

具有乘性噪声的线性离散时间随机控制系统综述

刘光明, 苏为洲[†]

(华南理工大学 自动化科学与工程学院; 自主系统与网络控制教育部重点实验室, 广东 广州 510640)

摘要: 具有乘性噪声的随机不确定系统的控制问题有着广泛的应用背景. 本文概述了具有乘性噪声的线性离散时间随机系统的稳定性分析、均方镇定、最优控制以及最优估计问题和相关结论. 同时, 本文研究了具有状态与控制乘性噪声的线性多变量离散时间系统的均方镇定和最优控制问题, 分析了这两个问题之间的联系, 并讨论了最优状态反馈控制器的设计算法.

关键词: 线性离散时间随机系统; 乘性噪声; 均方镇定; 随机最优控制; 最优估计

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Survey of linear discrete-time stochastic control systems with multiplicative noises

LIU Guang-ming, SU Wei-zhou[†]

(Autonomous System and Networked Control Lab; School of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The stochastic control for uncertain systems with multiplicative noises has been finding its applications in many fields. This paper reviews in a systematic manner several recent results on stability analysis, mean-square stabilization, optimal control and estimation for linear discrete-time stochastic uncertain systems with multiplicative noises. For some problems, we pose some new viewpoints and clarify the intrinsic relation between them. Besides, state feedback design algorithms are investigated.

Key words: linear discrete-time stochastic systems; multiplicative noises; mean-square stabilization; stochastic optimal control; optimal estimation

1 引言(Introduction)

具有乘性噪声的线性随机系统在航天、机械、化学反应、经济等领域中有着广泛的应用背景^[1-5]. 在过去的40多年, 具有乘性噪声系统的控制问题吸引了大量研究人员的研究兴趣. 相关研究工作已获得了丰硕的成果. 在最近蓬勃发展的网络化控制系统中, 乘性噪声模型为描述信道特征例如丢包^[6-15]、量化误差^[16-22]、具有信噪比和带宽受限的约束等方面提供了一种有效的途径. 因此, 具有乘性噪声的控制问题再次成为了研究热点. 本文回顾和整理了有关乘性噪声系统控制问题的现有结果, 而且针对一些研究课题提出不同的观点和新的结果.

本文主要关心具有乘性噪声的线性随机系统的稳定性分析、均方镇定、最优控制和估计问题. 关于稳定性问题的研究可追溯至20世纪60年代. 1969年, Kleinman^[23] 和McLane^[24] 分别得到了具有状态乘性噪声的连续时间线性随机系统稳定的充分必要条件.

不同之处在于, 前者研究的是在概率1意义下的稳定性, 而后者研究的是渐近均方意义下的稳定性. 更早的研究可参考专著^[25]和综述性文献^[26]. 在1971年, Willems和Blankenship^[27]在频域中给出了具有乘性噪声的单输入单输出(SISO)线性随机系统均方稳定的充分必要条件. Lu和Skelton^[28]则进一步给出了具有乘性噪声的多输入多输出(MIMO)线性随机系统均方稳定的充分必要条件. 具有乘性噪声的线性随机系统镇定问题的研究可追溯到20世纪六七十年代. 文献^[29]讨论了具有状态乘性噪声系统的可镇定性和状态反馈设计问题. 相应的镇定控制器可通过求解一个广义黎卡提方程(MARE)得到. 与标准黎卡提方程相比, 上述MARE有一组由噪声方差决定的非标准参数. 当噪声方差为零时, MARE退化为标准黎卡提方程. 文献^[29-35]讨论了具有随机参数的连续和离散时间线性随机系统的均方镇定问题, 并提出了各种不同的均方可镇定条件. 在文献^[36]中, Boyd和Ghaoui等讨

论了具有乘性噪声的随机线性系统的稳定裕量,并利用线性矩阵不等式(LMI)的可解性来刻画均方可镇定性;进而证明了以最大稳定裕量为设计目标的状态反馈设计是一个广义特征值问题(GEVP).在更一般的随机稳定性意义下,文献[37-42]则讨论了一类具有乘性噪声的连续时间随机线性系统的 p 阶矩稳定.在文献[43-44]中,Zhang和Chen等研究了连续时间随机系统的可镇定和随机能观、可检测性,并且推广了确定性系统相应的判定准则到随机的情形.同样的技术可用于研究一类区间稳定和镇定问题^[45].更多的随机稳定性分析可参阅文献[46-49].

针对网络化系统中的信道不确定性,Elia^[7]利用乘性噪声模型讨论了这类系统的镇定问题.Xiao等^[9]针对具有丢包的网络化反馈系统给出了状态反馈情形下多输入系统的均方可镇定性与控制输入信道的信噪比(或信道容量)之间的关系.You和Xie等^[10-11]研究了具有有限级数量化和丢包的离散线性时不变(LTI)系统的均方镇定问题.Sinopoli和Schenato等^[6]运用乘性噪声模型研究了具有丢包情况下的卡尔曼滤波问题,并提出了基于广义黎卡提方程的设计方法.利用文献[6]中所提到的间歇观测技术,Zhang等^[12]提出了一类性能折衷的次优估计器.运用测量重组技术,Zhang等^[50]还考虑了一类具有随机测量时延的线性估计问题.根据不同的网络传输协议,Schenato等^[8]则综合考虑了一类具有有损信道的控制和估计问题.更多的具有丢包或量化的离散时间随机系统的状态估计问题请参考文献[12-14,16].最近,文献[17-21]运用乘性噪声对量化误差进行了建模,并利用输出反馈控制器研究了线性离散系统的最优镇定设计和最优跟踪问题.

自20世纪60年代末期以来,许多文献^[1,51-74]广泛而深入地研究了具有乘性噪声的线性随机系统的最优控制问题,该问题一般是基于二次性能指标的线性二次调节器(LQR)最优设计.在工程问题中,二次性能指标中的权衡矩阵 R , Q 通常分别被选为正定和半正定阵.最优反馈控制器增益阵的设计通常依赖于一个广义代数黎卡提方程的正定或半正定解.文献[51]利用一些例子说明:上述最优控制器不一定能保证闭环系统的稳定性.之后,不少学者(如文献[44,57])对上述最优控制器的存在性条件做了深入地研究,并且依据系统能观性给出了更一般的结果.最近,笔者在文献[75]中证明了以下结论:对于具有乘性噪声的线性随机系统来说,最优状态反馈阵设计是GEVP问题.其核心问题是对一组关联的黎卡提方程求出最优解,由此笔者运用LMI技术刻画了上述最优解存在性.另外,文献[63-66,73-74]运用LMI技术及半定规范化方法研究了一类MARE解的特征,并指出:1)若系统是均方可镇定的,且相应的半定规范化问题是可解的,那么

MARE一定有一个最大解,而且该解一般对应LQR最优控制器;2)若MARE存在反馈镇定解,那么该解一定是唯一的最大解.Elia^[7]和Sinopoli等^[6]运用乘性噪声模型讨论了网络化系统的最优控制问题.

