(1 - Lz^\gamma G_p(z))$ 即误差传递函数.期望的迭代学习过程是单调收敛的.将 $z = e^{i\omega T}$ 代入 $(1 - Lz^\gamma G_p(z))$ ,就可以得到频域下的误差传递函数,其中 $G_p(e^{i\omega T})$ 可写为 $M_p(\omega) \exp(i\theta_p(\omega))$ 的形式, $M_p(\omega)$ , $\theta_p(\omega)$ 分别为 $G_p(e^{i\omega T})$ 的幅频特性和相频特性.如果对于所有满足 $0 < \omega < \pi/T$ ( $T$ 为采样周期)的 $\omega$ ,误差传递函数都满足

$$|1 - Le^{i(\omega T \cdot \gamma + \theta_p(\omega))} M_p(\omega)| < 1, \quad (10)$$

那么就能保证误差的单调收敛.实际中,这一条件往往不能在全频段上得到满足.记该条件满足的最高角频率为 $\omega_c$ ,对应的频率记为 $f_c$ , $[0, f_c]$ 频段则称为可学习带宽.对于高于 $f_c$ 的频率,则采用滤波器将其滤除.

式(10)给出了超前拍数 $\gamma$ 和学习增益 $L$ 的设计条件.对式(10)用欧拉公式展开

$$|1 - LM_p(\omega) \cos(\omega T \cdot \gamma + \theta_p(\omega)) - iLM_p(\omega) \sin(\omega T \cdot \gamma + \theta_p(\omega))| < 1, \quad (11)$$

整理可得

$$L < \frac{2 \cos(\omega T \cdot \gamma + \theta_p(\omega))}{M_p(\omega)}. \quad (12)$$

由于 $L > 0$ ,所以不等号左边为正数,即

$$|\omega T \cdot \gamma + \theta_p(\omega)| < 90^\circ. \quad (13)$$

考虑到系统模型的不确定性及设计的鲁棒性,将式

(13)改为

$$|\omega T \cdot \gamma + \theta_p(\omega)| < 90^\circ - \varepsilon, \quad (14)$$

$\varepsilon > 0$ 反映了设计裕度.

选择参数时, 可以先根据式(14)选择超前拍数 $\gamma$ , 然后再根据式(12)选择合适的增益. 由于可学习带宽越大, 实际输出的精度越高, 所以两个参数的选择要使得可学习带宽一致且尽可能地大, 即

$$\begin{aligned} & \max \omega_c, \\ & \text{s.t.} \begin{cases} |\omega T \cdot \gamma + \theta_p(\omega)| < 90^\circ - \varepsilon, \\ L < \frac{2 \cos(\omega T \cdot \gamma + \theta_p(\omega))}{M_p(\omega)}, \\ \forall \omega < \omega_c. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

此时,  $\omega_c$ 满足

$$|\omega_c T \cdot \gamma + \theta_p(\omega_c)| = 90^\circ - \varepsilon. \quad (16)$$

超前拍数 $\gamma$ 的取值从整数扩展到分数带来的益处是 $\gamma$ 选择范围的扩大. 相比整数 $\gamma$ , 分数 $\gamma$ 有可能达到更好的线性相位超前补偿效果, 即达到更宽的可学习带宽和更高的跟踪精度.

### 3 分数线性相位超前的实现(Implementation of fractional linear phase-lead)

实际应用时, 应考虑到离散系统固定采样率的限制, 即系统只能读取采样点处的值, 而无法得到采样点之间的值. 所以想实现分数超前就不得不采用滤波器的蹊径了. 鉴于分数延迟的研究已有部分结果<sup>[16]</sup>, 笔者可以根据分数延迟的滤波器实现得到分数超前的实现方法.

#### 3.1 分数延迟与拉格朗日插值法(Fractional delay and Lagrange interpolation method)

在信号处理和通信的一些领域如语音编码合成、数字光束控制和通信预失真处理等, 分数延迟因能够延迟数值的采样周期而显示了优越性<sup>[17]</sup>.

