

# 多枚倾斜转弯导弹的滚转通道之分布式有限时间姿态协调控制

都海波<sup>1,2†</sup>, 李世华<sup>2</sup>, 何怡刚<sup>1</sup>, 程盈盈<sup>1</sup>

(1. 合肥工业大学 电气与自动化工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096)

**摘要:** 对多枚倾斜转弯(BTT)导弹设计滚转通道自动驾驶仪时, 基于分布式协调控制理论, 本文提出了一类分布式有限时间姿态协调控制器. 由于BTT导弹的气动参数变化强烈、机动要求高, 要求控制器响应速度快, 抗干扰能力强. 本文基于有限时间控制技术, 并结合多智能体系统的协调控制理论, 对多枚BTT导弹滚转通道提出了一种分布式有限时间姿态协调控制律. 在该控制律作用下, 所有的BTT导弹通过相互协调, 其滚转角可以在有限时间内达到一致并为给定的参考指令信号. 仿真结果表明了该方法的有效性.

**关键词:** 多枚BTT导弹; 滚转通道; 有限时间控制; 协调控制

中图分类号: TP13 文献标识码: A

## Distributed finite-time attitude cooperative control for roll channels of multiple bank-to-turn missiles

DU Hai-bo<sup>1,2†</sup>, LI Shi-hua<sup>2</sup>, HE Yi-gang<sup>1</sup>, CHENG Ying-ying<sup>1</sup>

(1. School of Electrical Engineering and Automation, Hefei University of Technology, Hefei Anhui 230009, China;  
2. School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China)

**Abstract:** Since bank-to-turn (BTT) missiles are with time-varying aerodynamic parameters and are required to carry out large angle maneuver, etc., the attitude controller must provide a fast response and strong disturbance-rejection performances. To this end, based on the technique of finite-time control and the theory of cooperative control of multi-agent systems, a distributed finite-time attitude cooperative control law is proposed. According to the proposed control law, the roll angles of all BTT missiles can achieve a state-consensus in a finite time, which is the desired roll angle. Simulation results are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** multiple BTT missiles; roll channels; finite-time control; cooperative control

### 1 引言(Introduction)

近年来, 多智能体(multi-agent)系统的协同与控制问题, 引起了越来越多的关注. 多智能体系统的协调控制研究指的是在没有中央控制和全局通信的情况下, 仅靠分布的个体之间局部相互协调, 系统作为一个整体能够产生各种集体行为, 如群集、同步与一致性等<sup>[1-3]</sup>. 多智能体系统的协调控制在很多领域具有重要的应用前景, 如多个移动机器人的编队控制<sup>[4-5]</sup>、多个飞行器的姿势协调控制与编队控制<sup>[6-7]</sup>、拥塞控制<sup>[8]</sup>、聚集控制<sup>[9-10]</sup>、数据融合<sup>[11]</sup>等.

作为多智能体协调控制理论的重要应用领域之一, 多导弹的联合协调攻击问题近年来受到了不少学者的关注. 随着现代战争的日趋复杂性, 传统的单个导弹作战已很难完成对目标的攻击, 而采用多导弹的联合攻击已成为了一种有效的攻击手段. 然而, 导弹系

统模型参数的时变性以及各状态间非线性耦合, 往往给协调控制律的设计带来了一定的挑战性. 文献[12-13]主要针对多导弹系统的末端制导问题, 提出了相应的协调控制律设计方案, 以保证在攻击时间上的一致性. 然而, 对导弹编队在飞行过程中的姿态协调控制问题, 目前并没有相关的报道.

近年来, 为了提高导弹系统的机动性和攻击的精度, 很多导弹系统采用了倾斜转弯(bank-to-turn, BTT)技术, 即BTT导弹<sup>[14-15]</sup>. 所谓BTT技术指的是在导弹转弯前先做滚转动作, 将导弹的最大升力面转到理想机动方向, 同时俯仰控制系统控制导弹在最大升力面内产生所需要的机动加速度. 因此, 对于BTT导弹自动驾驶仪设计而言, 滚转通道的控制系统设计至关重要. 然而, 由于BTT导弹滚转通道自动驾驶仪是一个时变的二阶线性模型<sup>[16]</sup>, 其气动参数随飞行状态及高

收稿日期: 2012-10-30; 收修改稿日期: 2013-03-18.

†通信作者. E-mail: haibo.du@hfut.edu.cn.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61074013, 61304007); 国家杰出青年科学基金资助项目(50925727); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2012HGBZ0205, 2012HGQC0002); 中国博士后科学基金资助项目(2012M521217); 安徽省自然科学基金资助项目(1308085QF106).

度的变化而强烈变化, 给控制系统设计者带来了一定的困难. 为此, 不少学者提出了不同的滚转通道自动驾驶仪设计方案, 如变结构控制方法<sup>[14]</sup>、极点配置方法<sup>[16]</sup>、模型参考控制方法<sup>[17]</sup>、基于扰动观测器的复合控制方法<sup>[18]</sup>等.

值得指出的是以上的滚转通道控制律设计都是针对单个BTT导弹. 如何针对多个BTT导弹滚转通道自动驾驶仪设计姿态协调控制律目前还尚未见到相关报道. 本文主要就针对该问题提出一种姿态协调控制律的设计方案. 同时, 为了提高系统的动态品质(如响应速度和抗扰动性), 本文将基于有限时间控制技术<sup>[19]</sup>, 给出了有限时间姿态协调控制律, 以保证姿态的协调可以在有限时间内完成. 已有的理论分析成果表明有限时间控制不仅能提高闭环系统的响应速度还能提高系统的抗扰动能力和系统的精度等特点<sup>[19-22]</sup>. 尽管有限时间控制技术已经被应用到不同类型的多智能体系统中, 如一阶积分器模型<sup>[23-25]</sup>、二阶积分器模型<sup>[20,26]</sup>、刚体飞行器姿态系统<sup>[27-28]</sup>, 但这些都已有的结果并不能解决多BTT导弹的滚转通道系统的协调控制问题. 这主要是由于BTT滚转模型的气动参数是时变的而且在实际中往往是未知的.

