第 30 卷第 6 期
2013 年 6 月
控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications
Vol. 30 No. 6
Jun. 2013

DOI: 10.7641/CTA.2013.21162

基于二叉树型分层的广义混合模糊系统推理规则数的缩减

杨 阳, 王贵君†, 杨永强
(天津师范大学 数学科学学院, 天津 300387)

摘要: 为避免广义混合模糊系统因输入变量个数的增加而引起规则爆炸现象, 应用二叉树型分层方法给出混合推理规则, 进而对广义混合模糊系统的输入实施二叉树型分层, 从理论上获得了该系统分层后的输入输出表达式和推理规则总数的计算公式. 此外, 通过实例对该系统分层和不分层的规则总数进行了比较和分析, 结果表明分层后广义混合模糊系统可大幅度缩减推理规则总数, 并可有效地避免规则爆炸.

关键词: 二叉树型分层; 混合推理规则; 广义混合模糊系统; 推理规则总数
中图分类号: TP183, O159 **文献标识码**: A

Reducing the number of inference rules for generalized hybrid fuzzy systems based on binary tree-type hierarchy

YANG Yang, WANG Gui-jun†, YANG Yong-qiang
(School of Mathematics Sciences, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China)

Abstract: To avoid the rule-explosion in the generalized hybrid fuzzy systems with increasing number of input variables, we put the hybrid inference rules in a binary tree-type hierarchy, and hierarchize the input variables of the generalized hybrid fuzzy system in the binary trees to obtain expressions for the input and output of the generalized hybrid fuzzy system, and theoretically derive a formula for computing the total number of inference rules. In an example, we analyze and compare the total number of fuzzy inference rules between the hierarchical and non-hierarchical generalized hybrid fuzzy systems. It shows that the total number of inference rules in hierarchical generalized hybrid fuzzy system is reduced greatly, effectively avoiding the rules explosion.

Key words: binary tree-type hierarchy; hybrid inference rule; generalized hybrid fuzzy systems; inference rules

1 引言(Introduction)

模糊系统虽不依赖于精确的数学模型, 但却具有逻辑推理、数值计算功能和较强的非线性函数逼近能力. 然而, 伴随着模糊系统输入变量个数的增加, 其推理规则总数往往呈指数规律增长. 这一事实不可避免将引起复杂的系统内部发生变化, 导致计算时间延长, 甚至使计算机记忆出现溢出或引起规则爆炸现象. Raju等人[1–2]首次提出递阶模糊系统概念, 为克服上述缺欠提供了一种有效途径. WANG等人[3–4]给出了所谓串联型分层模糊系统, 只是部分缩减了推理规则总数, 但并未给出规则数计算公式[5]. 2000年, 刘普寅等人[6]率先研究了Mamdani和T–S模糊系统的泛逼近性, 进而针对T–S模糊系统引入一种串联–叠加型分层方法, 给出了该系统分层后输入输出表示的等价性证明和推理规则总数计算公式[7–8], 该分层方法虽说可局部缓解或避免规则爆炸, 但依此计算公式所得规则总数的缩减并不是很大, 实际中只能起到缓解作用. 张乃尧等人[9–10]率先引入二叉树型分层方法针对 T–S模糊系统实施重新分层, 但也只限于研究该系统分层的等效性表示和逼近性, 并没有涉及如何缩减规则总数问题. 近年来, Santiago等人[11]从代数角度给出了分层模糊系统的矩阵模型表示, Vassilis和Moon等人[12–13]针对一些特殊模糊系统的分层研究了其单调性和运行效率问题, 虽说获得了诸多有益结果, 但同样也未涉及如何缩减推理规则总数问题. 2012年, 文献[14]通过引入参数将Mamdani和T–S模糊系统统一起来建立了广义分层混合模糊系统, 并通过引入K–积分模概念研究了该系统的泛逼近性, 并借助文献[8]分层方法给出混合模糊系统的规则数计算公式, 但该公式仍然存在缩减幅度不显著的弱点. 然而, 文献[15–18]主要在非模糊系统环境下研究了一些模糊推理规则的提取算法和分类算法问题. 文献[19]通过递阶方法讨论了Mamdani模糊系统的逼近性能. 这些方法和

收稿日期: 2012−11−11; 收修改稿日期: 2013−02−26.
†通信作者. E-mail: tjwgj@126.com.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60974144).

结论虽说能有效地应用于大型系统的模糊控制, 但对如何避免规则爆炸并没有完全解决.

本文在文献[14]基础上, 基于文献[9–10]给出二叉树型分层方法重新引入混合推理规则, 并以此研究依二叉树型分层后广义混合模糊系统的输入输出表达式和推理规则总数计算公式. 最后, 通过实例分析了依二叉树型分层、其他分层和不分层时, 该系统推理规则总数得到大幅度的缩减.

2 二叉树型分层与混合推理规则(Binary tree-type hierarchy and hybrid inference rules)

文献[8]曾采用串联–叠加型分层方法得出推理规则计算公式为$(n-1)(2m+1)^c/(c-1)$, 其中: c为第1层输入变量个数, 该分层方法虽然可局部避免或缓解规则爆炸现象, 但其缩减规则库总数的幅度并不大, 这是因该公式是第1层维数c不宜选择接近n, 但这必将导致分层的层数加大, 会增加系统内部的复杂程度. 因此, 进一步探索新的分层方法来大幅度缩减规则库总数问题是十分必要的.

下面, 在文献[9]基础上, 首先引入二叉树型分层的具体方法: 假设给定一个系统(记为System)的输入变量为$x_1, x_2, \cdots, x_n$. 将n个输入变量依次两两组合作为第1层输出, 将此若干输出重新作为输入变量再依次两两组合作为第2层输出, 依次类推进行有限次重复, 亦即形成所谓二叉树型分层.

注 1 若n为偶数, 则第1层两两组合后无剩余, 特别当$n=2,4,\cdots,2^L$时, 每个分层都无剩余; 但若n为奇数, 则第1层最后变量x_n必为剩余, 此时, 只要随意添加一个0值输入分量与此配对, 并在以下继续分层过程中, 每层遇到输入总量是奇数时都按添加0值输入来处理. 如图1所示.