H_∞ 控制是一种有效的鲁棒控制设计方法,被广泛应用于不确定系统的反馈设计.通过定义输入-输出算子的 L_2 诱导范数,文献[76-80]研究了具有乘性噪声的线性随机 H_∞ 控制问题,其中Bouhtouri等人^[76]得到了离散时间版本的随机有界实引理.对于控制工程而言, H_2 性能同样是重要的设计指标,因此,这就要求利用混合 H_2/H_∞ 控制来解决 H_2 和 H_∞ 性能之间的合理折衷^[81-86].利用Nash对策理论,Chen和Zhang^[82]研究了具有乘性噪声的连续时间线性随机系统的混合 H_2/H_∞ 控制问题,并且给出了一对耦合代数黎卡提方程(ARE)的解存在的充分必要条件.

上面所涉及的文献主要关心线性随机系统,对于具有乘性噪声的非线性随机系统,可以参阅文献[87-91]及其中的参考文献.

为避免技术上的复杂性,更主要的是为了提供一个统一的架构,本文限制所呈现的系统主要是具有乘性噪声的线性随机系统,而且尽量采用统一的术语和符号.因此本文中出现的引理或定理有时会不同于原文献所述,但这不会影响对问题的认识与理解.

本文剩余的部分安排如下:第2部分给出一些基本概念以及相关问题的数学描述.第3部分回顾一系列关于具有乘性噪声的随机系统均方稳定和镇定的结果.在第4部分,本文将讨论基于各种性能指标优化设计的最优控制及估计问题,并就相应问题给出其主要结论.在以上部分中,本文针对一些问题提出一些不同的观点并发展相应的结论.最后给出了总结及展望.

下面给出一些本文将要出现的符号: \mathbb{R}^k 表示具有相应2-范数 $\|\cdot\|$ 的 k 维实向量欧几里德空间, S_n 表示所有 $n \times n$ 实对称矩阵的集合, I 表示相应维数的单位矩阵, $(\cdot)^T$, $\text{tr}\{\cdot\}$, $\text{Rank}(\cdot)$ 分别表示向量或矩阵的转置、矩阵的迹以及秩, $E\{\cdot\}$ 表示随机变量的数学期望, $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径, $\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ 表示把相应元素对角化后而构成的矩阵;对于实对称矩阵 X , Y , $X > Y$ ($X \geq Y$)表示 $X - Y > 0$ 是正定的(相应地, $X - Y \geq 0$ 是非负定或半正定的),若传递函数 $G(z)$ 是稳定的,并且真有理的,那么 $\|G(z)\|_2$ 表示 $G(z)$ 的 H_2 范数,而且

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}\{G^*(e^{j\omega})G(e^{j\omega})\}d\omega.$$

2 基本概念和问题(Basic concepts and problems)

本文将着重于离散时间线性随机系统的讨论,但也将对连续时间线性随机系统的结果做一些相应的讨论.首先给出如下的离散时间随机系统:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \sum_{j=1}^p A_j v_{jk} x_k + \sum_{i=1}^m B_i \omega_{ik} u_{ik}, \quad (1)$$

其中: $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态, $u_{ik} \in \mathbb{R}$ 是控制输入 u_k 的第 i 个分量; ω_{ik} , $i \in \{1, \dots, m\}$, v_{jk} , $j \in \{1, \dots, m\}$ 为乘性噪声. 记 $\hat{\omega}_k$ 为

$$\hat{\omega}_k = \text{diag} \{ \omega_{1k}, \dots, \omega_{mk} \}.$$

假设 1 ω_{ik}, v_{jk} , $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ 是满足如下条件的白噪声随机过程:

$$E\{\omega_{ik}\} = E\{v_{jk}\} = 0, E\{\omega_{ik_1} v_{jk_2}\} = 0,$$

而且

$$E\{\omega_{ik_1} \omega_{jk_2}\} = \sigma_i^2 \delta_{ij} \delta_{k_1 k_2},$$

$$E\{v_{ik_1} v_{jk_2}\} = r_j^2 \delta_{ij} \delta_{k_1 k_2},$$

其中: $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, δ_{ij} 是 Kronecker delta 函数.

注 1 以下如无特别说明, 则假设所有在系统中出现的乘性噪声都是彼此不相关的、独立同分布且具有零均值的随机过程. 对于由连续或离散时间随机系统所生成的广义代数黎卡提方程, 本文皆称之为 MARE. 在一些文献中, 系统(1)又被称为:

- 具有状态和控制依赖噪声的线性系统;
- 具有状态和控制(输入)乘性噪声的线性系统;
- 具有乘性噪声或随机(扰动)参数的线性系统.

对于网络化反馈控制系统, 通过采用对数量化器, 每个控制通道的量化误差就可以被建模为源信号与一个白噪声的乘积^[16]. 在此模型下, 量化控制系统实际上是一个具有控制乘性噪声的线性系统^[20], 即式(1)的一个特例. 若控制通道出现丢包, 那么也可以得到相似的系统模型^[7,9]. 在以下的叙述中, 主要用到式(1)各种不同的特殊形式, 或者不同于式(1)的其他形式.

考虑如下离散时间随机系统:

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{j=1}^p A_j v_{jk} x_k. \quad (2)$$

定义 1 若对于任意初态

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, \lim_{k \rightarrow \infty} E\{x_k^T x_k\} = 0$$

成立, 称系统(2)是均方稳定的.

许多作者(如文献[29,36])采用状态协方差矩阵 $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{x_k x_k^T\} = 0$ 作为均方稳定的定义.

定义 2^[92] 若对于任意初态

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, E\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T x_k \right\} < \infty$$

成立, 称系统(2)是 l_2 稳定的.

从文献[92]可知, l_2 稳定本质上等价于均方稳定性.

定义 3 若存在具有常增益矩阵 F 的状态反馈

$u_k = Fx_k$, 满足对于任意初态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{x_k^T x_k\} = 0$ 成立, 称系统(1)状态反馈均方可镇定的.

从文献[43]可知, 系统(1)的可镇定性蕴含着 (A, B) 的可镇定性, 系统(2)的稳定性蕴含着 $\rho(A) < 1$, 反之则不一定成立.

记 $r = (r_1, \dots, r_p)$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, $\Omega_\rho = \{r | 0 \leq r_j \leq \rho_j, j = 1, \dots, p\}$, $\Omega_\sigma = \{\sigma | 0 \leq \sigma_i \leq \alpha_i, i = 1, \dots, m\}$, 其中 $\rho_j, \alpha_i (j = 1, \dots, p, i = 1, \dots, m)$ 是 $p + m$ 个任意给定的标量.