目前分数延迟主要是使用有限冲击响应滤波器(finite impulse response filter, FIR)、全通滤波器(all pass filter)和无限冲击响应滤波器(infinite impulse response filter, IIR)来实现<sup>[18]</sup>. 下面介绍一种简单的基于FIR滤波器实现的分数延迟-拉格朗日插值法.

首先对于理想分数延迟 $H(z) = z^{-D}$ , 其中 $D > 0$ 为分数延迟阶次, 考虑用 $N$ 阶(长度为 $N + 1$ )FIR滤波器逼近. 其传递函数表示为

$$H(z) \approx \sum_{n=0}^N h(n)z^{-n}, \quad (17)$$

这里 $n$ 为整数. 根据G. Oetken得到的结论<sup>[19]</sup>, 有

$$h(n) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^N \frac{D - k}{n - k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

由拉格朗日插值方法可知 $N$ 越大, 对给定分数延迟的

近似越精确. 同时注意到当 $D \rightarrow N/2$ , 即插值点 $D$ 靠近插值所需采样数据的中心位置时, 插值效果最好<sup>[16]</sup>. 对于阶次 $N = 1, 2, 3$ 的拉格朗日分数延迟滤波器的系数计算如表1所示.

表 1  $N = 1, 2$ 和 $3$ 的拉格朗日分数延迟滤波器的系数  
Table 1 The Lagrange factors of fractional delay when  $N = 1, 2, 3$

	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
$h(0)$	$1 - D$	$(D - 1)(D - 2)/2$	$-(D - 1)(D - 2)(D - 3)/6$
$h(1)$	$D$	$-D(D - 2)$	$D(D - 2)(D - 3)/2$
$h(2)$		$D(D - 1)/2$	$-D(D - 1)(D - 3)/2$
$h(3)$			$D(D - 1)(D - 2)/6$

对照表1选择 $N = 3$ , 即采集4个数据来近似插值. 当 $N = 3$ 时, 选择 $D$ 靠近1.5最佳. 例如选择 $D = 1.4$ , 根据表1可计算得到分数延迟

$$z^{-1.4} \approx -0.064 + 0.672z^{-1} + 0.448z^{-2} - 0.056z^{-3}. \quad (19)$$

#### 3.2 分数超前的滤波器实现(Implementation of fractional lead by FIR filter)

$\bar{H}(z) = z^D$ ,  $D > 0$ , 即分数超前. 将式(17)中的滞后算子 $z^{-1}$ 替换为超前算子 $z$ , 即可得

$$\bar{H}(z) \approx \sum_{n=0}^N h(n)z^n. \quad (20)$$

对应于式(19)的分数超前则为

$$z^{+1.4} \approx -0.064 + 0.672z^1 + 0.448z^2 - 0.056z^3. \quad (21)$$

在确定 $N$ 之后, 对于任意的分数超前 $z^\gamma$  ( $\gamma > 0$ ), 可以把 $\gamma$ 分为两部分, 即 $\gamma = l + D$ . 其中 $l$ 为整数, 通过调整 $l$ 使得 $D$ 接近 $N/2$ . 例如当 $N = 3$ 时, 有

$$\begin{aligned} z^{2.4} &= z^1 z^{1.4} \approx \\ & z^1 (-0.064 + 0.672z^1 + 0.448z^2 - 0.056z^3). \end{aligned} \quad (22)$$