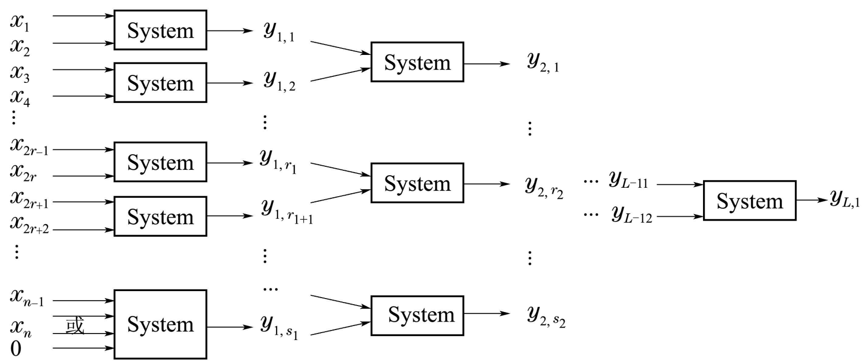

图 1 二叉树型分层方法

Fig. 1 The method of binary-tree-type hierarchy

第1步 x_1和x_2为第1层第1输入, 输出为$y_{1,1}$, x_3和x_4为第1层第2组输入, 输出为$y_{1,2},\cdots$. 依次类推, x_{n-3}和x_{n-2}为第1层第s_1-1组输入, 输出为y_{1,s_1-1}; x_{n-1}和x_n为第1层第s_1组输入, 输出为y_{1,s_1}. 故第1层有s_1个输出量$y_{1,1}, y_{1,2},\cdots,y_{1,s_1}$.

第2步 将$y_{1,1}$与$y_{1,2}$作为第2层第1组输入, 输出为$y_{2,1},\cdots$. 依次类推, 将y_{1,s_1-1}与y_{1,s_1}作为第2层第s_2组输入, 输出为y_{2,s_2}, 故第2层有s_2个输出量$y_{2,1}, y_{2,2},\cdots,y_{2,s_2}$. 按此方法, 进行第$k$步第$k$层时, 有$s_k$个输出量$y_{k,1},\cdots,y_{k,s_k}$, 最后$y_{L-1,1}$与$y_{L-1,2}$作为第$L$层两个输入变量输出$y_{L,1}$, 其中:

$$\begin{cases} s_1=\begin{cases}[n/2], & n\text{为偶数},\\ [n/2]+1, & n\text{为奇数},\end{cases}\\ s_2=\begin{cases}[s_1/2], & s_1\text{为偶数},\\ [s_1/2]+1, & s_1\text{为奇数},\end{cases}\\ \quad\vdots\\ s_k=\begin{cases}[s_{k-1}/2], & s_{k-1}\text{为偶数},\\ [s_{k-1}/2]+1, & s_{k-1}\text{为奇数}.\end{cases}\end{cases} \tag{1}$$

此外, y_{1,r_1}表示第1层第r_1个输出, y_{2,r_2}表示第2层第r_2个输出, 后边依此类推, 这里$r_1, r_2,\cdots$表示不同分层输入输出变量的序号(是变量). 下面, 若记$F_{\rm oc}(\mathbb{R})$为全体普通模糊数构成的集合, 首先对输入空间进行等距模糊剖分, 进而在相应的剖分空间上定义输入层的前件模糊集.

定义 1 设输入若干论域为$X_i=[-1,1]$, $i=1,2,\cdots,n$, 给定$m\in N$. 在每个论域X_i上做等距剖分:

$$-1=a_i^{-m}<a_i^{-m+1}<\cdots<a_i^{-1}<0<$$
$$a_i^1<\cdots<a_i^{m-1}<a_i^m=1,$$

分点为

$$a_i^j=\frac{j}{m},\ i=1,2,\cdots,n,\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm m.$$

若以每个分点a_i^j为峰点构造一族模糊数$\tilde{A}_i^j\in F_{\rm oc}(\mathbb{R})$, 则称该族模糊数$\{\tilde{A}_i^j|j=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm m\}$为$X_i$上一个等距模糊剖分.

若记$\aleph(n,m)=\{\tilde{A}_i^j|i=1,2,\cdots,n;\ j=0,\pm1,\cdots,\pm m\}$为$X_1, X_2,\cdots,X_n$上全体等距模糊剖分

构成的集合. 将$\tilde{A}_i^j \in \aleph(n,m)$作为第1层输入$x_i$的前件模糊集.

事实上, 第1层输出后得到$y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots, y_{1,s_1}$, 将此作为第2层输入, 记其对应论域为$Y_{1,1}, Y_{1,2}, \cdots, Y_{1,s_1}$. 此时, 按定义1可定义该论域另一组等距模糊剖分, 不妨记为$\Im(s_1,m)=\{\tilde{B}_{1,r_1}^{q_{1,r_1}}|r_1=1,2,\cdots,s_1; q_{1,r_1}=0,\pm1,\cdots,\pm m\}$. 并且$\tilde{B}_{1,1}^{q_{1,1}}, \tilde{B}_{1,2}^{q_{1,2}}, \cdots, \tilde{B}_{1,s_1}^{q_{1,s_1}} \in F_{\mathrm{oc}}(\mathbb{R})$作为第2层输入$y_{1,1}, y_{1,2}, \cdots, y_{1,s_1}$的前件模糊集.

同理, 第k层输入变量为$y_{k-1,1}, y_{k-1,2}, \cdots, y_{k-1,s_{k-1}}$按定义1, 仍可定义等距模糊剖分, 记为

$$\Im(s_{k-1},m)=\{\tilde{B}_{k-1,r_{k-1}}^{q_{k-1,r_{k-1}}}|k=2,3,\cdots,L;\ r_{k-1}=1,2,\cdots,s_{k-1};\ q_{k-1,r_{k-1}}=0,\pm1,\cdots,\pm m\},$$

且$\tilde{B}_{k-1,1}^{q_{k-1,1}}, \tilde{B}_{k-1,2}^{q_{k-1,2}}, \cdots, \tilde{B}_{k-1,s_{k-1}}^{q_{k-1,s_{k-1}}} \in F_{\mathrm{oc}}(\mathbb{R})$是第$k$层输入$y_{k-1,1}, y_{k-1,2}, \cdots, y_{k-1,s_{k-1}}$的前件模糊集.