为解决多BTT导弹滚转通道的有限时间姿态协调控制问题, 本文主要基于加幂积分技术(adding a power integrator)<sup>[29]</sup>来设计一种有限时间控制律. 同时, 为了克服系统的模型参数时变特性, 利用反馈压制(domination)技术, 来确定控制器的增益. 具体地说, 首先将滚转角速度看成虚拟控制量, 基于邻居规则设计虚拟速度, 使得状态一致性可以在有限时间内达到. 然后, 基于有限时间控制方法设计控制律使得真实速度在有限时间内跟踪上虚拟速度. 最后, 利用图理论和有限时间Lyapunov稳定性理论, 严格地证明了所有BTT导弹的滚转角可以在有限时间内达到一致且最终的一致性状态为参考指令信号. 此外, 针对系统存在外部干扰的情况, 结合变结构控制理论, 也给出了相应的分布式有限时间姿态协调控制器设计方法.

## 2 预备知识及问题描述(Preliminaries and problem statement)

### 2.1 数学符号(Mathematical notations)

矩阵 $P > 0$  ( $P < 0$ )表示矩阵为对称正定(负定)矩阵.  $\lambda_{\max}(P)$ 和 $\lambda_{\min}(P)$ 分别代表实对称矩阵 $P$ 的最大和最小的特征值.

### 2.2 图理论(Graph theory)

多智能体间的通讯拓扑结构通常可以用图论中的有向图来进行描述. 不失一般性, 假设有 $n$ 个智能体动态系统, 记 $\Gamma = \{1, \dots, n\}$ . 假设每个智能体都是一个通讯节点, 则智能体间的信息交换可以用有向图 $G = \{V, E, A\}$ 来表示, 其中:  $V = \{v_i, i = 1, \dots, n\}$

是由 $n$ 个智能体所代表的节点集,  $E \subseteq V \times V$ 是边界集,  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为图的加权邻接矩阵. 在有向图 $G$ 中, 如果从节点 $v_i$ 到节点 $v_j$ 存在一条有向边, 则表示智能体 $i$ 的信息可以传输给智能体 $j$ , 同时用 $(v_i, v_j) \in E$ 表示. 矩阵 $A$ 的定义为 $a_{ji} > 0 \iff (v_i, v_j) \in E$ ;  $a_{ji} = 0 \iff (v_i, v_j) \notin E$ . 此外, 假定 $a_{ii} = 0, \forall i \in \Gamma$ . 智能体 $i$ 的邻居智能体集定义为可以传输信息给智能体 $i$ 的所有智能体, 记作:  $N_i = \{j : (v_j, v_i) \in E\}$ . 记节点 $v_i$ 的输出度为

$$\text{deg}_{\text{out}}(v_i) = d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j \in N_i} a_{ij},$$

则图 $G$ 的度矩阵为 $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ , 图 $G$ 的Laplacian矩阵为 $L = D - A$ .

在图 $G$ 中, 从节点 $v_{i_1}$ 到节点 $v_{i_k}$ 之间有一条路径指的是存在一系列的节点使得 $(v_{i_l}, v_{i_{l+1}}) \in E, l = 1, \dots, k - 1$ . 此外, 值得指出的是本文假设多智能体之间的通讯拓扑图为无向连通图. 所谓无向有时也称双向的, 即 $(v_i, v_j) \in E \iff (v_j, v_i) \in E$ 且 $a_{ij} = a_{ji}$ . 所谓无向连通图指的是图中任意两个节点之间都存在一条路径.

### 2.3 BTT导弹滚转通道数学模型(Mathematical model for roll channel of BTT missile)

不失一般性, 本文考虑 $n$ 个BTT导弹. 由文献[16]可知, 第 $i$ 个BTT弹体滚转通道的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_i = \omega_i, \\ \dot{\omega}_i = -a_i(t)\omega_i - c_i(t)\delta_i + d_i(t), \end{cases} \quad i \in \Gamma, \quad (1)$$

其中:  $\gamma_i$ 和 $\omega_i$ 分别为第 $i$ 个导弹的滚转角和角速度;  $\delta_i$ 为待设计的舵偏角; 系数 $a_i(t)$ 和 $c_i(t)$ 为时变的与气动参数相关的系数;  $d_i(t)$ 为时变的外部干扰. 由文献[16]可知, 一般情况下, 系数 $a_i$ 和 $c_i$ 是正的且有上下界的, 即

**假设 1** 对于任意的 $i \in \Gamma$ , 存在已知的正常数 $a_i, \bar{a}_i$ 和 $c_i, \bar{c}_i$ 使得

$$a_i \leq a_i(t) \leq \bar{a}_i, \quad c_i \leq c_i(t) \leq \bar{c}_i. \quad (2)$$

对外部扰动, 和文献[20,28]中一致, 有以下假设:

**假设 2** 对于任意 $i \in \Gamma$ , 有 $|d_i(t)| \leq l < +\infty$ .

### 2.4 问题描述(Problem statement)

对于 $n$ 个BTT导弹, 假设期望的滚转角为一个常数角 $\gamma_d$ , 且仅有部分BTT导弹可以得到该指令信号. 为便于描述各个智能体与期望的指令信号间的通讯拓扑关系, 定义 $b_i \geq 0$ 如下:

$$b_i \begin{cases} > 0, & \text{第 } i \text{ 个智能体可以得到参考指令信号;} \\ = 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

记对角矩阵 $B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$ .

本文的控制目标主要是针对多BTT导弹滚转通道

系统(1),设计一个有限时间姿态协调控制律.该控制律使得当系统间的通讯拓扑图满足假设3时,所有BTT导弹的滚转角能在有限时间内达到一致并且最终的一致状态为参考指令信号 $\gamma_d$ .

**注1** 尽管此处的控制目标是要求所有的导弹滚转角达到同一个角度,但对于实际的多导弹控制系统而言,常常要求导弹间保持相对的姿态角.事实上,对于这种情况本文的算法同样适用.具体地说:假设导弹*i*和*j*的期望滚转角度差为 $\Delta\gamma_{ij} = \Delta\gamma_i - \Delta\gamma_j, i, j \in \Gamma$ ,且为常数,基于如下的坐标变换: $\bar{\gamma}_i = \gamma_i - \Delta\gamma_i, i \in \Gamma$ ,则可实现此控制目标.