假设 $\rho_j = \rho, j = 1, \dots, p$. 为度量系统(2)的鲁棒性, 下面引入均方稳定裕量这一概念.

定义 4^[93] 系统(2)的均方稳定裕量是指使得系统(2)均方稳定的 ρ 的上确界, 即

$$\rho^* = \sup\{\rho : r \in \Omega_\rho \text{ 并且系统(2)是均方稳定的}\}.$$

注 2 从下一部分的讨论可以看到, 若不限制 $\rho_j, j = 1, \dots, p$ 两两相等, 那么系统相应的稳定裕量会和这里有所不同.

定义 5 若对于任意的 $r \in \Omega_\rho, \sigma \in \Omega_\sigma$, 存在状态反馈 $u_k = Fx_k$, 使得系统(1)是均方可镇定的, 称系统(1)是均方可镇定的.

假设控制乘性噪声方差 $\sigma_i, i = 1, \dots, m$ 和状态反馈控制器 $u_k = Fx_k$ 给定, ρ_F^* 是相应闭环系统的均方稳定裕量. 对于不同的 F , 相应闭环系统(1)均方稳定的稳定裕量 ρ_F^* 是不同的. 这里笔者关心的是系统可能达到的最大稳定裕量:

定义 6^[93] 系统(1)的最大均方稳定裕量是指使得系统(1)均方稳定裕量 ρ_F^* 的上确界, 即

$$\rho_{\max} = \sup\{\rho_F^* : r \in \Omega_\rho \text{ 并且相应闭环系统均方稳定}\}.$$

下面, 把确定性系统的能观性等概念推广至随机系统, 给出精确能观等定义.

考虑如下具有测量输出的随机系统:

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{j=1}^p A_j v_{jk} x_k, y_k = Cx_k. \quad (3)$$

定义 7^[43,94-95] 若

$$y_k \equiv 0, \text{ a.s. } \forall k \geq 0 \Rightarrow x_0 = 0,$$

称系统(3)或者 $[A, A_1, \dots, A_p | C]$ 精确能观.

从文献[95]可知, 若 (A, C) 能观, 那么 $[A, A_1, \dots, A_p | C]$ 精确能观. 反之则不一定成立.

相对于精确能观性, 给出如下较弱的精确可检测性定义.

定义 8^[44] 若

$$y_k \equiv 0, \text{ a.s. } \forall k \geq 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} E\{x_k^T x_k\} = 0,$$

称系统(3)或者 $[A, A_1, \dots, A_p | C]$ 精确可检测.

定义 9^[44] 若

$$E\{y_k^T y_k\} = 0, \forall k \geq 0 \Rightarrow x_0 = 0,$$

称系统(3)或者 $[A, A_1, \dots, A_p|C]$ 均方能观。

因为 $E\{y_k^T y_k\} = 0 \iff y_k \equiv 0, \text{ a.s. } \forall k \geq 0$, 因此系统的精确能观性等价于均方能观性。

定义 10^[57, 94, 96] 若

$$E\{y_k^T y_k\} = 0, \forall k \geq 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} E\{x_k^T x_k\} = 0,$$

称系统(3)或者 $[A, A_1, \dots, A_p|C]$ 均方可检测。

易知系统的均方可检测性等价于精确可检测性。

注 3 不同于确定系统的是, 均方可镇定和均方可检测之间的对偶性不再成立, 事实上均方可镇定性蕴含其对偶系统的均方可检测性^[97]。

定义 11^[43] 令 Ψ 是一个具有如下定义的线性算子:

$$\Psi: Z \in S_n \mapsto AZA^T + \sum_{j=1}^p r_j^2 A_j Z A_j^T,$$

其中 Ψ 的谱被定义为 $\sigma(\Psi) = \{\lambda \in R: \Psi(Z) = \lambda Z, Z \in S_n, Z \neq 0\}$ 。

在文献[43–44]中, Zhang和Chen主要采用线性算子的谱技术研究了连续时间随机系统的可镇定和随机能观、可检测性, 并且推广了确定性系统相应的判定准则到随机的情形。

近些年来, 许多作者广泛而深入地研究了具有乘性噪声的随机不确定系统的均方稳定性、镇定以及最优控制问题。本文主要针对下述问题对已有结果作进一步的回顾和更加深入的探讨。对于具有乘性噪声的随机系统的均方稳定性及镇定问题, 主要考虑:

- 1) 如何判断所给系统的均方稳定性?
- 2) 如何确定所给系统的均方稳定裕量?
- 3) 如何设计反馈控制器使得一类具有状态与控制乘性噪声的线性多变量离散系统获得最大均方稳定裕量?

4) 系统噪声方差的大小与系统的均方可镇定性之间的相互制约关系是什么?

同样地, 对于最优控制问题, 本文主要考虑:

- 1) 对于具有控制乘性噪声的线性多变量离散系统, 如何设计状态反馈控制器使得系统的 H_2 , LQR, 线性二次型高斯(LQG)性能最优?
- 2) 对于混合 H_2/H_∞ 控制问题, 怎样设计状态反馈控制器?
- 3) 对于网络化环境下的最优跟踪问题, 如何设计最优动态输出反馈控制器使得跟踪指标函数最小?

3 稳定性和镇定(Stability and stabilization)

线性随机系统稳定性分析主要包含时域分

析^[24, 36, 47]和频域分析^[27–28]两部分。时域分析以李雅普诺夫函数为主要工具, 由此产生了基于类李雅普诺夫方程^[24]和LMI^[36]的稳定性判据。Willems和Blankenship^[27]最早从频域的观点来研究随机系统的均方稳定性, 并得到随机小增益定理。Lu和Skelton^[28]获得进一步发展。有关镇定控制器设计的研究主要采用时域的方法。其中Willems等^[29]最早讨论了乘性噪声系统的均方镇定问题, 并给出了基于MARE的设计方法。基于LMI方法, 文献[36, 93]讨论了乘性噪声系统均方镇定中的状态反馈设计问题。

3.1 稳定性分析(Stability analysis)

本文仅关心随机系统的均方稳定性, 对于一般意义下 p 阶矩稳定请参考文献[37–42]。下面, 列出一系列判断系统(2)均方稳定的判据^[9, 23–24, 29, 36, 92]。

定理 1 如下陈述是等价的:

- 1) 系统(2)是均方稳定的;
- 2) $\rho(\Phi) < 1$, 其中

$$\Phi = A \otimes A + \sum_{j=1}^p r_j^2 A_j \otimes A_j; \quad (4)$$

- 3) 存在 $P > 0$, 满足如下的LMI:

$$A^T P A - P + \sum_{j=1}^p r_j^2 A_j^T P A_j < 0; \quad (5)$$

- 4) 存在 $Q > 0$, 满足如下对偶的LMI:

$$A Q A^T - Q + \sum_{j=1}^p r_j^2 A_j Q A_j^T < 0; \quad (6)$$

- 5) 对于任意给定的 $M > 0$, 存在唯一的 $P > 0$, 满足

$$A^T P A - P + \sum_{j=1}^p r_j^2 A_j^T P A_j + M = 0. \quad (7)$$

注 4 若采用 $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{x_k x_k^T\} = 0$ 作为上述定义, 那么可得到定理1.4。从定理1.5看出, 可以直接通过求解如下类李雅普诺夫方程来验证系统(2)的稳定性:

$$A^T P A - P + \sum_{j=1}^p r_j^2 A_j^T P A_j + I = 0, \quad (8)$$

这里检验 P 是否正定即可。

注 5 当式(7)中矩阵 M 为半正定时, 通过引入系统的能观性同样可得到系统均方稳定判据。

定理 2 系统(2)均方稳定等价于下面两个条件之一:

- 1) 对于任意给定的 $M \geq 0$, 若

$$[A, A_1, \dots, A_p | M^{\frac{1}{2}}]$$

是精确能观的, 那么存在唯一的 $P > 0$, 满足

$$A^T P A - P + \sum_{j=1}^p r_j^2 A_j^T P A_j + M = 0.$$

- 2) 对于任意给定的 $M \geq 0$, 若

$$[A, A_1, \dots, A_p | M^{\frac{1}{2}}]$$

是均方可检测的, 那么存在唯一的 $P > 0$, 满足

$$A^T P A - P + \sum_{j=1}^p r_j^2 A_j^T P A_j + M = 0.$$

同样对系统(2)来说, 也有相应的频域稳定性判据. 为了给出频域判据的直观理解, 本文首先讨论一个特殊情况. 假设系统(2)满足下面条件: $p = 1, A_1 = bc$, 其中: $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}, c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, 而且 $v_{1k} = v_k, k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ 是方差为 r , 均值为零的独立同分布的噪声序列, 那么系统(2)可以被重新表示为

$$x_{k+1} = Ax_k + bd_k, y_k = cx_k, d_k = v_k y_k. \quad (9)$$

令 $G = \begin{bmatrix} A & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$ 并称 G 是系统(9)的标称系统, 同时本文也把这一标称系统的传递范数记为 G .

关于系统(9), 本文有如下的稳定性判据.

定理 3^[27] 系统(9)是均方稳定的, 当且仅当

$$r^2 \|G\|_2^2 = r^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{j\omega})|^2 d\omega < 1. \quad (10)$$

注 6 上述均方稳定性判据也被称为均方稳定性的小增益定理. 这里, 本文可根据图1所示的系统结构理解这一定理. 当噪声 $\hat{\omega}$ 为标量时, 这一框图描述了系统(9)的结构. 不等式(10)意味着在均方意义下, 该系统的开环增益小于1. 从定理3可以看到, 若标称系统 G 稳定, 则系统噪声方差在一定的范围之内, 该系统仍能保持均方稳定. 而这一范围由标称系统的 H_2 范数的倒数 $\frac{1}{\|G\|_2^2}$ 确定. 由定义4可知, $\frac{1}{\|G\|_2^2}$ 就是系统(9)的均方稳定性裕量.

注 7 值得注意的是频域判据与时域判据存在着内在联系. 若系统(9)均方稳定, 即标称系统 G 稳定并且 $r^2 \|G\|_2^2 < 1$. 由 H_2 范数的性质可知: 存在正定阵 P 满足

$$A^T P + PA + c^T c = 0, \quad (11)$$

并且 $\|G\|_2^2 = b^T P b$. 记 $r^2 \|G\|_2^2 = 1 - \varepsilon, 0 < \varepsilon \leq 1$, 等式(11)可写成

$$A^T P + PA + r^2 b^T P b c^T + \varepsilon c^T c = 0. \quad (12)$$

由定理2可知方程(12)有正定解与系统(9)均方稳定等价.

对于系统(2), 进一步假设 $A_j = B_j C_j$, 其中: $B_j \in \mathbb{R}^{n \times 1}; C_j \in \mathbb{R}^{1 \times n}, j = 1, \dots, p$. 那么系统(2)可以重新表示为

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + [B_1 \cdots B_p] d_k, \\ d_k = \text{diag}\{v_1, \dots, v_p\} y_k, y_k = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_p \end{bmatrix} x_k. \end{cases} \quad (13)$$

系统(13)的结构框图如图1所示, 其中

$$\hat{d} = \begin{bmatrix} d_{1k} \\ \vdots \\ d_{pk} \end{bmatrix} = \hat{\omega} \begin{bmatrix} C_1 x_k \\ \vdots \\ C_p x_k \end{bmatrix}, \hat{\omega} = \text{diag}\{v_1, \dots, v_p\}.$$

相应的标称系统 G 表示为

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1p} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1} & G_{p2} & \cdots & G_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & \cdots & B_p \\ C_1 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ C_p & & & 0 \end{bmatrix}.$$

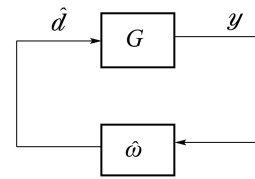


图 1 多乘性噪声反馈互联

Fig. 1 The feedback interconnection with multiplicative noises

下面给出具有多个乘性噪声通道的随机小增益定理.

定理 4^[28] 系统(13)是均方稳定的, 当且仅当

$$\rho(\hat{G}\Sigma_r) < 1, \quad (14)$$

其中: $\Sigma_r = \text{diag}\{r_1^2, \dots, r_p^2\}$, 并且

$$\hat{G} \triangleq \begin{bmatrix} \|G_{11}\|_2^2 & \|G_{12}\|_2^2 & \cdots & \|G_{1p}\|_2^2 \\ \|G_{21}\|_2^2 & \|G_{22}\|_2^2 & \cdots & \|G_{2p}\|_2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|G_{p1}\|_2^2 & \|G_{p2}\|_2^2 & \cdots & \|G_{pp}\|_2^2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

注 8 具有多个乘性噪声的随机系统内部联接如图1所示. 在均方意义下, 其开环增益用 $\rho(\hat{G}\Sigma_r)$ 来度量. 与单变量情况相似, 系统的稳定裕量可用 $\frac{1}{\rho(\hat{G}\Sigma_r)}$ 来度量. 定理4是多个乘性噪声情况下的均方稳定小增益定理.