参看图1, 在上述二叉树型分层意义下, 对任意可调节参数$\lambda \in [0,1]$及$\forall\alpha \geqslant 0$, 给出基于二叉树型混合模糊推理规则.

因每层每组输入输出规则相同, 为方便表示记x_{2r_1-1}表示第1层第$2r_1-1$个输入变量, 而$y_{k-1,r_{k-1}}$表示第k层第r_{k-1}个输入变量，故可用通项表示如下:

规则 1　若x_{2r_1-1}是$\tilde{A}_i^{p_i}$, x_{2r_1}是$\tilde{A}_{i+1}^{p_{i+1}}$, 则$y_{1,r_1}$是$\lambda\tilde{V}_{t(p_{2r_1-1},p_{2r_1},x_{2r_1-1},x_{2r_1})}+(1-\lambda)\tilde{U}_{r(p_{2r_1-1},p_{2r_1})}$, $i=1,3,\cdots,2s_1-1$;

规则 2　若y_{1,r_1}是$\tilde{B}_{1,r_1}^{q_{1,r_1}}$, y_{1,r_1+1}是$\tilde{B}_{1,r_1+1}^{q_{1,r_1+1}}$, 则$y_{2,r_2}$是

$$\lambda\tilde{V}_{t(q_{1,r_1},q_{1,r_1+1},y_{1,r_1},y_{1,r_1+1})}+(1-\lambda)\tilde{U}_{r(q_{1,r_1},q_{1,r_1+1})};\cdots.$$

规则 k　若$y_{k-1,r_{k-1}}$是$\tilde{B}_{k-1,r_{k-1}}^{q_{k-1,r_{k-1}}}$, $y_{k-1,r_{k-1}+1}$是$\tilde{B}_{k-1,r_{k-1}+1}^{q_{k-1,r_{k-1}+1}}$, 则$y_{k,r_k}$是

$$\lambda\tilde{V}_{t\,(q_{k-1,r_{k-1}},q_{k-1,r_{k-1}+1},y_{k-1,r_{k-1}},y_{k-1,r_{k-1}+1})}+(1-\lambda)\tilde{U}_{r(q_{k-1,r_{k-1}},q_{k-1,r_{k-1}+1})},$$
$$r_{k-1}=1,3,\cdots,2s_k-1;\ k=2,3,\cdots,L.$$

此外, $\forall\, p_1, p_2, \cdots, p_n, q_{1,1}, q_{1,2}, \cdots, q_{L-1,2} \in \{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm m\}$, 对给定输入变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 界定

$$H_{p_1,p_2,\cdots,p_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\tilde{A}_1^{p_1}(x_1)\ \tilde{A}_2^{p_2}(x_2)\cdots\tilde{A}_n^{p_n}(x_n),$$

且

$$H_{q_{k-1,r_{k-1}},q_{k-1,r_{k-1}+1}}(y_{k-1,r_{k-1}},y_{k-1,r_{k-1}+1})=\tilde{B}_{k-1,r_{k-1}}^{q_{k-1,r_{k-1}}}(y_{k-1,r_{k-1}})\tilde{B}_{k-1,r_{k-1}+1}^{q_{k-1,r_{k-1}+1}}(y_{k-1,r_{k-1}+1}).$$

上述若干符号表示及其解释详见文献[7,14].

注 2　当$\lambda=0$时, 输出采用Mamdani模糊系统的推理规则. 当$\lambda=1$时, 输出采用T–S模糊系统的推理规则. 因此, 该模糊系统随着的调节可成为实际应用中许多模糊系统的特例.

3　二叉树型分层系统的表示(Expressions of system based on binary tree-type hierarchy)

从数学观点来看, 模糊系统就是输入和输出之间的映射关系(一种插值器), 最常见的是Mamdani模糊系统和T–S模糊系统. 因在一般多输入单输出模糊系统规则库中, 规则数对输入变量n按指数变化, 规则总数为$(2m+1)^n$, 其增长速度十分迅猛, 故若实现一个多维模糊系统将十分困难, 甚至导致规则爆炸. 文献[14]已将Mamdani和T–S模糊系统统一起来引入广义混合模糊系统(2), 并采用文献[6]分层方法得到推理规则总数计算公式, 但遗憾的是该公式规则数缩减程度并不令人满意.

$$F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\sum\limits_{p_1,p_2,\cdots,p_n=-m}^{m}(H_{p_1,p_2,\cdots,p_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n))^{\alpha}\varphi(\lambda)}{\sum\limits_{p_1,p_2,\cdots,p_n=-m}^{m}(H_{p_1,p_2,\cdots,p_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n))^{\alpha}},\tag{2}$$

其中$\forall\lambda\in[0,1]$. 记

$$\varphi(\lambda)=(1-\lambda)\frac{br(p_1,p_2,\cdots p_n)}{Q_d(r)}+\lambda\sum_{i=0}^{n}b_{i;p_1,p_2,\cdots,p_n}x_i.$$

为了克服广义混合模糊系统(2)推理规则的不足, 再次引进二叉树型分层方法, 将高维混合模糊系统分解成若干低维模糊系统来处理. 并针对图1, 取该系统(System)为式(2), 经二叉树型分层后获得该系统(2)的输入输出(I/O)表达式如下(定理1). 为此, 首先给出重要引理1.

引理 1[6]　设$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\forall\, i,j,k_1,k_2\in\mathbb{N}$且$1\leqslant i<j<i+k_1+k_2\leqslant n$, 其中: $i+k_1=j$, $\forall\alpha>0$. 若令

$$M_1=\sum_{p_1,\cdots,p_{k_1}=-m}^{m}(H_{p_1,\cdots,p_{k_1}}(x_i,\cdots,x_{i+k_1}))^{\alpha},$$

$$M_2=\sum_{q_1,\cdots,q_{k_1}=-m}^{m}(H_{q_1,\cdots,q_{k_1}}(x_{j+1},\cdots,x_{j+k_2}))^{\alpha},$$

则有

$$M_1\cdot M_2=\sum_{p_1,\cdots,p_{k_1},p_{k_1+1},\cdots,p_{k_1+k_2}=-m}^{m}(H_{p_1,\cdots,p_{k_1},p_{k_1+1},\cdots,p_{k_1+k_2}}(x_{i+1},\cdots,x_{i+k_1+k_2}))^{\alpha}.$$