**假设3** 针对多BTT导弹系统(1),有

- 所有导弹构成的通讯拓扑图*G*是无向连通的;
- 至少有一个导弹可以获取参考指令信号,即*B* ≠ 0.

**注2** 对于多个导弹协调控制系统而言,彼此间通讯拓扑结构图起了很重要的作用.为了保证所有导弹间能够共同协作完成某项任务,对于固定的无向通讯拓扑结构图而言,所有导弹间的连通是必要条件<sup>[2]</sup>,否则,对于没有通讯路径连接的导弹,则不能和其他导弹形成通讯.同样地,如果存在外部指令信号,则至少指定一个导弹为领导者,否则不可能保证所有导弹的最终状态为参考指令信号.

**2.5 相关引理(Related lemmas)**

首先,给出时变非线性系统的有限时间控制系统的Lyapunov稳定性判据.根据文献 [30]中的命题1,有下面的引理:

**引理1** 考虑系统

$$\dot{x} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, f(t, 0) = 0, \quad (3)$$

其中: $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续的向量函数.如果存在正定连续可微且径向无界的函数 $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\dot{V}(x) + cV^\alpha(x) \leq 0,$$

其中 $c > 0$ 和 $\alpha \in (0, 1)$ ,那么系统(3)是全局有限时间稳定的,且有限收敛时间*T*满足 $T \leq \frac{V^{1-\alpha}(x(0))}{c(1-\alpha)}$ .

其次,本文还需要用到相关图论的引理.

**引理2**<sup>[31]</sup> 对于无向连通图*G*,其相应的Laplacian矩阵*L*满足:对 $\forall x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ,有

$$x^T L x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_i - x_j)^2.$$

**引理3**<sup>[32]</sup> 对于无向连通图*G*,如果假设式(3)成立,那么 $L + B > 0$ .

此外,本文还需要用到下面的不等式引理.

**引理4**<sup>[29]</sup> 若 $0 < p = p_1/p_2 \leq 1$ ,其中 $p_1 > 0, p_2 > 0$ 为正的奇数,则有下面的不等式成立:

$$|x^p - y^p| \leq 2^{1-p}|x - y|^p.$$

**引理5**<sup>[29]</sup> 若 $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, c, d$ 为正实数,则有下面的不等式成立:

$$|x|^c |y|^d \leq \frac{c}{c+d} |x|^{c+d} + \frac{d}{c+d} |y|^{c+d}.$$

**引理6**<sup>[33]</sup> 若 $x_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, n, 0 < p \leq 1)$ 为正实数,则有下面的不等式成立:

$$(|x_1| + \dots + |x_n|)^p \leq |x_1|^p + \dots + |x_n|^p.$$

**3 主要结果(Main results)**

**3.1 无扰动情况(In the absence of disturbance)**

本节将首先考虑在无外部扰动情形下的分布式有限时间协调控制器设计,即 $d_i(t) = 0$ 的情况.

**定理1** 考虑多BTT导弹滚转通道系统(1)且不存在外部扰动,即 $d_i(t) = 0, \forall i \in \Gamma$ .如果假设1和假设3成立,且 $\delta_i$ 设计为

$$\begin{cases} \delta_i = \frac{k_1 + k_2^{1+p} \rho_2(k_2, \omega_i, \bar{a}_i)}{c_i} \xi_i^{\frac{2}{p}-1}, \\ \xi_i = \omega_i^p + k_2^p \left( \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\gamma_i - \gamma_j) + b_i (\gamma_i - \gamma^d) \right), \\ i \in \Gamma, \end{cases} \quad (4)$$

其中: $k_3$ 为一个任意的正数,

$$\begin{cases} k_2 \geq \frac{p2^{1-\frac{1}{p}}}{1+p} + \frac{(\alpha + n\beta)}{1+p} + \frac{2-p}{(1+2p-1/p)2^{1-\frac{1}{p}}} + k_3, \\ k_1 \geq \left( 2 - \frac{1}{p} \right) 2^{1-\frac{1}{p}} k_2^{1+p} \left[ \frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{1+p} + \rho_1(k_2) + \frac{n\beta 2^{1-\frac{1}{p}}}{k_2(1+p)} + k_3 \right], \\ \rho_1(k_2) = \frac{1}{k_2} [(\alpha + n\beta)(2^{1-\frac{1}{p}} + k_2) \frac{p}{1+p} + \frac{\alpha 2^{1-\frac{1}{p}}}{1+p}], \\ \rho_2(k_2, \omega_i, \bar{a}_i) = \frac{2^{(1-\frac{1}{p})(2-p)} \bar{a}_i |\omega_i|^{p-1}}{k_2^{1+p}} + \frac{2p-1}{1+p} \frac{\bar{a}_i^{\frac{1+p}{2p-1}} |\omega_i|^{\frac{2}{2p-1}}}{k_2^{1+p}}, \end{cases} \quad (5)$$

$\alpha = \max_{\forall i \in \Gamma} \{b_i\} + \max_{\forall i \in \Gamma} \left\{ \sum_{j \in N_i} a_{ij} \right\}, \beta = \max_{\forall i, j \in \Gamma} \{a_{ij}\}, 1 < p = p_1/p_2 < 2, p_1, p_2$ 为正的奇数,那么所有导弹的滚转角都能在有限时间内达到一致且一致的状态为 $\gamma_d$ ,亦即在有限时间内实现 $\gamma_i \rightarrow \gamma_d$ .

**证** 令 $\bar{\gamma}_i = \gamma_i - \gamma_d$ 为跟踪误差,那么由式(1)可得误差系统动态方程为

$$\dot{\bar{\gamma}}_i = \omega_i, \dot{\omega}_i = -a_i(t)\omega_i - c_i(t)\delta_i, i \in \Gamma. \quad (6)$$

接下来的证明主要分为两步:首先,将角速度看成虚

拟控制量, 并设计虚拟速度, 使得姿态角一致性可以在有限时间内达到; 然后, 设计有限时间控制律使得真实角速度在有限时间内跟踪上虚拟速度.