需要进一步指出的是, 在文献[28]中, Lu和Skelton把定理3中的结论推广到更一般的具有多个乘性噪声的随机系统. 在文中, 扰动信号 d_k 的第 j 个分量满足由一个不确定性环节 Δ_j 产生, 即

$$d_{jk} = \Delta_j(C_j x_k), j = 1, \dots, p,$$

其中 $\Delta_j(C_j x_k)$ 可以是一个范数有界的动态随机系统, 其范数由输入输出信号的信噪比决定. 为了叙述的连贯性, 并不失一般性, 这里作了如下简化处理:

$$\Delta_j(C_j x_k) = v_j C_j x_k, j = 1, \dots, n.$$

注 9 从定理1中5)可知, 若任意给定的 $M > 0$, 则条件(14)成立当且仅当存在唯一的 $P > 0$ 满足

$$A^T P A - P + \sum_{j=1}^p \gamma_j^2 B_j^T P B_j C_j^T C_j + M = 0. \quad (16)$$

文献[92, 98-102]对上述讨论进行了进一步的推广. 下面考虑具有如下结构的随机系统^[92]:

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{j=1}^p A_j v_{jk} x_k + \sum_{i=1}^m B_i \omega_{ik} \Delta_i(C_i x_k), \quad (17)$$

其中 Δ_i 为不确定性, 其范数定义为

$$\|\Delta_i\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|\Delta_i(y)\|}{\|y\|} < \infty, i = 1, \dots, m.$$

而且

$$\Delta = \text{diag}\{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}, \|\Delta\| \triangleq \max_{i=1, \dots, m} \|\Delta_i\|.$$

注 10 不同于一般乘性噪声系统 Δ_i 的是, 系统(17)除了包含与乘性噪声 v_j 有关的扰动外, 还包含非随机不确定性 Δ_i . Δ_i 是范数有界的非线性无记忆算子.

在文中, 作者采用 l_2 稳定的概念讨论了上述系统的稳定性.

定义 12^[92] 系统(17)的稳定性半径定义为

$$\rho^* = \inf\{\|\Delta\| : \Delta \text{是范数有界而且系统(17)是非}l_2\text{稳定的}\}.$$

Bouhtouri和Pritchard指出: 系统(17)的稳定性半径是由一个李雅普诺夫方程和一个矩阵不等式所决定的. 有关连续系统的讨论可参考文献[98-99].

定义系统(17)的标称系统为

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{j=1}^p A_j v_{jk} x_k. \quad (18)$$

通过引入一组缩放因子 $\alpha_i > 0, i = 1, \dots, m$, 可得

定理 5^[92] 若标称系统(18)是 l_2 稳定的, 那么系统(17)最大稳定性半径是

$$\rho^* = \sup_{\alpha} [\max_i \|\frac{\sigma_i^2}{\alpha_i^2} B_i^T P(\alpha) B_i\|]^{-\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

其中: $\alpha = \text{diag}\{\alpha_1^2, \dots, \alpha_m^2\} > 0$, 而且 $P(\alpha) \geq 0$ 是如下李雅普诺夫方程的唯一解:

$$A^T P A - P + \sum_{j=1}^p r_j^2 A_j^T P A_j + \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 C_i^T C_i = 0. \quad (20)$$

最近, 在网络化环境下, Elia^[7]研究了一类具有衰减信道的MIMO反馈互联系统的均方稳定性问题. 当衰减信道表现为 p 个平行的丢包或擦除信道时, 闭环系统可以被描述为类似于式(13)的具有乘性噪声的随机系统. 这里为说明的方便, 记 $B = [B_1 \dots B_p], C = [C_1^T \dots C_p^T]^T$. 不失一般性, 这里利用系统(13)来给出文献[7]中的相应结论.

定义 13 标称系统 G 的均方范数定义如下:

$$\|G\|_{\text{MS}} = \max_{i=1, \dots, p} \sqrt{\sum_{j=1}^p \|G_{ij}\|_2^2}.$$

为此, 本文需要下面引理:

引理 1^[103] 对于任意一个方阵 T , 若其所有元素 t_{ij} 都大于0, 则其谱半径 $\rho(T)$ (或最大特征值)满足下面等式:

$$\rho(T) = \inf_{\alpha} \|\alpha T \alpha^{-1}\|_{\infty} \triangleq \inf_{\alpha} \max_j \sum_i \alpha_i^2 t_{ij} \frac{1}{\alpha_j^2}.$$

定理 6^[7] 假设 $E\{v_i^2\} = r^2, i = 1, \dots, p$, 下面的陈述是等价的:

1) 系统(13)是均方稳定的;

2) 存在 $Q > 0$ 和 $\alpha = \text{diag}\{\alpha_1^2, \dots, \alpha_p^2\} > 0$, 满足如下的LMI:

$$\begin{cases} Q > AQA^T + B\alpha B^T, \\ \alpha_i^2 > r^2 C_i Q C_i^T, i = 1, \dots, p; \end{cases} \quad (21)$$

3) $r^2 \inf_{\alpha} \|\alpha^{-1} G \alpha\|_{\text{MS}}^2 < 1$;

4) $\rho(r^2 \hat{G}) < 1$.

这里, 定理6中3) \Leftrightarrow 4)用到了引理1.

对于一些具有特殊结构的系统, 上述问题求解可以进一步简化. 下面是一个比较典型的例子. 考虑一类如下随机非线性系统:

$$x_{k+1} = Ax_k + \sqrt{x_k^T Q x_k} b \omega_k, \quad (22)$$

其中: $Q \geq 0, b \in \mathbb{R}^n, E\{\omega_k^2\} = \sigma^2$. 基于正算子的谱理论, 文献[49]研究了这类系统的均方稳定性问题, 并且得到了系统均方稳定的充分必要条件.

定理 7 系统(22)是均方稳定的, 当且仅当下式成立:

$$\rho(A) < 1, \text{ 并且 } \text{tr}(MQ) < 1,$$

其中 M 满足如下的李雅普诺夫方程:

$$A M A^T - M + \sigma^2 b b^T = 0.$$

注 11 对于系统(22), 若假设 $Q = b b^T$, 那么该系统退化为系统(9). 运用定理7, 可以得到同定理3完全类似的充要条件.

Kubrusly和Costa^[48]在更一般的假设下考虑了一类如下随机系统的均方稳定性:

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{j=1}^p A_j v_{jk} x_k + D w_k. \quad (23)$$

不同于系统(2)的是, 这里的噪声 $v_{jk}, j = 1, \dots, p$ 及随机噪声 w_k 是相关的, 且均值皆不为0. 在这些假设下, 文中得到了更一般的结果(详见文献[48]).

3.2 均方镇定(Mean-square stabilization)

这一节讨论具有乘性噪声的线性随机系统的均方镇定问题. 基于LQR设计方法, 文献[29-35]讨论了这类系统的均方镇定问题.