根据图1和系统(2), 得出基于二叉树型分层广义混合模糊系统的输入输出表示如下:

定理 1 针对广义混合模糊系统(2), 设初始输入变量为$x_1,x_2,\cdots,x_n$, 经二叉树型分层后中间若干输入或输出变量$y_{1,r_1},y_{2,r_2},\cdots,y_{k,r_k}$如图1所示. 对任意可调节参数$\lambda\in[0,1]$和$\forall\alpha\geqslant 0$. 若令

$$\begin{aligned}&X_{k,r_k}=(x_{(r_k-1)2^k+1},x_{(r_k-1)2^k+2},\cdots,x_{r_k 2^k}),\\&Y_{k,r_k}=(y_{k-1,2r_k-1},y_{k-1,2r_k},\cdots,\\&\qquad y_{1,(r_k-1)2^{k-1}+1},\cdots,y_{1,r_k 2^{k-1}}),\end{aligned}$$

则二叉树型分层广义混合模糊系统的输入输出可表为

$$\begin{cases}y_{1,r_1}=\\ \dfrac{\sum\limits_{p_{2r_1-1},p_{2r_1}=-m}^{m}(H_{p_{2r_1-1},p_{2r_1}}(x_{2r_1-1},x_{2r_1}))^{\alpha}\varDelta_1^{r_1}}{\sum\limits_{p_{2r_1-1},p_{2r_1}=-m}^{m}(H_{p_{2r_1-1},p_{2r_1}}(x_{2r_1-1},x_{2r_1}))^{\alpha}},\\ y_{k,r_k}=\\ \dfrac{\sum\limits_{Q_{k,r_k},P_{k,r_k}=-m}^{m}(H_{Q_{k,r_k},P_{k,r_k}}(X_{k,r_k},Y_{k,r_k}))^{\alpha}\varDelta_k^{r_k}}{\sum\limits_{Q_{k,r_k},P_{k,r_k}=-m}^{m}(H_{Q_{k,r_k},P_{k,r_k}}(X_{k,r_k},Y_{k,r_k}))^{\alpha}},\end{cases}\tag{3}$$

其中$\forall\lambda\in[0,1]$, 约记

$$\begin{aligned}&\varDelta_1^{r_1}=\lambda(b_{2r_1-1}^1x_{2r_1-1}+b_{2r_1}^1x_{2r_1})+(1-\lambda)S_{1,r_1},\\&\varDelta_k^{r_k}=\lambda(b_{k-1,r_{k-1}}^k\varDelta_{k-1}^{r_{k-1}}+b_{k-1,r_{k-1}+1}^k\varDelta_{k-1}^{r_{k-1}+1})+\\&\qquad(1-\lambda)S_{k,r_k},\end{aligned}$$

简记

$$\begin{aligned}&P_{k,r_k}=(p_{(r_k-1)2^k+1},p_{(r_k-1)2^k+2},\cdots,p_{r_k 2^k}),\\&Q_{k,r_k}=(q_{k-1,2r_k-1},q_{k-1,2r_k},\cdots,\\&\qquad q_{1,(r_k-1)2^{k-1}+1},\cdots,q_{1,r_k 2^{k-1}}),\\&r_{k-1}=1,3,\cdots,2s_k-1,\ k=2,3,\cdots,L,\end{aligned}$$

其中: $b_{2r_1}^1$ 表示第1层第$2r_1$个输入变量x_{2r_1}的可调参数, $b_{k-1,r_{k-1}}^k$ 表示第k层第r_{k-1}个输入变量$y_{k-1,r_{k-1}}$的可调参数. 注意这里P_{k,r_k},Q_{k,r_k}并不表示向量, 只是一个形式记法, 下同.

证 依据本文引入的二叉树型分层方法, 显然, 该广义混合模糊系统的输入第1层第r_1和r_1+1个输出表达式分别为

$$y_{1,r_1}=\frac{\sum\limits_{p_{2r_1-1},p_{2r_1}=-m}^{m}(H_{p_{2r_1-1},p_{2r_1}}(x_{2r_1-1},x_{2r_1}))^{\alpha}\varDelta_1^{r_1}}{\sum\limits_{p_{2r_1-1},p_{2r_1}=-m}^{m}(H_{p_{2r_1-1},p_{2r_1}}(x_{2r_1-1},x_{2r_1}))^{\alpha}},$$

$$y_{1,r_1+1}=\frac{\sum\limits_{p_{2r_1+1},p_{2r_1+2}=-m}^{m}(H_{p_{2r_1+1},p_{2r_1+2}}(x_{2r_1+1},x_{2r_1+2}))^{\alpha}\varDelta_1^{r_1+1}}{\sum\limits_{p_{2r_1+1},p_{2r_1+2}=-m}^{m}(H_{p_{2r_1+1},p_{2r_1+2}}(x_{2r_1+1},x_{2r_1+2}))^{\alpha}}.$$

当$k=2$时($k=1$没分层), 由混合推理规则知, 第2层第r_2个输入输出的迭代形式表为

$$y_{2,r_2}=\frac{\sum\limits_{q_{1,r_1},q_{1,r_1+1}=m}^{m}(H_{q_{1,r_1},q_{1,r_1+1}}(y_{1,r_1},y_{1,r_1+1}))^{\alpha}\psi_2(y_{1,r_1})}{\sum\limits_{q_{1,r_1},q_{1,r_1+1}=-m}^{m}H_{q_{1,r_1},q_{1,r_1+1}}(y_{1,r_1},y_{1,r_1+1})^{\alpha}}.$$

这里

$$\begin{aligned}\psi_2(y_{1,r_1})=&\lambda(b_{1,r_1}^2y_{1,r_1}+b_{1,r_1+1}^2y_{1,r_1+1})+\\&(1-\lambda)S_{2,r_2}.\end{aligned}$$