**第1步 虚拟角速度设计.**

令  $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_n)$ , 并构造如下的Lyapunov备选函数:

$$V_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n [\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\bar{\gamma}_i - \bar{\gamma}_j)^2 + 2b_i \bar{\gamma}_i^2]. \quad (7)$$

注意到  $\bar{\gamma}^T B \bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n b_i \bar{\gamma}_i^2$ . 由引理2可知

$$V_0 = \frac{1}{2} \bar{\gamma}^T L \bar{\gamma} + \frac{1}{2} \bar{\gamma}^T B \bar{\gamma}. \quad (8)$$

沿着系统(6), 对  $V_0$  求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= \dot{\bar{\gamma}}^T L \bar{\gamma} + \dot{\bar{\gamma}}^T B \bar{\gamma} = \\ &\sum_{i=1}^n [\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\dot{\bar{\gamma}}_i - \dot{\bar{\gamma}}_j) + b_i \dot{\bar{\gamma}}_i] \omega_i. \end{aligned} \quad (9)$$

令  $q_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\bar{\gamma}_i - \bar{\gamma}_j) + b_i \bar{\gamma}_i$ ,  $i \in \Gamma$ , 并设计虚拟控制量为  $\omega_i = -k_2 q_i^{\frac{1}{p}}$ ,  $i \in \Gamma$ , 那么可得

$$\dot{V}_0 = -k_2 \sum_{i=1}^n q_i^{1+\frac{1}{p}}.$$

根据引理6可得

$$\dot{V}_0 = -k_2 \sum_{i=1}^n q_i^{\frac{2(1+p)}{2p}} \leq -k_2 (\sum_{i=1}^n q_i^2)^{\frac{1+p}{2p}}. \quad (10)$$

另外一方面, 根据引理3, 可知  $L + B > 0$ , 这也就意味着  $\lambda_{\min}(L + B) > 0$ . 同时, 由于

$$(L + B)\bar{\gamma} = [q_1 \ \dots \ q_n]^T, \quad (11)$$

那么

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n q_i^2 &= ((L + B)\bar{\gamma})^T (L + B)\bar{\gamma} \geq \\ &\theta_1 \bar{\gamma}^T (L + B)\bar{\gamma} = 2\theta_1 V_0, \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\theta_1 = \lambda_{\min}(L + B)$ . 根据式(10)和式(12), 可得

$$\dot{V}_0 \leq -k_2 (2\theta_1)^{\frac{1+p}{2p}} V_0^{\frac{1+p}{2p}}. \quad (13)$$

因此, 根据引理1, 可知  $V_0(t)$  将会在有限时间内收敛到0. 结合函数  $V_0$  的定义, 可知对于任意的  $i \in \Gamma$ ,  $\gamma_i(t)$  将会在有限时间内收敛到  $\gamma_d$ .

**第2步 控制律设计.**

接下来, 将证明在有限时间控制器(4)作用下, 其虚拟角速度可以在有限时间内被真实角速度跟踪上. 取如下Lyapunov函数:

$$V(t) = V_0(t) + \sum_{i=1}^n V_i(t), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} V_i(t) &= \frac{1}{(2-1/p)2^{1-\frac{1}{p}}k_2^{1+p}} \int_{\omega_i^*}^{\omega_i} (s^p - \omega_i^{*p})^{2-\frac{1}{p}} ds, \\ \omega_i^* &= -k_2 q_i^{\frac{1}{p}}, \quad i \in \Gamma. \end{aligned} \quad (15)$$

由文献[29]可知函数  $V_i$  是正定的函数. 为简便起见, 记  $\xi_i = \omega_i^p - \omega_i^{*p}$ ,  $i \in \Gamma$ ,  $r = 1 + \frac{1}{p}$ . 根据第1步的结果和引理4-5, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(t) &= \sum_{i=1}^n q_i \omega_i^* + \sum_{i=1}^n q_i (\omega_i - \omega_i^*) \leq \\ &-k_2 \sum_{i=1}^n q_i^r + \sum_{i=1}^n 2^{1-\frac{1}{p}} \left( \frac{p|q_i|^r}{1+p} + \frac{|\xi_i|^r}{1+p} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

沿着系统(6), 对  $V_i(t)$  求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= -\frac{1}{2^{1-\frac{1}{p}}k_2^{1+p}} \frac{d\omega_i^{*p}}{dt} \int_{\omega_i^*}^{\omega_i} (s^p - \omega_i^{*p})^{1-\frac{1}{p}} ds + \\ &\frac{1}{(2-1/p)2^{1-\frac{1}{p}}k_2^{1+p}} \xi_i^{2-\frac{1}{p}} (-a_i(t)\omega_i - \\ &c_i(t)\delta_i), \quad i \in \Gamma. \end{aligned} \quad (17)$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_i^{*p}}{dt} &= -k_2^p [\sum_{j \in N_i} a_{ij} (\omega_i - \omega_j) + b_i \omega_i] \leq \\ &k_2^p (\alpha |\omega_i| + \beta \sum_{m=1}^n |\omega_m|), \quad i \in \Gamma. \end{aligned} \quad (18)$$

将此不等式代入式(17), 同时注意到

$$|\int_{\omega_i^*}^{\omega_i} (s^p - \omega_i^{*p})^{1-\frac{1}{p}} ds| \leq |\omega_i - \omega_i^*| |\xi_i|^{1-\frac{1}{p}},$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &\leq \frac{1}{2^{1-\frac{1}{p}}k_2} (\alpha |\omega_i| + \beta \sum_{m=1}^n |\omega_m|) |\omega_i - \omega_i^*| \cdot \\ &|\omega_i|^{1-\frac{1}{p}} + \frac{|a_i(t)|}{(2-1/p)2^{1-\frac{1}{p}}k_2^{1+p}} |\xi_i|^{2-\frac{1}{p}} |\omega_i| - \\ &\frac{c_i(t)}{(2-1/p)2^{1-\frac{1}{p}}k_2^{1+p}} \xi_i^{2-\frac{1}{p}} \delta_i, \quad i \in \Gamma. \end{aligned} \quad (19)$$