在文献[29]中, Willems等考虑了一类具有状态和控制乘性噪声的连续时间随机系统的反馈镇定问题. 不失一般性, 这里给出其对应的离散时间版本. 考虑系统

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \sum_{j=1}^p A_j v_{jk} x_k + \sum_{i=1}^m B_i \omega_{ik} u_k, \quad (24)$$

与系统(1)不同的是, 这里 $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

定理 8^[29] 系统(24)是均方可镇定的, 当且仅当对于任意给定的正定矩阵 Q 和 R , 如下MARE:

$$A^T P A - P + A^T P B J^{-1} B^T P A + \sum_{j=1}^p r_j^2 A_j^T P A_j + Q = 0 \quad (25)$$

有一个正定解 P , 其中

$$J = (R + B^T P B + \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 B_i^T P B_i),$$

而且

$$u_k = -J^{-1} B^T P A x_k$$

是一个状态反馈镇定控制器。

文献[36,93]讨论了当系统(24)状态乘性噪声和输入乘性噪声相同(即 $p = m$, 并且 $v_{jk} = \omega_{ik}, k = 1, \dots, m$)情况下, 该系统的均方镇定问题. 运用LMI优化方法, 文献[36,93]得到了该系统的最大均方稳定裕量以及相应的均方镇定控制器。

定理 9 若系统(24)中的状态乘性噪声和输入乘性噪声的个数为1, 即 $p = m = 1$, 并且 $v_{1k} = \omega_{1k}$. 该系统是状态反馈均方可镇定的, 当且仅当 $r_1 < \rho^*$, 其中求解 ρ^* 转化为如下的GEVP:

$$\rho^* = \sup \rho,$$

受限于 $I \geq Q > 0, \Psi(Q, Y) > 0$, 其中

$$\Psi(Q, Y) = \begin{bmatrix} Q & A Q + B Y & \rho(A_1 Q + B_1 Y) \\ Q A^T + Y^T B^T & Q & 0 \\ \rho(A_1 Q + B_1 Y)^T & 0 & Q \end{bmatrix},$$

这里 $Y = F Q$.

注 12 为了简洁起见, 定理 9 只给出了系统只含一个噪声的情况. 对多个噪声的情况, 也有类似解. 但是, 状态噪声 v_i 与控制 ω_i 不同时, 上述设计问题必须重新考虑。

运用均方小增益定理(定理4), 文献[75]作者研究了系统(24)的状态反馈均方镇定问题. 为简单起见, 假设 $p = 1, A_1 = B_0 C_0, B_1, \dots, B_m$ 为矢量. 运用状态反馈控制器 $u_k = F x_k$, 可得如图2所示闭环系统. 其中 G 是该系统的标称系统, 其传递函数矩阵为

$$G = \left[\begin{array}{c|ccc} A + B F & B_0 & B_1 & \dots & B_m \\ \hline C_0 & 0 & & & \\ F_1 & & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ F_m & & & & 0 \end{array} \right]. \quad (26)$$

由随机小增益定理^[28]可得: 对于任意给定的反馈矩阵 F , 图2所示闭环系统均方稳定的充要条件是

$$\rho(\hat{G}\Sigma) < 1, \quad (27)$$

其中 $\Sigma \triangleq \text{diag}\{\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2\}$. 这里 \hat{G} 的定义完全类似于式(15)中的定义, 不过此时的 \hat{G} 是 $(m+1) \times (m+1)$ 维的。

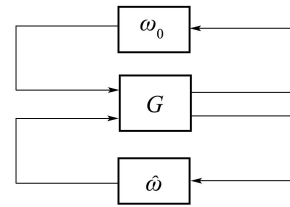


图 2 具有状态和控制噪声的闭环系统

Fig. 2 The closed-loop system with state and control noises

在上述条件下, 系统(24)均方可镇定问题的充要条件为

$$\inf_F \rho(\hat{G}\Sigma) < 1. \quad (28)$$

进一步可得下面结论:

定理 10 若系统(24)中 $p = 1, A_1 = B_0 C_0, B_1, \dots, B_m$ 为矢量, 则求解 $\inf_F \rho(\hat{G}\Sigma)$ 是一个广义特征值问题。

由此可知上述问题有唯一的全局解. 记 $\inf_F \rho(\hat{G}\Sigma)$ 为 ρ_0 . ρ_0 和相应的状态反馈阵可运用一维搜索技术求解下面一组LMI的最小解得到:

$$\begin{bmatrix} Q & Q A^T + Y^T B^T & Y^T & Q C_0^T \\ A Q + B Y & Q & 0 & 0 \\ Y & 0 & \Gamma^{-1} & 0 \\ C_0 Q & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (29)$$

和

$$\begin{bmatrix} \rho \frac{1}{\sigma_i^2 \gamma_i^2} & \frac{1}{\gamma_i^2} B_i^T \\ \frac{1}{\alpha_i^2} B_i & Q \end{bmatrix} \geq 0, \gamma_0 = 1, i = 0, 1, \dots, m, \quad (30)$$

其中: $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1^2, \dots, \gamma_m^2\}, Q = P^{-1} > 0, Y = F Q, \sigma_0 = r_1$.

在定理 10 的假设下, 文献[75]还针对系统(24)讨论了另一类均方镇定稳定问题: 若方差 $\sigma_i, i = 1, \dots, m$ 给定, 则保证系统(24)均方可镇定的 σ_0 的最大值是多少, 相应的最优状态反馈控制器如何求解。

定理 11 若系统(24)中 $p = 1, A_1 = B_0 C_0, B_1, \dots, B_m$ 为矢量, (A, C_0) 能观, 记 v_1 的方差为 σ_0^2 .

系统(24)均方可镇定当且仅当 $\sigma_0^2 B_0^T P B_0 < 1$, 其中 $P > 0$ 满足如下的MARE:

$$P = A^T P A + C_0^T C_0 - A^T P B J^{-1} B^T P A, \quad (31)$$

这里

$$J = \text{diag}\{\sigma_1^2 B_1^T P B_1, \dots, \sigma_m^2 B_m^T P B_m\} + B^T P B.$$

由定理11可知: 若方差 $\sigma_i, i = 1, \dots, m$ 给定, 则保证系统(24)均方可镇定的最大 σ_0 为

$$\sup_F \sigma_0^2 = \frac{1}{B_0^T P B_0},$$

同时使得 σ_0 达到最大的最优控制器增益是

$$F = -J^{-1}B^T P A,$$

其中 P 是 MARE(31) 的解.

运用文献[75]中的方法, 定理10和11均可推广到系统(24)所描述的一般情况.