此时, 若将y_{1,r_1},y_{1,r_1+1}代入, 并由引理1和H的定义, 获得上式中的

$$b_{1,r_1}^2y_{1,r_1}+b_{1,r_1+1}^2y_{1,r_1}+1=$$

$$\lambda b_{1,r_1+1}^2\frac{\sum\limits_{p_{2r_1-1},p_{2r_1},p_{2r_1+1},p_{2sr_1+2}=-m}^{m}(\tilde{A}_1^{p_{2r_1-1}}(x_{2r_1-1})}{\sum\limits_{p_{2r_1-1},p_{2r_1},p_{2r_1+1},p_{2sr_1+2}=-m}^{m}(\tilde{A}_1^{p_{2r_1-1}}(x_{2r_1-1})}\cdot$$

$$\frac{\widetilde{A}_1^{p_{2r_1}}(x_{2r_1})\widetilde{A}_1^{p_{2r_1+1}}(x_{2r_1+1})\widetilde{A}_1^{p_{2r_1+2}}(x_{2r_1+2}))^{\alpha}\varphi_1(\lambda)}{\widetilde{A}_1^{p_{2r_1}}(x_{2r_1})\widetilde{A}_1^{p_{2r_1+1}}(x_{2r_1+1})\widetilde{A}_1^{p_{2r_1+2}}(x_{2r_1+2}))^{\alpha}},$$

其中:

$$\begin{aligned}&\varphi_1(\lambda)=\\&b_{1,r_1}^2[\lambda(b_{2r_1-1}^1x_{2r_1-1}+b_{2r_1}^1x_{2r_1})+(1-\lambda)S_{1,r_1}]+\\&b_{1,r_1+1}^2[\lambda(b_{2r_1+1}^1x_{2r_1+1}+b_{2r_1+2}^1x_{2r_1+2})+\\&(1-\lambda)S_{1,r_1+1}]=b_{1,r_1}^2\varDelta_1^{r_1}+b_{1,r_1+1}^2\varDelta_1^{r_1+1}.\end{aligned}$$

若记

$$\begin{aligned}&H_{Q_{2,r_2},P_{2,r_2}}(X_{2,r_2},Y_{2,r_2})=\\&\tilde{A}_1^{p_{2r_1-1}}(x_{2r_1-1})\tilde{A}_1^{p_{2r_1}}(x_{2r_1})\tilde{A}_1^{p_{2r_1+1}}(x_{2r_1+1})\cdot\\&\tilde{A}_1^{p_{2r_1+2}}(x_{2r_1+2})\tilde{B}_{1,r_1}^{q_{1,r_1}}(y_{1,r_1})\tilde{B}_{1,r_1+1}^{q_{1,r_1+1}}(y_{1,r_1+1}),\\&Q_{2,r_2}=(q_{1,r_1},q_{1,r_1+1}),\\&P_{2,r_2}=(p_{2r_1-1},p_{2r_1},p_{2r_1+1},p_{2r_1+2}),\\&X_{2,r_2}=(x_{2r_1-1},x_{2r_1},x_{2r_1+1},x_{2r_1+2}),\\&Y_{2,r_2}=(y_{1,r_1},y_{1,r_1+1}),\end{aligned}$$

再次应用引理1和H的定义, 立即获得

$$y_{2,r_2}=\frac{\sum\limits_{Q_{2,r_2},P_{2,r_2}=-m}^{m}H_{Q_{2,r_2},P_{2,r_2}}(X_{2,r_2},Y_{2,r_2})^{\alpha}\varphi_2(\lambda)}{\sum\limits_{Q_{2,r_2},P_{2,r_2}=-m}^{m}H_{Q_{2,r_2},P_{2,r_2}}(X_{2,r_2},Y_{2,r_2})^{\alpha}},$$

其中

$$\varphi_2(\lambda)=\lambda(b_{1,}^2\Delta_1^{r_1}+b_{1,r_1+1}^2\Delta_1^{r_1+1})+(1-\lambda)S_{2,r_2},$$

亦即, 当$k=2$时式(3)成立. 下面假设$k=L-1$时式(3)成立, 往证$k=L$时式(3)仍成立.

事实上, 当$k=L-1$时, 由题设条件知

$$y_{L-1,1}=\frac{\sum\limits_{Q_{L-1,1},P_{L-1,1}=-m}^{m}H_{Q_{L-1,1},P_{L-1,1}}(X_{L-1,1},Y_{L-1,1})^{\alpha}\varphi_3(\lambda)}{\sum\limits_{Q_{L-1,1},P_{L-1,1}=-m}^{m}H_{Q_{L-1,1},P_{L-1,1}}(X_{L-1,1},Y_{L-1,1})^{\alpha}},$$

$$y_{L-1,2}=\frac{\sum\limits_{Q_{L-1,2},P_{L-1,2}=-m}^{m}H_{Q_{L-1,2},P_{L-1,2}}(X_{L-1,2},Y_{L-1,2})^{\alpha}\varphi_4(\lambda)}{\sum\limits_{Q_{L-1,2},P_{L-1,2}=-m}^{m}H_{Q_{L-1,2},P_{L-1,2}}(X_{L-1,2},Y_{L-1,2})^{\alpha}},$$

其中:

$$\varphi_3(\lambda)=\lambda(b_{L-2,1}^{L-1}\Delta_{L-2}^1+b_{L-2,2}^{L-1}\Delta_{L-2}^2)+(1-\lambda)S_{L-1,1},$$

$$\varphi_4(\lambda)=\lambda(b_{L-2,3}^{L-1}\Delta_{L-2}^3+b_{L-2,4}^{L-1}\Delta_{L-2}^4)+(1-\lambda)S_{L-1,2}.$$

则由式(2), 显然有

$$y_{L,1}=\frac{\sum\limits_{q_{L-1,1},q_{L-1,2}=-m}^{m}H_{q_{L-1,1},q_{L-1,2}}(y_{L-1,1},y_{L-1,2})^{\alpha}\varphi_5(\lambda)}{\sum\limits_{q_{L-1,1},q_{L-1,2}=-m}^{m}H_{q_{L-1,1},q_{L-1,2}}(y_{L-1,1},y_{L-1,2})^{\alpha}},$$

其中

$$\varphi_5(\lambda)=\lambda(b_{L-1,1}^{L}y_{L-1,1}+b_{L-1,2}^{L}y_{L-1,2})+(1-\lambda)S_{L-1,1}.$$