根据引理4-5, 对于任意  $i, m \in \Gamma$ , 有

$$\begin{aligned} |\omega_m| |\omega_i - \omega_i^*| |\xi_i|^{1-\frac{1}{p}} &\leq 2^{1-\frac{1}{p}} |\omega_m| |\xi_i|^{\frac{1}{p}} |\xi_i|^{1-\frac{1}{p}} \leq \\ &2^{1-\frac{1}{p}} (|\xi_i| |\omega_m - \omega_m^*| + |\xi_i| |\omega_m^*|) \leq \\ &2^{1-\frac{1}{p}} (2^{1-\frac{1}{p}} |\xi_i| |\xi_m|^{\frac{1}{p}} + k_2 |\xi_i| |q_m|^{\frac{1}{p}}) \leq \\ &2^{1-\frac{1}{p}} ((2^{1-\frac{1}{p}} + k_2) \frac{p|\xi_i|^r}{1+p} + \\ &\frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{1+p} |\xi_m|^r + \frac{k_2}{1+p} |q_m|^r). \end{aligned} \quad (20)$$

基于此不等式, 可以得到式(19)中的第1项估计为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{1-\frac{1}{p}}k_2} (\alpha |\omega_i| + \beta \sum_{m=1}^n |\omega_m|) |\omega_i - \omega_i^*| |\omega_i|^{1-\frac{1}{p}} &\leq \\ \rho_1(k_2) |\xi_i|^r + \frac{\alpha}{1+p} |q_i|^r + \frac{\beta 2^{1-\frac{1}{p}}}{k_2(1+p)} \sum_{m=1}^n |\xi_m|^r + \\ \frac{\beta}{1+p} \sum_{m=1}^n |q_m|^r, \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\rho_1(k_2) = \frac{1}{k_2} [(\alpha + n\beta)(2^{1-\frac{1}{p}} + k_2) \frac{p}{1+p} + \frac{\alpha 2^{1-\frac{1}{p}}}{1+p}].$$

此外, 根据引理6和引理4, 式(19)中的第2项估计如下:

$$\begin{aligned} & \frac{|a_i(t)|}{k_2^{1+p}} |\xi_i|^{2-\frac{1}{p}} |\omega_i| = \\ & \frac{\bar{a}_i}{k_2^{1+p}} |\xi_i|^{2-\frac{1}{p}} |\omega_i|^{p-1} |\omega_i - \omega_i^* + \omega_i^*|^{2-p} \leq \\ & \frac{\bar{a}_i}{k_2^{1+p}} |\xi_i|^{2-\frac{1}{p}} |\omega_i|^{p-1} (|\omega_i - \omega_i^*|^{2-p} + |\omega_i^*|^{2-p}) \leq \\ & \frac{\bar{a}_i}{k_2^{1+p}} |\xi_i|^{2-\frac{1}{p}} |\omega_i|^{p-1} \times (2^{(1-\frac{1}{p})(2-p)} |\xi_i|^{\frac{2}{p}-1} + \\ & k_2^{2-p} |q_i|^{\frac{2}{p}-1}) = \\ & \frac{2^{(1-\frac{1}{p})(2-p)} \bar{a}_i |\omega_i|^{p-1}}{k_2^{1+p}} |\xi_i|^r + \\ & \frac{\bar{a}_i |\omega_i|^{p-1}}{k_2^{2p-1}} |\xi_i|^{2-\frac{1}{p}} |q_i|^{\frac{2}{p}-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

基于式(22), 并利用引理5( $x = (\frac{\bar{a}_i |\omega_i|^{p-1}}{k_2^{2p-1}})^{\frac{1}{(2-1/p)}} |\xi_i|$ ,  $y = |q_i|$ ,  $c = 2 - 1/p$ ,  $d = 2/p - 1$ ), 可得

$$\begin{aligned} & \frac{|a_i(t)|}{k_2^{1+p}} |\xi_i|^{2-\frac{1}{p}} |\omega_i| \leq \\ & \frac{2^{(1-\frac{1}{p})(2-p)} \bar{a}_i |\omega_i|^{p-1}}{k_2^{1+p}} |\xi_i|^r + \frac{2p-1}{1+p} \cdot \\ & \frac{\bar{a}_i^{\frac{1+p}{2p-1}} |\omega_i|^{\frac{2-1}{2p-1}}}{k_2^{1+p}} |\xi_i|^r + \frac{2-p}{1+p} |q_i|^r := \\ & \rho_2(k_2, \omega_i, \bar{a}_i) |\xi_i|^r + \frac{2-p}{1+p} |q_i|^r. \end{aligned} \tag{23}$$

将式(21)和式(23)代入式(19), 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) & \leq \left( \frac{\alpha}{1+p} + \frac{2-p}{(1+2p-1/p)2^{1-\frac{1}{p}}} \right) |q_i|^r + \\ & \frac{\beta}{1+p} \sum_{m=1}^n |q_m|^r + (\rho_1(k_2) + \\ & \frac{\rho_2(k_2, \omega_i, \bar{a}_i)}{(2-1/p)2^{1-\frac{1}{p}}}) |\xi_i|^r + \\ & \frac{\beta \cdot 2^{1-\frac{1}{p}}}{k_2(1+p)} \sum_{m=1}^n |\xi_m|^r - \\ & \frac{c_i(t)}{(2-1/p)2^{1-\frac{1}{p}} k_2^{1+p}} \xi_i^{2-\frac{1}{p}} \delta_i, \quad i \in \Gamma. \end{aligned} \tag{24}$$

基于式(16)和式(24), 并同时注意到 $|q_i|^r = |q_i|^{\frac{1+p}{p}} = |q_i|^{\frac{p_1+p_2}{p_1}} = q_i^{\frac{p_1+p_2}{p_1}} = q_i^r$ 和 $|\omega_i|^r = \omega_i^r$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & \leq -\left(k_2 - \frac{p2^{1-\frac{1}{p}}}{1+p} - \frac{\alpha + n\beta}{1+p} - \right. \\ & \left. \frac{2-p}{(1+2p-1/p)2^{1-\frac{1}{p}}}\right) \sum_{i=1}^n q_i^r + \\ & \left( \frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{1+p} + \rho_1(k_2) + \frac{n\beta 2^{1-\frac{1}{p}}}{k_2(1+p)} \right) \sum_{i=1}^n \xi_i^r + \\ & \frac{1}{(2-1/p)2^{1-\frac{1}{p}}} \sum_{i=1}^n \rho_2(k_2, \omega_i, \bar{a}_i) \xi_i^r - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(2-1/p)2^{1-\frac{1}{p}} k_2^{1+p}} \sum_{i=1}^n \xi_i^{2-\frac{1}{p}} c_i(t) \delta_i. \tag{25}$$