Bouthouri等^[92]进一步讨论了如下系统的反馈可镇定问题:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \sum_{j=1}^p A_j v_{jk} x_k + \sum_{i=1}^m B_i \omega_{ik} \Delta_i(C_i x_k). \quad (32)$$

在那里, Bouthouri等给出了系统(32)输出反馈可镇定的充分必要条件, 这些条件由一些参数化的矩阵不等式所构成, 而且保证了最大稳定性半径在一个预设值之上. 文献[101]则考虑了相应的连续时间版本并获得了类似的结论.

Elia^[7]讨论了系统(43)的输出反馈可镇定问题, 笔者假设 $E\{\omega_{ik}^2\} = \sigma^2, i = 1, \dots, m$. 基于文献[104]中所提出来的LMI优化方法, Elia认为求解闭环系统的最大稳定裕量是一个非常困难的问题, 通常情况下很难得到全局最优解. 但是就最小相位系统而言, 文献[105-106]对该问题给出了答案.

3.3 MARE解的存在性与方差约束(Existence of MARE solution and variance constraints)

从上一节中的定理8可知, 系统的均方可镇定性可用MARE正定解的存在性刻画. 在这一节中, 本文将讨论可镇定性, MARE正定解的存在性与噪声方差之间的关系.

考虑如下具有单个乘性噪声的单输入系统:

$$x_{k+1} = Ax_k + B(1 + \omega_k)u_k, \quad (33)$$

其中 ω_k 的方差为 σ^2 .

运用定理3, 可得: 对于任意给定的状态反馈矩阵 F , 系统(33)是均方可镇定的, 当且仅当

$$\sigma^2 \|G_F(z)\|_2^2 < 1,$$

其中 $G_F(z) = F(zI - A - bF)^{-1}b$ 通常被称为补敏感度函数. 从文献[107-108]可知, 通过解一个最小能量控制问题, 可以得到使得 $\|G_F(z)\|_2$ 最小的最优状态反馈阵 F_{opt} . 而且最小 $\|G_F(z)\|_2$ 由下式给出:

$$\inf_F \|G_F(z)\|_2^2 = \prod_{i=1}^n \lambda_i^2 - 1,$$

其中 λ_i 表示 A 的第 i 个不稳定特征根, 最优的状态反馈矩阵 $F_{opt} = -B^T P A(1 + B^T P B)^{-1}$, 其中 $P \geq 0$ 满足如下的ARE:

$$A^T P A - P - A^T P B(1 + B^T P B)^{-1} B^T P A = 0.$$

从上述结论表明, 对于单输入通道乘性的系统(33)来说, 均方镇定可化为 H_2 最优设计问题. 但是噪声方差必须满足条件

$$\sigma^2 \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i^2 - 1 \right) < 1, \quad (34)$$

否则解不存在.

另一方面, 从上一节有关均方镇定的结论可知, 当 $Q > 0$ 时, 系统(33)均方可镇定的充要条件为下面MARE方程有正定解:

$$A^T P A - P - A^T P B J_\sigma^{-1} B^T P A + Q = 0, \quad (35)$$

其中 $J_\sigma = R + (1 + \sigma^2) B^T P B$.

文献[6]证明了结论: 对于具有输入乘性噪声的单输入系统(33)(即方程(35)中矩阵 B 是矢量), MARE方程(35)有正定解的充要条件是不等式(34)成立. 由此可以看出, MARE正定解的存在性与噪声方差有着根本性的联系.

对于多变量系统, MARE解的存在性与方差的关系相当复杂, 很难得到显式描述. 文献[8]讨论了以下MARE解的存在性问题:

$$P = A^T P A - \nu A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q. \quad (36)$$

这一MARE对应于系统只包含输入乘性噪声并且噪声方差均相同的情况. 首先定义如下非线性算子 $\Pi(\cdot)$

$$\begin{aligned} \Pi(P, A, B, Q, R, \nu) \triangleq \\ A^T P A - \nu A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A + Q. \end{aligned} \quad (37)$$

引理2 考虑MARE

$$P = \Pi(P, A, B, Q, R, \nu).$$

假设 (A, B) 能控, $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ 能观, 则如下结论成立:

1) MARE有存在一个唯一的正定解 P_∞ , 当且仅当 $1 \geq \nu > \nu_c$, 其中 ν_c 是具有如下定义临界值:

$$\nu_c = \inf_\nu \{ \nu \mid P = \Pi(P, A, B, Q, R, \nu), P \geq 0 \};$$

2) 临界值 ν_c 满足以下的解析界:

$$p_{\min} \leq \nu_c \leq p_{\max}, \quad \begin{cases} p_{\min} = 1 - \frac{1}{\max_i |\lambda_i(A)|^2}, \\ p_{\max} = 1 - \frac{1}{\prod_i |\lambda_i(A)|^2}, \end{cases}$$

而且, 若 B 是可逆的方阵, 那么 $\nu_c = p_{\min}$. 若 $\text{Rank}(B) = 1$, 那么 $\nu_c = p_{\max}$;

3) 求解临界值是一个GEVP;

4) 假如 $1 \geq \nu > \nu_c$, 那么对于任意的 $P_0 \geq 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_\infty$ 存在唯一, 其中 $P_{k+1} = \Pi(P_k, A, B, Q, R, \nu)$.

文献[7]运用乘性噪声模型讨论了网络系统的镇定问题. 文中, 丢包或擦除信道被建模为互不相关的

离散的白噪声随机过程. 网络化系统表示成

$$x_{k+1} = Ax_k + \sum_{i=1}^m B_j(1 + \omega_{ik})u_{ik}, \quad (38)$$

其中噪声 ω_{ik} 是方差为 σ_i 的零均值噪声.

借用通信理论信道容量的概念, 上述系统中第 i 个输入通道的信道容量 C_i 可定义为表示第 i 个通道容量如下:

$$C_i = \frac{1}{2} \log(1 + \frac{1}{\sigma_i^2}).$$

对于单输入系统, 由前面的讨论可得到下面定理:

定理 12^[7] 系统(33)是状态反馈均方可镇定的, 当且仅当

$$\frac{1}{2} \log(1 + \frac{1}{\sigma^2}) > \sum_{i=1}^n \log |\lambda_i|. \quad (39)$$

从这个定理可知, 镇定系统所需要的最小信道容量恰等于通信受限下无噪声数字信道所需要的最小镇定比特率^[109]. 因此, 在信息论和鲁棒控制理论之间, 定理12提供了一个联系点, 它意味着最大均方稳定性裕量和镇定所需最小信息容量存在着简单而直接的相互联系.