将$y_{L-1,1},y_{L-1,2}$表达式代入上式, 并令

$$H_{Q_{L,1},P_{L,1}}(X_{L,1},Y_{L,1})=\tilde{A}(x_1)\tilde{A}(x_2)\cdots\tilde{A}(x_{2^L})\tilde{B}(y_{L-1,1})\tilde{B}(y_{L-1,2})\cdots\tilde{B}(y_{1,1})\cdots\tilde{B}(y_{1,2^{L-1}}),$$

其中:

$$P_{L,1}=(p_1,p_2,\cdots,p_{2^L}),$$

$$Q_{L,1}=(q_{L-1,1}q_{L-1,2}\cdots q_{1,1}\cdots q_{1,2^{L-1}}),$$

$$X_{L,1}=(x_1,x_2,\cdots,x_{2^L}),$$

$$Y_{L,1}=(y_{L-1,1},y_{L-1,2},\cdots,y_{1,1},\cdots,y_{1,2^{L-1}}).$$

应用引理1和H的定义, 仿照前边$k=2$类似的证明方法, 立即可获得

$$y_{L,1}=\frac{\sum\limits_{Q_{L,1},P_{L,1}=-m}^{m}H_{Q_{L,1},P_{L,1}}(X_{L,1},Y_{L,1})^{\alpha}\varphi_6(\lambda)}{\sum\limits_{Q_{L,1},P_{L,1}=-m}^{m}H_{Q_{L,1},P_{L,1}}(X_{L,1},Y_{L,1})^{\alpha}},$$

其中

$$\varphi_6(\lambda)=(1-\lambda)S_{L,1}+\lambda(b_{L-1,1}^{L}\Delta_{L-1}^1+b_{L-1,2}^{L}\Delta_{L-1}^2),$$

因此, 由数学归纳法知, 该定理所给二叉树型分层广义混合模糊系统的输入输出表示正确.

注 3　由定理1明显看出: 当$\lambda=0$时, 该系统退化为二叉树型分层Mamdani模糊系统; 当$\lambda=1$时, 该系统退化为二叉树型分层T–S模糊系统. 此时, 若$\alpha=1$, 则式(3)为基于重心法的模糊系统; 若$\alpha=\infty$, 则式(3)为最大平均法的模糊系统; 若$\alpha=0$, 则式(3)为加权法的模糊系统. 因此, 该二叉树型分层广义混合模糊系统不仅是分层Mamdani和分层T–S模糊系统的推广, 而且随着调节参数λ和实数α的变化可表示更广义复杂的模糊系统, 从而也扩大了广义模糊系统实际应用背景.

4 推理规则数的缩减(Reduction of the total number of inference rules)

下面将讨论本文的核心问题: 如何缩减模糊推理规则总数? 事实上, 在一般模糊系统的完备规则库中, 模糊推理规则将覆盖前件模糊集$\tilde{A}_i^j(i=1,2,\cdots,n;\ j=0,\pm1,\cdots,\pm m)$所有可能的组合. 刘普寅教授曾在文献[8]指出: 广义模糊系统中模糊规则数是关于输入变量个数n而呈指数函数变化, 其推理规则总数为$(2m+1)^n$(m表示剖分输入空间的份数). 事实上, 一旦维数n较大时, 例如: 取$n=6,\ m=20$, 则推理规则总数将达到4750104241条, 这给系统内部造成极其庞大的运算量, 亦即, 容易出现规则爆炸现象. 然而, 按本文二叉树型混合模糊推理规则和定理1, 并结合二叉树型分层示意图1, 不难获得如下基于二叉树型分层的广义混合模糊系统推理规则总数计算公式.

定理 2　针对一个基于二叉树型分层的广义混合模糊系统,设输入变量为$x_1,x_2,\cdots,x_n$, 给定$m\in\mathbb{N}$, 若剖分$\tilde{A}_i^j\in\aleph(n,m)$作为第1层输入$x_i$的前件模糊集, 其中$i=1,2,\cdots,n;\ j=0,\pm1,\cdots,\pm m$. 如图1和式(1)所示, 若系统被分为$L$层, 且第$k$层的输入变量个数为$s_k$, 则该系统所对应的模糊规则总数为$e=(2m+1)^2\sum\limits_{k=1}^{L}s_k$.

证　设第1层至第L层推理规则总数分别为$e_1,e_2,\cdots,e_{L-1},e_L$. 由图1和式(1)容易看出

$$e_1 = s_1(2m+1)^2,\ e_2 = s_2(2m+1)^2, \cdots,$$
$$e_{L-1} = s_{L-1}(2m+1)^2,\ e_L = s_L(2m+1)^2,$$

其中: s_k按式(1)所示, m是对应定义1中等距模糊剖分的份数. 故该系统模糊规则总数为

$$e = s_1(2m+1)^2 + s_2(2m+1)^2 + \cdots + s_{L-1}(2m+1)^2 + s_L(2m+1)^2 = (2m+1)^2 \sum_{k=1}^{L} s_k.$$

推论 1 在定理2条件下, 当$n = 2, 4, \cdots, 2^k$时, 则推理规则总数为$e = (2m+1)^2(2^k-1)$.

证 设输入变量为$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 参看图1.

显然, 当$n = 2, 4, \cdots, 2^k$时, 该系统输入变量经二叉树型分层后分为$L = k$层, 其中每层输入变量两两组合后恰好无剩余. 此时, 由式(1)立即获得

$$s_1 = 2^{k-1},\ s_2 = 2^{k-2}, \cdots,$$
$$s_i = 2^{k-i}, \cdots,\ s_k = 2^{k-k} = 2^0 = 1.$$

由定理2, 经二叉树型分层后, 其推理规则总数为

$$e = (2m+1)^2 \sum_{i=1}^{k} s_i = (2m+1)^2(2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^0) = (2m+1)^2(2^k-1).$$

此外, 由定理2和推论1, 不难看出分层后广义混合模糊系统的推理规则总数由指数函数的形式$(2m+1)^n$变为$(2m+1)^2 \sum_{i=1}^{L} s_i$或$(2m+1)^2(2^k-1)$, 这里$L$和$k$是分层后层数(一般不会很大).

下面, 针对给定的广义混合模糊系统, 在结合图1和定理2假设条件下, 通过采用二叉树型分层和不分层的推理规则总数进行比较和分析, 获得规则总数计算公式见表1.