### 4 仿真及观察(Simulation and observation)

选取一个二阶系统为研究对象. 该系统模型来源于一个机械臂(robot arm-joint)<sup>[10]</sup>, 其离散域传递函数(采样频率为100 Hz)为

$$G_p(z) = \frac{0.041z + 0.0357}{z^2 - 1.58z + 0.657}. \quad (23)$$

#### 4.1 超前拍数和学习增益的确定(Determination of lead step and learning gain)

在设计中取 $\varepsilon = 10^\circ$ , 然后把式(23)代入式(15)即可得到相关参数的约束条件. 根据式(13)可知,  $\omega T \cdot \gamma + \theta_p(\omega) = 0$ 时系统鲁棒性最好. 据此, 在已经得到控制对象模型相频特性 $\theta_p(\omega)$ 的前提下, 绘制 $-\theta_p(\omega)/\omega T$ 曲线, 就可得到补偿拍次 $\gamma$ 的数量级和工作频带内的大致范围. 以式(23)为例,  $-\theta_p(\omega)/\omega T$ 曲线见图2.

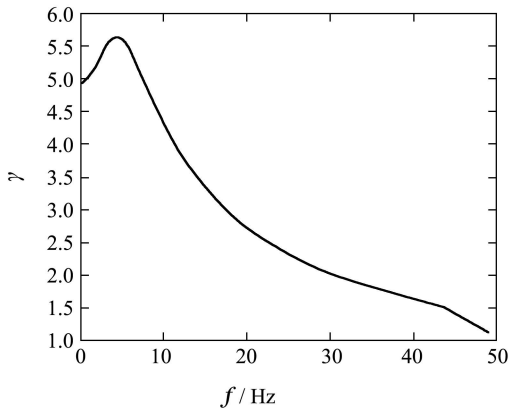


图2 超前拍数的范围

Fig. 2 The range of lead step

由于本文期望迭代学习控制工作频带宽于10 Hz, 根据图2即可确定 $\gamma$ 的大致搜索范围为1-4. 令 $\gamma$ 从1逐步增加, 增加步长为分数 $\Delta\gamma$ .  $\Delta\gamma$ 取决于系统采样率. 采样率越高,  $\Delta\gamma$ 越大; 采样率越低,  $\Delta\gamma$ 越小. 这里, 取 $\Delta\gamma = 0.5$ .

图3绘制了式(15)中的相角条件曲线图. 图中给出了超前拍数 $\gamma$ 分别为0, 2, 2.5, 3和3.5时, 相角 $\theta_p(\omega) + \gamma\omega T$ 随频率变化的情况. 当 $\gamma$ 为0时,  $\theta_p(\omega)$ 是负的, 并在频率 $f = 4$  Hz处达到设定相角范围下限 $-80^\circ$ . 当 $\gamma > 0$ 时, 相角 $\theta_p(\omega) + \gamma\omega T$ 先是下降而且为负值, 此时 $\theta_p(\omega)$ 起主要作用; 然后随着频率的增大,  $\gamma\omega T$ 的补偿作用也随之变大并起到了主导作用.  $\gamma = 2$ 对应的相角曲线在频率 $7.5 \text{ Hz} < f < 12.5 \text{ Hz}$ 情况下位于相角下限 $-80^\circ$ 之上. 因而将其截止频率选为 $f_c = 7 \text{ Hz}$ . 其他情况的 $\gamma$ 对应的截止频率均为相角达到上限 $80^\circ$ 的频率, 如表2所示.