注意到控制律(4)可以写成

$$\delta_i = \frac{k_1 + k_2^{1+p} \rho_2(k_2, \omega_i, \bar{a}_i)}{c_i} \xi_i^{\frac{2}{p}-1}, \quad i \in \Gamma. \tag{26}$$

将此控制律代入式(25), 并结合定理中的增益条件可以得到

$$\dot{V}(t) \leq -k_3 \sum_{i=1}^n q_i^r - k_3 \sum_{i=1}^n \xi_i^r. \tag{27}$$

另一方面, 基于式(15)和引理4, 并经过计算可得

$$\begin{aligned} V_i(t) & \leq \frac{1}{(2-\frac{1}{p})k_2^{1+p}} |\xi_i|^{\frac{1}{p}} |\xi_i|^{2-\frac{1}{p}} = \\ & \frac{|\xi_i|^2}{(2-\frac{1}{p})k_2^{1+p}}, \quad i \in \Gamma. \end{aligned} \tag{28}$$

然后, 结合式(12)和式(28), 有

$$V(t) = V_0(t) + \sum_{i=1}^n V_i(t) \leq \theta_2 \left( \sum_{i=1}^n q_i^2 + \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right),$$

其中 $\theta_2 = \max\{\frac{1}{2\lambda_2}, \frac{1}{(2-1/p)k_2^{1+p}}\}$ . 根据引理6, 有

$$V^{\frac{r}{2}}(t) \leq \theta_2^{\frac{r}{2}} \left( \sum_{i=1}^n q_i^r + \sum_{i=1}^n \xi_i^r \right). \tag{29}$$

令 $\theta_3 = k_3/(2\theta_2^{\frac{r}{2}}) > 0$ , 那么由式(27), 有

$$\dot{V}(t) + \theta_3 V^{\frac{r}{2}}(t) \leq -\frac{k_3}{2} \sum_{i=1}^n q_i^r - \frac{k_3}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i^r \leq 0.$$

根据引理1, 可知存在一个时刻 $T \leq \frac{V^{1-\frac{r}{2}}(0)}{\theta_3(1-r/2)} < +\infty$ 使得 $V(t) = 0, \forall t \geq T$ , 即 $V_0(t) = 0, V_i(t) = 0, \forall i \in \Gamma, \forall t \geq T$ . 一方面, 由于图 $G$ 是连通的, 因此 $V_0(t) = 0$ 意味着 $\gamma_i = \gamma_j = \gamma_d, \forall i, j \in \Gamma$ . 另一方面 $V_i(t) = 0$ 意味着 $\omega_i(t) = \omega_i^*(t)$ . 注意到一旦 $\gamma_i = \gamma_j = \gamma_d, \forall i, j \in \Gamma$ 则 $\omega_i^*(t) = 0$ . 那么则 $V_i(t) = 0$ 意味着 $\omega_i(t) = \omega_i^*(t) = 0, \forall i \in \Gamma$ . 因此姿态一致性可以在有限时间内完成且最终一致性姿态为 $\gamma_d$ .

证毕.

**注3** 值得指出的是: 在文献[20,26]中, 针对二阶积分器多智能体系统, 基于齐次性理论和加幂积分技术, 分别设计了两类分布式有限时间协调控制律. 但这些结果并不适用于本文所考虑的二阶多BTT导弹系统, 即系统(1). 主要原因在于系统(1)中存在时变且未知的系统参数 $a_i(t), c_i(t)$ . 为了克服该问题, 和文献[20,26]中的设计方法不同, 本文定理1中的控制器设计采用了反馈压制(domination)技术构造了时变的反馈增益, 即 $\rho_2(k_2, \omega_i, \bar{a}_i)$ . 通过时变的增益可以来压制系统中这些不确定的时变参数.

### 3.2 有扰动情况(In the presence of disturbance)

接下来, 将考虑存在外部扰动情形下的有限时间

协调控制器设计, 且其扰动满足假设2. 基于变结构控制方法, 有下面的定理.

**定理 2** 对于多BTT导弹滚转通道系统(1), 如果假设1-3成立, 且 $\delta_i$ 设计为

$$\begin{cases} \delta_i = \frac{k_1 + k_2^{1+p} \rho_2(k_2, \omega_i, \bar{a}_i)}{c_i} \xi_i^{\frac{2}{p}-1} + \frac{k_5}{c_i} \operatorname{sgn} \xi_i, \\ \xi_i = \omega_i^p + k_2^p \left( \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\gamma_i - \gamma_j) + b_i (\gamma_i - \gamma_d) \right), \\ i \in \Gamma, \end{cases} \quad (30)$$

其中 $k_5 \geq l$ , 其他参数和定理1中参数取值相同, 那么所有导弹的滚转角都能在有限时间内达到一致且一致的状态为 $\gamma_d$ , 亦即在有限时间内实现 $\gamma_i \rightarrow \gamma_d$ .

**证** 该定理的证明过程和定理1的证明是类似的, 所不同的是本定理中考虑了外部扰动. 由式(25)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\left(k_2 - \frac{p2^{1-\frac{1}{p}}}{1+p} - \frac{\alpha + n\beta}{1+p} - \frac{2-p}{(1+2p-1/p)2^{1-\frac{1}{p}}}\right) \sum_{i=1}^n q_i^r + \\ & \left(\frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{1+p} + \rho_1(k_2) + \frac{n\beta 2^{1-\frac{1}{p}}}{k_2(1+p)}\right) \sum_{i=1}^n \xi_i^r + \\ & \frac{1}{(2-1/p)2^{1-\frac{1}{p}}} \sum_{i=1}^n \rho_2(k_2, \omega_i, \bar{a}_i) \xi_i^r - \\ & \frac{1}{(2-1/p)2^{1-\frac{1}{p}} k_2^{1+p}} \times \\ & \sum_{i=1}^n \xi_i^{2-\frac{1}{p}} [c_i(t)\delta_i + d_i(t)]. \end{aligned} \quad (31)$$

注意到 $|d_i(t)| \leq l$ 以及 $k_5 \geq l$ , 将控制律(30)代入上式可以得到

$$\dot{V}(t) \leq -k_3 \sum_{i=1}^n q_i^r - k_3 \sum_{i=1}^n \xi_i^r. \quad (32)$$

接下来, 通过和定理1相同的证明可以完成该定理的证明. 证毕.