表 1 规则总数对比

Table 1 Comparison of total of inference rules

输入变量	二叉树型分层数	分层后推理规则总数	未分层规则总数
$n=3,4$	$L=2$	$3(2m+1)^2$	$(2m+1)^3$或$(2m+1)^4$
$n=5,6$	$L=3$	$6(2m+1)^2$	$(2m+1)^5$或$(2m+1)^6$
$n=7,8$	$L=3$	$7(2m+1)^2$	$(2m+1)^7$或$(2m+1)^8$
$n=9,10$	$L=4$	$15(2m+1)^2$	$(2m+1)^9$或$(2m+1)^{10}$

从表1容易看出, 若采用二叉树型分层方法, 当随着输入变量n渐增大时, 所分层数和对应的推理规则总数将保持缓慢且平稳增长, 这不仅大大缩减了推理规则总数, 从而也避免了出现规则爆炸现象.

例如, 若选取输入变量数$n = 5$, 令剖分数$m = 10$. 一方面, 按二叉树型分层方法可分3层, 并容易获得示意图2, 其推理规则总数为$6(2\cdot10+1)^2 = 2646$; 此时, 若按LIU[8]给出的分层方法, 其推理规则总数为$2(2\cdot10+1)^3 = 18522$. 另一方面, 若在不分层情况下, 推理规则数关于n呈指数形式迅速增加, 其规则总数将达到$(2\cdot10+1)^5 = 4084101$, 一跃猛翻到220.5或1543.5倍. 因此, 按二叉树型分层方法, 其规则总数缩减幅度是非常巨大的.

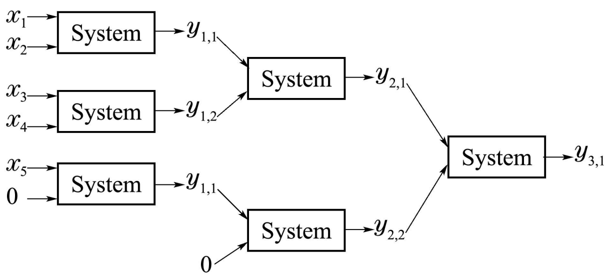

图 2 $n = 5$ 时二叉树型分层方法

Fig. 2 Method of binary-tree-type when $n = 5$

此外, 从定理2公式中不难发现, 规则总数不仅与分层有关, 而且还与对应的等距模糊剖分的份数m取值有关. 下面, 随机选取m 值来比较和分析分层后和不分层其规则总数变化规律.

在图3–6中, 纵坐标单位E表示科学计数法, 例如, $1.2\text{E}+5 = 1.2\times10^5$; $1.4\text{E}+40 = 1.4\times10^{40}$. 从图3明显看出, 当$m = 50$时, 若采用二叉树型分层, 则其规则总数变化是呈散点形式缓慢平稳增加; 此时, 从图4得知其规则总数按散点形式迅猛增加, 亦即, 不分层的规则总数增长速度远远大于分层后的增长速度. 另外, 图5和图6分别是当$m = 100$时分层后与不分层的规则总数变化的散点图. 相对$m = 50$时情形, 分层后的总数较之前增长了五倍左右, 而不分层的总数较之前增长了10万倍. 通过比较和分析不难发现依赖于二叉树型分层的广义混合系统可大幅度缩减规则总数, 更能有效地避免规则爆炸.

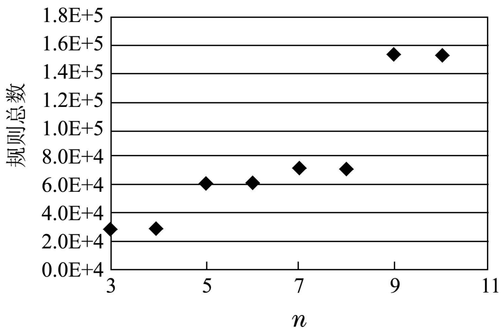

图 3 $m = 50$ 时分层系统规则总数

Fig. 3 Total rules of hierarchy system when $m = 50$

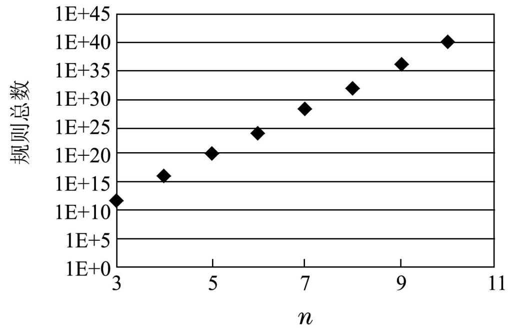

图 4　$m = 50$ 时不分层系统规则总数

Fig. 4　Total rules of non-hierarchy system when $m = 50$

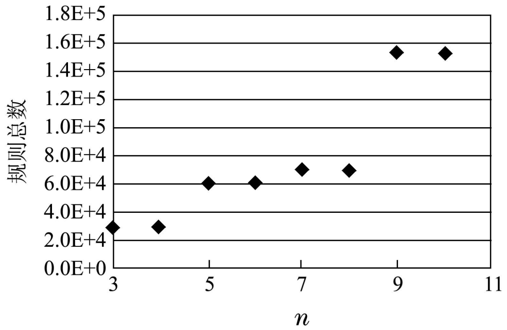

图 5　$m = 100$ 时分层系统规则总数

Fig. 5　Total rules of hierarchy system when $m = 100$

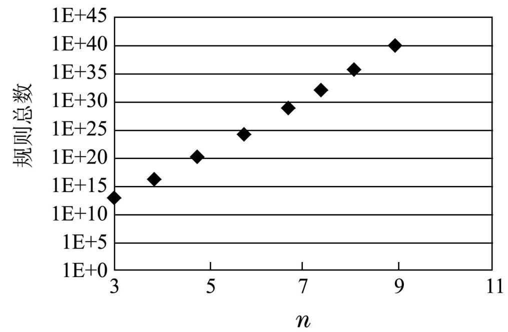

图 6　$m = 100$ 时不分层系统规则总数

Fig. 6　Total rules of non-hierarchy system when $m = 100$

5　结论(Conclusions)