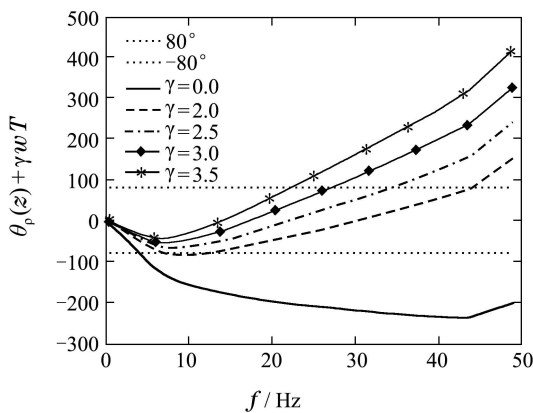


图3 超前拍数的选择

Fig. 3 Selection of lead step

图4给出了 $\gamma = 2.5$ 时, 根据式(15), 增益 $L$ 的选定.  $L$ 主要影响系统误差的收敛速度. 注意到

$$2 \cos(\theta_p(\omega) + 2.5\omega T) / M_p(\omega)$$

曲线在频率 $f = 6.5 \text{ Hz}$ 达到一个局部极小值1.5, 此后其变化是先增大再减小. 根据式(12),  $L$ 应满足 $0 <$

$L < 1.5$ . 另外, Longman建议学习增益不超过控制对象直流增益的倒数<sup>[11]</sup>, 因此又有 $0 < L \leq 1$ . 如果 $L$ 取得比1小, 则截止频率会增大些. 图4显示 $L$ 分别为0.1, 0.3, 0.5, 0.7和1时, 截止频率基本保持不变. 由于 $L$ 的可取范围小, 所以对截止频率的影响不是很大. 另外, 小的学习增益可以减少随机干扰的影响<sup>[8]</sup>, 而 $L$ 越大, 系统误差收敛越快. 所以折中后取 $L$ 为0.7.

注意到曲线

$$2 \cos(\theta_p(\omega) + 2.5\omega T) / M_p(\omega)$$

与 $L$ 横线的交点所在频率就是截止频率, 此处对应 $f_c = 35 \text{ Hz}$ , 与图3中的结果一致.

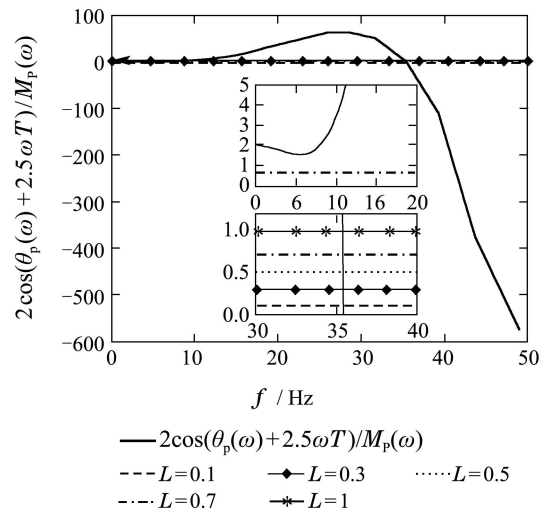


图4 学习增益L的选择

Fig. 4 Selection of learning gain L

### 4.2 确定可学习带宽(Determination of learnable band)

表2给出了第4.1节中设计得到的各个 $\gamma$ 及相应的 $L$ . 为了更准确地确定各个参数对应的可学习带宽,  $\gamma$ 为分数时, 将误差传递函数 $|1 - Lz^\gamma G_p(z)|$ 中 $z^\gamma$ 用拉格朗日展开式替换, 得到 $|1 - Lz^\gamma G_p(z)|$ 的幅频曲线(见图5).

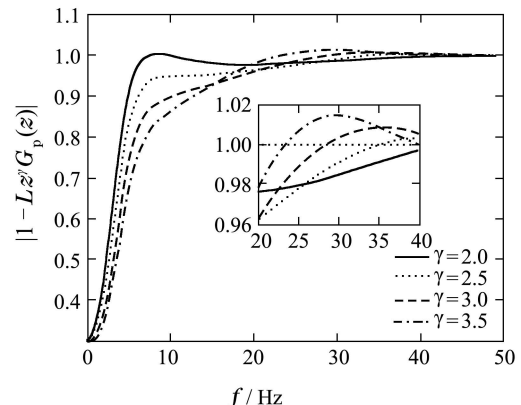


图5 误差传递函数曲线

Fig. 5 The curve of error transfer function

经过验证, 替换后得到的曲线与原曲线基本一致. 由式(10)可知曲线和1的首次交点对应的频率即截止频率. 通过图5中的信息,  $\gamma = 2.5$ 时, 系统的可学习带宽最大, 对应的截止频率

$$f_c = 35 \text{ Hz}.$$

按照以上步骤计算可得, 当 $\gamma$ 分别为2, 3以及3.5且 $L$ 分别为0.1, 0.3, 0.5, 0.7和1时, 截止频率也都基本保持不变.  $\gamma$ 取不同值时, 系统的参数设置见表2.