**注 4** 很明显地, 定理1和定理2中的有限时间控制律都是分布式的. 所谓分布式控制律是指控制律的设计仅利用自己和周围邻居的信息. 和集中式控制律相比, 分布式控制律既具有较好的鲁棒性, 又具有良好的经济性<sup>[2]</sup>.

### 4 数值仿真(Numerical simulations)

考虑文献[16]中的4个型号相同的某类型BTT导弹, 假设该编队所期望的滚转角为 $\gamma_d = 90^\circ$ . 根据文献[16]可知系统的时变系数满足假设1, 且最大变化范围为

$$a_i(t) \in [0.491, 1.673], \quad c_i(t) \in [584.220, 3045.292].$$

4个BTT导弹所构成的通讯拓扑结构图见图1, 其中

$a_{12} = a_{13} = a_{34} = 1$ . 此外, 只有第1个导弹可以得知参考指令信号, 亦即 $b_1 = 1$ .

为了在数值仿真中模拟时变的系数, 基于以下的方法给出时变的系数:

$$a_i(t) = \begin{cases} a_i(t_1), & 0 \leq t \leq t_1, \\ a_i(t_{j-1}) + \frac{a_i(t_j) - a_i(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}(t - t_{j-1}), & t_{j-1} \leq t \leq t_j, \\ j = 2, \dots, 7, \end{cases} \quad (33)$$

其中 $a_i(t_i)$ 为模型在各个特征点的参数值. 对于时变系数 $c_i(t)$ 也是基于同样的方式给出. 由文献 [16]可知在不同的特征点参数取值如表1所示.

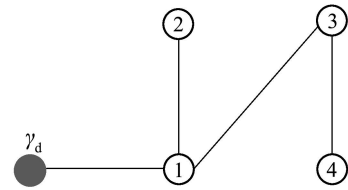


图 1 多BTT导弹系统间的通讯拓扑图  
Fig. 1 The graph of communication topology for the multiple BTT missiles

表 1 各特征点的模型参数值  
Table 1 Model parameters for different operation points

特征点	$a_i$	$c_i$
$t_1(4.4 \text{ s})$	1.264	1787.048
$t_2(11.7 \text{ s})$	1.600	1832.067
$t_3(19.5 \text{ s})$	1.636	2128.877
$t_4(23 \text{ s})$	1.635	2231.985
$t_5(28 \text{ s})$	1.607	3045.292
$t_6(35 \text{ s})$	0.936	1329.481
$t_7(40 \text{ s})$	0.644	818.706

仿真中, 假设初始姿态角为:  $\gamma(0) = (0, 115, 30, 55)^\top$ ,  $\omega(0) = (-10, 0, 10, -20)^\top$ . 此外, 和文献 [20]一致, 外部干扰取如下形式的干扰值:

$$\begin{aligned} d_1(t) &= 1.1\sin(8t - 1), \quad d_2(t) = -\cos(2t), \\ d_3(t) &= 0.8\sin t + 0.7\cos t, \quad d_4(t) = 0.2\cos(11t - 4). \end{aligned}$$

因此, 外部干扰的上界值可以取为 $l = 1.1$ . 基于文中的定理可以设计有限时间姿态协调控制律(30)来完成控制目标, 其中控制器的增益为 $k_1 = 40, k_2 = 20, k_5 = 1.1$ 和 $p = 7/5$ . 在该有限时间控制器作用下, 闭环系统的响应曲线见图2-4. 从中可以发现, 所有BTT导弹的滚转角能实现状态一致且一致性的状态为期望的角度.

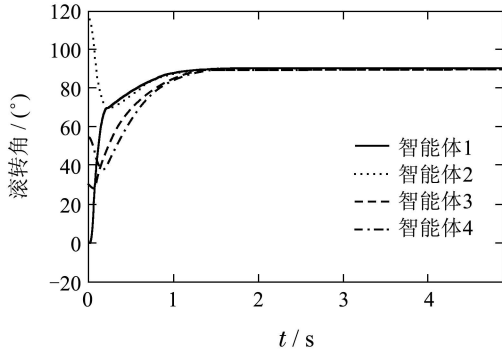


图2 BTT导弹系统在有限时间控制器(30)作用下的滚转角响应曲线

Fig. 2 The response curves of roll angle for the multiple BTT missiles under finite-time controller (30)

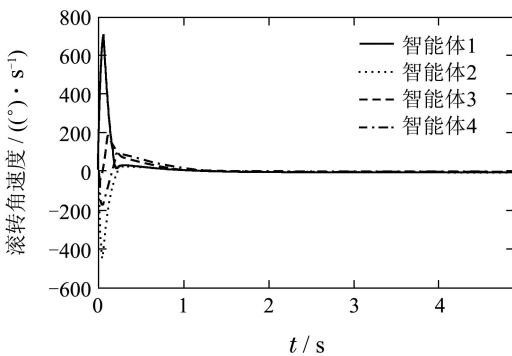


图3 多BTT导弹系统在有限时间控制器(30)作用下的滚转角速度响应曲线

Fig. 3 The response curves of roll rate for the multiple BTT missiles under finite-time controller (30)

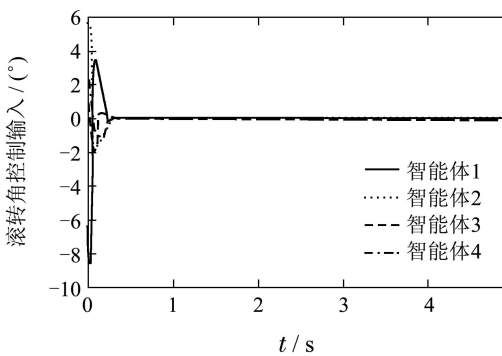


图4 多BTT导弹系统在有限时间控制器(30)作用下的滚转角控制输入即舵偏角响应曲线

Fig. 4 The response curves of control input for the multiple BTT missiles under finite-time controller (30)

### 5 结论(Conclusions)

本文研究了一类多BTT导弹滚转通道的姿态协调控制问题. 基于有限时间控制理论和图理论, 设计了一种有限时间收敛的姿态协调控制算法, 使得所有导弹的滚转角姿态可以在有限时间内达到同步, 并且为指定的参考信号. 最后, 数值仿真例子验证了方法的可行性.