本文采用二叉树型方法对广义混合模糊系统的输入变量采取改进分层, 依赖混合推理规则获得广义混合模糊系统的输入输出表示. 此外，应用二叉树型分层有效地获得分层后系统的推理规则总数计算公式. 结果显示, 在输入变量个数n和剖分份数m取值相同情况下, 两种规则总数的变化速度有显著差别, 亦即, 分层后规则总数增长速度远远小于不分层规则总数增长速度, 换言之, 前者缓慢平稳递增, 后者迅速急剧递增. 事实上, 规则总数剧增除了和输入变量个数有密切关系外, 也和输入形式和过程有关, 分层的思想就是避免一次性输入而采取分组分批式的输入. 因为通常系统内部存在诸多无关的虚规则, 如何把这些虚规则排除或过滤掉是关键; 另外, 系统内部推理规则总数越少, 执行运算速度就越快, 耗费资源也就越少. 因此, 如何大幅度缩减模糊推理规则总数是能否更有效地解决大型系统模糊控制的一个重要问题. 然而, 本文提出这种广义混合模糊系统经过二叉树型分层后是否还与原系统具有等效性? 以及该系统经分层后是否还对连续函数或可积函数类构成逼近器? 这是下一步将要继续探究且不可回避的问题.

参考文献(References):

[1] RAJU G V S, ZHOU J, KISNER R A. Hierarchical fuzzy control [J]. *International Journal of Control*, 1991, 54(5): 1201 – 1216.

[2] RAJU G V S, ZHOU J. Adaptive hierarchical fuzzy controller [J]. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, 1993, 23(4): 973 – 980.

[3] WANG L X. Universal approximation by hierarchical fuzzy systems [J]. *Fuzzy Set and Systems*, 1998, 93(1): 223 – 230.

[4] WANG L X. Analysis and design of hierarchical fuzzy systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999, 7(5): 617 – 624.

[5] CHEN W, WANG L X. A note on universal approxima-tion by hierarchical fuzzy systems [J]. *Information Sciences*, 2000, 123(3): 241 – 248.

[6] 刘普寅, 李洪兴. 广义模糊系统对于可积函数的逼近性 [J]. 中国科学(E辑), 2000, 30(5): 413 – 423.
(LIU Puyin, LI Hongxing. Approximation of generalized fuzzy systems to integrable functions [J]. *Science in China Series E*, 2000, 30(5): 413 – 423.)

[7] LIU P Y, LI H X. Equivalence of generalized Takagi-Sugeno fuzzy system and its hierarchical systems [J]. *Beijing Normal University*, 2000, 36(5): 612 – 618.

[8] LIU P Y, LI H X. Hierarchical T–S fuzzy system and its universal approximation [J]. *Information Sciences*, 2005, 169(3): 279 – 303.

[9] 杜新宇, 张乃尧. 二叉树型分层模糊系统的等效性分析 [J]. 清华大学学报(自然版), 2004, 44(7): 33 – 36.
(DU Xinyu, ZHANG Naiyao. Equivalence analysis of binary – tree – type hierarchical fuzzy system [J]. *Journal of Tsinghua University (Nature Science)*, 2004, 44(7): 33 – 36.)

[10] 张香燕, 张乃尧. 一般二叉树型分层模糊系统的通用逼近性 [J]. 清华大学学报(自然版), 2007, 47(1): 37 – 41.
(ZHANG Xiangyan, ZHANG Naiyao. Universal approxi-mation of general binary-tree-type hierarchical fuzzy systems [J]. *Journal of Tsinghua University*, 2007, 47(1): 37 – 41.)

[11] SANTIAGO A F, CARLOS A L. Matrix modeling of hierarchical fuzzy systems [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2008, 16(3): 585 – 599.

[12] MOON G J, THOMAS S. A method of converting a fuzzy system to a two-layered hierarchical fuzzy system and its run-time efficiency [J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, 17(1): 93 – 103.

[13] VASSILIS S K, YANNIS A P. On the monotonicity of hierarchical sum-product fuzzy systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2009, 160(24): 3530 – 3538.

[14] 王贵君, 段晨霞. 广义分层混合模糊系统及其泛逼近性 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(5): 673 – 680.
(WANG Guijun, DUAN Chenxia. Generalized hierarchical hybrid fuzzy systems and their universal approximation [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(5): 673 – 680.)

[15] 贺勇, 诸克军. 一种基于精简的模糊规则库的分类算法 [J]. 计算机应用研究, 2007, 24(2): 24 – 26.
(HE Yong, ZHU Kejun. Classification algorithm based on simplif ied fuzzy rules base [J]. *Application Research of Computers*, 2007, 24(2): 24 – 26.)

[16] 陈铁明, 龚荣盛. 一种新的快速模糊规则提取方法 [J]. 控制与决策, 2008, 23(9): 1015 – 1020.
(CHEN Tieming, GONG Rongsheng. A novel and quick fuzzy rule extraction method [J]. *Control and Decision*, 2008, 23(9): 1015 – 1020.)

[17] 王永富, 王殿辉, 柴天佑. 一个具有完备性和鲁棒性的模糊规则提取算法 [J]. 自动化学报, 2010, 36(9): 1337 – 1342.
(WANG Yongfu, WANG Dianhui, CHAI Tianyou. Extraction of fuzzy rules with completeness and robustness [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(9): 1337 – 1342.)

[18] 张稳, 张桂戎. 改进的基于规则的逆向模糊推理算法 [J]. 通信学报, 2008, 29(2): 101 – 105.
(ZHANG Wen, ZHANG Guirong. Improved rule-based backward fuzzy reasoning algorithm [J]. *Journal on Communications*, 2008, 29(2): 101 – 105.)

[19] 张宇卓, 李洪兴. 广义递阶Mamdani模糊系统及其泛逼近性 [J]. 控制理论与应用, 2006, 23(3): 449 – 454.
(ZHANG Yuzhuo, LI Hongxing. Generalized hierarchical Mamdani fuzzy systems and their universal approximation [J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(3): 449 – 454.)

作者简介:

杨 阳 (1989–), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为模糊系统分析与模糊神经网络, E-mail: yangyang19890310@126.com;

王贵君 (1962–), 男, 教授, 主要研究方向为模糊神经网络、模糊系统分析、模糊测度与模糊积分, E-mail: tjwgj@126.com;

杨永强 (1988 –), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为模糊系统分析与模糊神经网络, E-mail: 510176215@qq.com.