表 2 进行仿真效果对比的参数

Table 2 The parameters to be compared in simulations

超前拍数 $\gamma$	学习增益 $L$	可学习带宽 $[0, f_c]$
2	0.7	$[0, 7]$ Hz
2.5	0.7	$[0, 35]$ Hz
3	0.7	$[0, 28]$ Hz
3.5	0.7	$[0, 23]$ Hz

### 4.3 仿真结果(Simulation results)

利用表2的数据就可以进行迭代学习控制仿真. 在仿真中, 分数超前采用3阶FIR滤波器近似. 注意到, 当信号频率超出可学习带宽时, 系统的收敛性得不到保证, 所以仿真中对误差信号先进行离散傅里叶变换得到各个频率的分量, 然后保留低于截止频率的各分量, 最后将其进行离散傅里叶逆变换<sup>[20]</sup>. 笔者给定的期望输出信号为

$$y_d(t) = \sum_{n=1}^{51} a_n(1 - \cos(\omega_n t)),$$

其中:  $a_n = 80e^{-\omega_n}$ ,  $\omega_n$ 为

$$0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, 100\pi, 0 < t < 10 \text{ s}.$$

为了突出可学习带宽增大的优势, 将 $\omega_n$ 分别为 $20\pi$ ,  $50\pi$ 和 $60\pi$ 时对应的 $a_n$ 均另设为0.1. 图6给出了期望输出信号波形, 局部放大图显示了波形含有额外放大的信号分量.

图7给出了均方根(root mean square, RMS)误差随迭代进行的收敛过程. 根据图中数据,

$$\gamma = 2, \gamma = 3, \gamma = 3.5$$

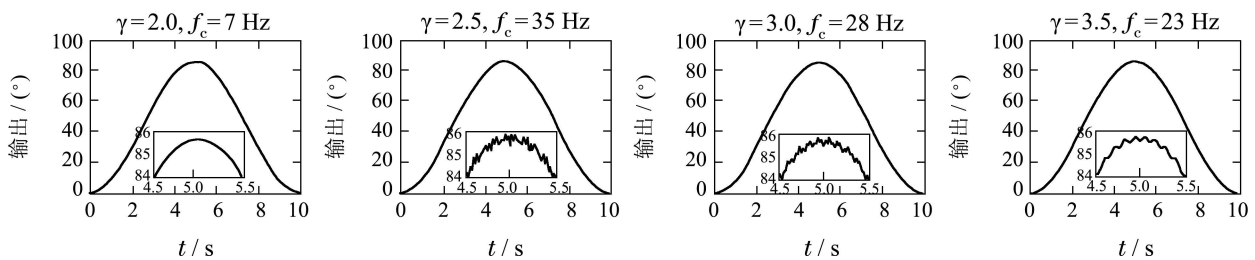


图 8 第1000次迭代后的输出信号  
Fig. 8 Output of the 1000th iteration

时系统稳态误差较大, 而 $\gamma = 2.5$ 时系统稳态误差最小, 可见分数相位超前比整数相位超前更能提高系统的跟踪精度.