### 参考文献(References):

- [1] PETERSEN K Y, GRAVDAHL J T, NIJMEIJER H. *Group Coordination and Cooperative Control* [M]. Berlin: Springer, 2006.
- [2] REN W, BEARD R W. *Distributed Consensus in Multivehicle Cooperative Control: Theory and Applications* [M]. Berlin: Springer, 2007.
- [3] 洪奕光, 翟超. 多智能体系统动态协调与分布式控制设计 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(10): 1506 – 1519. (HONG Yiguang, ZHAI Chao. Dynamic coordination and distributed control design of multi-agent systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(10): 1506 – 1519.)
- [4] DONG W J, FARRELL J A. Decentralized cooperative control of multiple nonholonomic dynamic systems with uncertainty [J]. *Automatica*, 2009, 45(3): 706 – 710.
- [5] DONG W J, FARRELL J A. Cooperative control of multiple nonholonomic mobile agents [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(6): 1434 – 1448.
- [6] LAWTON J R, BEARD R W. Synchronized multiple spacecraft rotations [J]. *Automatica*, 2002, 38(8): 1359 – 1364.
- [7] REN W. Distributed cooperative attitude synchronization and tracking for multiple rigid bodies [J]. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 2010, 18(2): 383 – 392.
- [8] OLFATI-SABER R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 410 – 420.
- [9] SHI G D, HONG Y G. Global target aggregation and state agreement of nonlinear multi-agent systems with switching topologies [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1165 – 1175.
- [10] DIMAROGONAS D V, KYRIAKOPOULOS K J. On the rendezvous problem for multiple nonholonomic agents [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 916 – 922.
- [11] SCUTARI G, BARBAROSSA S, PESCOLOLIDO L. Distributed decision through self-synchronizing sensor networks in the presence of propagation delays and asymmetric channels [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(4): 1667 – 1684.
- [12] JEON I S, LEE J I. Homing guidance law for cooperative attack of multiple missiles [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(1): 275 – 280.
- [13] 彭琛, 刘星, 吴森堂, 等. 多弹分布式协同末制导时间一致性研究 [J]. 控制与决策, 2010, 25(10): 1557 – 1561. (PENG Chen, LIU Xing, WU Sentang, et al. Consensus problems in distributed cooperative terminal guidance time of multi-missiles [J]. *Control and Decision*, 2010, 25(10): 1557 – 1561.)
- [14] 朱志刚, 周凤岐. BTT 导弹滚转通道变结构最终滑态控制系统设计 [J]. 西北工业大学学报, 1995, 13(2): 292 – 296. (ZHU Zhigang, ZHOU Fengqi. On design of variable structure terminal sliding mode control system for roll channel of BTT missile [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 1995, 13(2): 292 – 296.
- [15] 古良贤, 温炳恒. 导弹总体设计原理 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2004. (GU Liangxian, WEN Bingheng. *Design Principle of Missile System* [M]. Xi'an: Northwest Polytechnic University Press, 2004.
- [16] 段广仁, 周净扬. BTT导弹滚转通道自动驾驶仪设计 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2005, 22(5): 561 – 566. (DUAN Guangren, ZHOU Jingyang. Autopilot design of roll channel for BTT missiles [J]. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 2005, 22(5): 561 – 566.)
- [17] 汤柏涛, 董斌, 于云峰. BTT导弹滚转通道模型参考变结构自动驾驶仪设计 [J]. 计算机测量与控制, 2011, 19(1): 105 – 107. (TANG Baitao, DONG Bin, YU Yunfeng. Autopilot design for BTT missile based on model reference variable structure control [J]. *Computer Measurement & Control*, 2011, 19(1): 105 – 107.)

- [18] LI S H, YANG J. Autopilot design for bank-to-turn missiles using robust state feedback control and disturbance observers [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, 49(1): 559 – 579.
- [19] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [20] LI S H, DU H B, LIN X Z. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics [J]. *Automatica*, 2011, 47(8): 1706 – 1712.
- [21] DING S H, LI S H, LI Q. Disturbance analysis for continuous finite-time control systems [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2009, 7(3): 271 – 276.
- [22] 张运喜, 孙明玮, 陈增强. 滑模变结构有限时间收敛制导律 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(11): 1413 – 1418.  
(ZHANG Yunxi, SUN Mingwei, CHEN Zengqiang. Sliding-mode variable structure finite-time convergence guidance law [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(11): 1413 – 1418.)
- [23] HUI Q, HADDAD W M, BHAT S P. Finite-time semistability and consensus for nonlinear dynamical networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(8): 1887 – 1900.
- [24] XIAO F, WANG L, CHEN J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2605 – 2611.
- [25] WANG L, XIAO F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950 – 955.
- [26] WANG X L, HONG Y G. Finite-time consensus for multi-agent networks with second-order agent dynamics [C] // *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Korea: IFAC, 2008: 15185 – 15190.
- [27] MENG Z Y, REN W, YOU Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies [J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 2092 – 2099.
- [28] DU H B, LI S H, QIAN C J. Finite-time attitude tracking control of spacecraft with application to attitude synchronization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(1): 2711 – 2717.
- [29] QIAN C J, LIN W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1061 – 1079.
- [30] MOULAY E, PERRUQUETTI W. Finite time stability conditions for non-autonomous continuous systems [J]. *International Journal of Control*, 2008, 81(5): 797 – 803.
- [31] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.
- [32] HONG Y G, HU J P, GAO L X. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology [J]. *Automatica*, 2008, 42(7): 1177 – 1182.
- [33] HARDY G, LITTLEWOOD J, POLYA G. *Inequalities* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

### 作者简介:

**都海波** (1982–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为有限时间控制理论及应用、多智能体系统协调控制等, E-mail: haibo.du@hfut.edu.cn;

**李世华** (1975–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为非线性控制、交流伺服系统控制等, E-mail: lsh@seu.edu.cn;

**何怡刚** (1966–), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为电路理论及其应用等, E-mail: 18655136887@163.com;

**程盈盈** (1983–), 女, 硕士, 助教, 目前研究方向为有限时间控制、切换系统控制等, E-mail: zoeych@126.com.