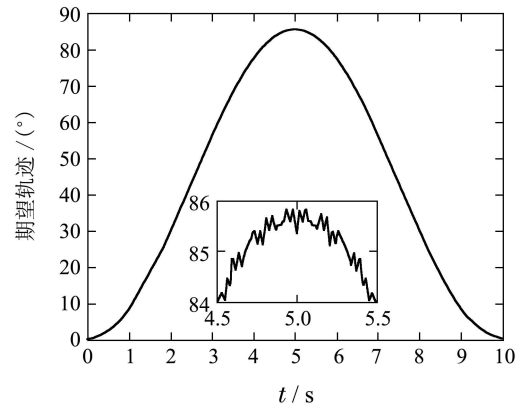


图 6 期望输出信号 $y_d(t)$ 的曲线  
Fig. 6 Desired locus of  $y_d(t)$

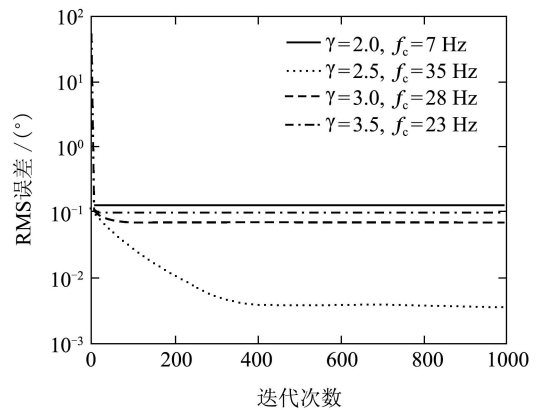
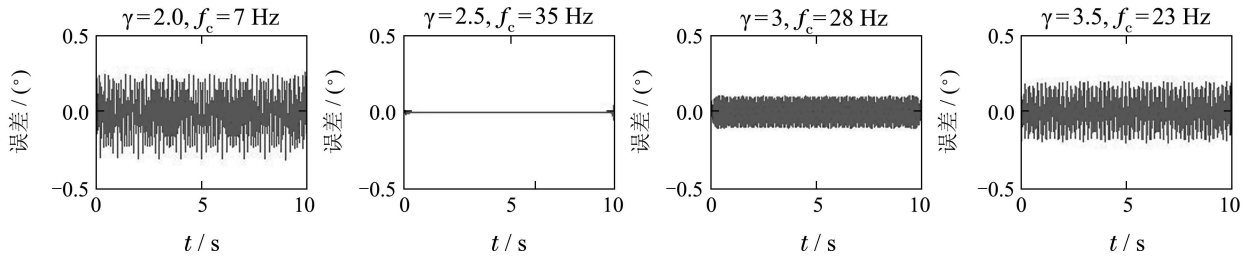


图 7 迭代学习控制的RMS误差  
Fig. 7 RMS error of iterative learning control

图8为第1000次迭代时的输出曲线. 由于各迭代学习控制结果误差均比较小, 所以最后得到的输出都与期望输出接近一致. 通过局部放大图可观察到 $\gamma = 2.5$ 和 $\gamma = 3$ 时输出信号与期望信号更接近, 而 $\gamma = 2$ 和 $\gamma = 3.5$ 时输出信号与期望信号不太相符.

图9展示了第1000次迭代时的误差曲线. 显然 $\gamma = 2.5$ 时误差最小,  $\gamma = 3$ 误差稍大,  $\gamma = 3.5$ 时误差较大, 而 $\gamma = 2$ 时误差最大.

图9 误差 $e_j$ 的曲线( $j = 1000$ )Fig. 9 The curve of  $e_j(j = 1000)$ 

## 5 结论(Conclusions)

在线性相位超前迭代学习控制中,分数相位超前扩大了超前拍数的调节范围,因此有可能达到更好的相位补偿效果,进而带来更佳的学习性能.相关的仿真证实了这一点.下一步的工作是分数相位超前拍数的自整定及实验验证.

## 参考文献(References):

- [1] USHIYAMA M. Formulation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial [J]. *Transactions of the Society for Instrumentation and Control Engineers*, 1978, 14(8): 706 – 712.
- [2] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.
- [3] CASALINO G, BARTOLINI G. A learning procedure for the control of movements of robotic manipulation [C] // *Proceedings of the 4th IASTED Symposium on Robotics and Automation*. Amsterdam, Netherlands: IASTED, 1984: 108 – 111.
- [4] CRAIG J J. Adaptive control of manipulator through repeated trials [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. San Diego, CA, USA: IEEE, 1984: 1566 – 1573.
- [5] YE Y Q, TAYEBI A, LIU X P. All-pass filtering in iterative learning control [J]. *Automatica*, 2009, 45(1): 257 – 264.
- [6] 李岩, 陈阳泉, 安孝晟. 分数阶迭代学习控制的收敛性分析 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 1031 – 1037.  
(LI Yan, CHEN Yangquan, AHN Hyosung. Convergence analysis of fractional-order iterative learning control [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 1031 – 1037.)
- [7] SHEN D, CHEN H F. Iterative learning control for large scale non-linear systems with observation noise [J]. *Automatica*, 2012, 48(3): 577 – 582.
- [8] 李仁俊, 韩正之. 迭代学习控制综述 [J]. *控制与决策*, 2005, 20(9): 961 – 966.  
(LI Renjun, HAN Zhengzhi. Survey of iterative learning control [J]. *Control and Decision*, 2005, 20(9): 961 – 966.)
- [9] 阮小娥, 朴光贤, 卞增男. 迭代学习控制技术回顾与长期学习控制展望 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(8): 966 – 973.  
(RUAN Xiao'e, PARK Kwanghyun, BIEN Z Zenn. Retrospective review of some iterative learning control techniques with a comment on prospective long-term learning [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(8): 966 – 973.)
- [10] HUANG Y C, LONGMAN R W. The source of the often observed property of initial convergence followed by divergence in learning and repetitive control [J]. *Advances in Astronautical Sciences*, 1996, 90(1): 555-572.
- [11] LONGMAN R W. Iterative learning control and repetitive control for engineering practice [J]. *International Journal of Control*, 2000, 73(10): 890 – 901.
- [12] WANG D W. On D-type and P-type ILC design and anticipatory approach [J]. *International Journal of Control*, 2000, 73(10): 890 – 901.
- [13] WANG D W, YE Y Q. Design and experiments of anticipatory learning control: Frequency-domain approach [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2005, 10(33): 305 – 313.
- [14] ZHANG B, WANG D W, YE Y Q. On learning transient, auto-tunings of learnable bandwidth and lead step in iterative learning control [J]. *International Journal of Systems Science*, 2010, 41(4): 353 – 363.
- [15] 许建新, 侯忠生. 学习控制的现状与展望 [J]. *自动化学报*, 2005, 31(6): 943 – 955.  
(XU Jianxin, HOU Zhongsheng. On learning control: the state of the art and perspective [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(6): 943 – 955.)
- [16] TIMO I L, VESA V, MATTI K, et al. Splitting the unit delay-tools for fractional delay filter design [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1996, 13(1): 30 – 60.
- [17] JAHANI YEKTA M M. A frequency domain proof for the equivalence of the maximally flat FIR fractional delay filter and the Lagrange interpolator [J]. *Digital Signal Processing*, 2011, 21(1): 13 – 16.
- [18] HON K K, JIANG A. FIR, Allpass, and IIR variable fractional delay digital filter design [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2009, 56 (9): 2064 – 2074.
- [19] OETKEN G. A new approach for the design of digital interpolating filters [J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1979, 27(6): 637 – 643.
- [20] PLOTNIK A M, LONGMAN R W. Subtleties in the use of zero-phase low-pass filtering and cliff filtering in learning control [J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2000, 103(1): 673 – 692.

## 作者简介:

潘雪 (1986–), 女, 硕士, 研究方向为迭代学习控制、逆变器的控制及重复控制, E-mail: snowpyyuki@gmail.com;

叶永强 (1972–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为迭代学习控制, E-mail: yongqiang\_leaf@hotmail.com;

王建宏 (1979–), 男, 博士, 研究方向为分数阶迭代学习控制和重复控制, E-mail: wang.jhong@ntu.edu.cn.