在文献[9]中, Xiao等考虑了系统(38)为多输入系统的情况. 这时, m 个通道总的容量被定义为

$$C_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \log(1 + \frac{1}{\sigma_i^2}).$$

运用定理8, 可得如下镇定状态反馈增益:

$$F = -\hat{J}_\sigma^{-1} B^T P A, \quad (40)$$

其中

$$\hat{J}_\sigma = R + B^T P B + \text{diag} \{ \sigma_1^2 B_1^T P B_1, \dots, \sigma_m^2 B_m^T P B_m \},$$

而且 $P > 0$ 满足如下MARE:

$$A^T P A - P - A^T P B \hat{J}_\sigma^{-1} B^T P A + Q = 0. \quad (41)$$

不同于单输入的是, 方差约束有如下结论:

定理 13^[9] 存在一组网络资源分配 $\{C_1, \dots, C_m\}$ 满足系统(38)是状态反馈均方可镇定的, 当且仅当

$$C_p > \sum_{i=1}^n \log |\lambda_i|. \quad (42)$$

定理13给出了保证MARE(41)正定解存在的必要条件. 但是并没给出每个通道资源分配策略或每个参数 $\sigma_i^2, i = 1, \dots, m$ 受到的相应约束. 如何刻画每个通道的资源分配策略有待于进一步研究.

对于输出反馈问题, 文献[20]研究了如下系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + \sum_{i=1}^m B_j(1 + \omega_{ik})u_{ik}, \\ y_k = Cx_k. \end{cases} \quad (43)$$

假设 P 是系统(43)所对应标称系统的传递函数矩阵. 假如 $zP(z)$ ($P(z)$ 是对象传递函数)在 RH_∞ 中是可

逆的, 则运用动态输出反馈控制器, 系统(43)反馈镇定所需最小信息容量等于状态反馈时的情形(见文献[20]).

4 最优控制和估计(Optimal control and estimation)

这一部分将讨论基于二次型等性能指标的最优控制及估计问题.

4.1 LQR 和 H_2 最优设计(LQR and H_2 optimal design)

有关乘性噪声的最优控制问题可追溯到20世纪60年代(见如文献[1, 51-53]). 早期的研究主要针对以下连续系统展开:

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bu(t)dt + G(x(t))dp_1(t) + Ddp_2(t), \quad (44)$$

其中 (A, B) 能控. 为了简单起见, 这里假设 p_1, p_2 是相互独立的一维维纳过程, 而且

$$E\{dp_1(t)\} = 0, E\{dp_1^2(t)\} = \sigma^2 dt.$$

假设 $G(x(t)) = A_1 x(t)$, 并且记 $A_{1l}, l = 1, \dots, n$ 表示矩阵 A_1 的第 l 列. 性能指标为

$$J = E\left\{ \int_0^\infty (x_t^T Q x_t + u_t^T R u_t) dt \right\} = E\{\|y_t\|_2^2\}, \quad (45)$$

其中: $Q \geq 0, R > 0$ 是给定的权衡矩阵,

$$y_t = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} x_t \\ R^{\frac{1}{2}} u_t \end{bmatrix}.$$

假设 $Q > 0$. Wonham^[51]指出: 若存在状态反馈矩阵 F , 使得 $A + BF$ 稳定, 并且满足如下的约束条件:

$$\sigma^2 \left(\sum_{l=1}^n \|A_{1l}\|^2 \right) \left\| \int_0^\infty e^{t(A+BF)^T} e^{t(A+BF)} dt \right\| < 1, \quad (46)$$

那么最优控制存在唯一, 同时一个与该最优控制相伴的MARE有唯一正定解, 并且相应最优状态反馈阵由MARE的解决定. 否则, 若噪声方差不受约束, 那么上述控制器可能不能镇定该系统. 文献[51]给出若干例子验证了这个事实. 需要指出的是, 在文献[110]中, Wonham给出了一个与式(46)稍微不同的约束条件

$$\inf_F \sigma^2 \left\| \int_0^\infty e^{t(A+BF)^T} A_1^T A_1 e^{t(A+BF)} dt \right\| < 1, \quad (47)$$

而且 $Q > 0$ 可放松为 $(A, Q^{1/2})$ 能观甚至可检测.

不等式(46)和(47)描述了系统可镇定性对最优控制器存在性的约束. 从上述两个不等式可以看出: 若噪声方差 σ 过大将导致系统的最优控制器不存在. 造成这一问题其根本原因是: 当噪声方差过大时, 系统(44)是不可镇定的. 文献[111]针对一个一阶系统进一

步讨论了上述问题.

Kleinman^[53]研究了与文献[51]相似的问题,不同的是乘性噪声项位于控制端.作者在假设系统均方可镇定的前提下讨论了最优控制器的设计方法.其主要结论是运用迭代方法可求出广义黎卡提方程的最小正定解进而得到相应的最优控制器.文献[111]针对离散系统讨论了相关的迭代算法.

由上述文献中的研究结果和镇定问题中有关解存在性的结论可知:当二次性能指标(45)中的 $Q > 0$ 时,可镇定性可保证最优控制器的存在性.但是当 $Q \geq 0$ 时,最优控制器存在性条件更为复杂.

利用随机系统的均方能观性, Koning^[57]讨论了离散系统的最优控制问题其性能指标为

$$J(x_0, u_k) = E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)\right\}, \quad (48)$$

这里: $Q \geq 0, R > 0$.

为了内容的统一起见,本文对原文中的被控对象稍作修改,但不影响对相关结论的讨论.对象状态方程为

$$x_{k+1} = Ax_k + A_1 v_{1k} x_k + Bu_k + B_1 \omega_{1k} u_k, \quad (49)$$

其中 $\{v_{1k}, \omega_{1k}\}$ 是具有定常统计的独立随机序列.

定义变换

$$\begin{aligned} \Lambda(P) \triangleq & A^T P A + A_1^T P A_1 r_1^2 - A^T P B \times \\ & (B^T P B + \sigma_1^2 B_1^T P B_1 + \\ & R)^{-1} B P A + Q. \end{aligned} \quad (50)$$

运用迭代算法

$$P_{N+1} = \Lambda(P_N), \quad (51)$$

可求解广义黎卡提方程

$$P = \Lambda(P). \quad (52)$$

进一步,记 $\Lambda^N(\cdot)$ 为变换 Λ 的 N 次迭代.

定理 14^[57] 以下结论是成立的:

1) 如果系统(49)是均方可镇定的,那么 $P = \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda^N(0)$ 存在,并且 P 是方程(52)的最小半正定解,即对于任意满足该方程的正定或半正定解 \bar{P} ,不等式 $0 \leq P \leq \bar{P}$ 成立;

2) 若 $\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda^N(0)$ 存在,最优控制器是

$$u_k = -(B^T P B + \sigma_1^2 B_1^T P B_1 + R)^{-1} B P A x_k, \quad (53)$$

并且 $J(x_0) = x_0^T P x_0$;

3) 若 $Q \geq 0, R > 0$ 并且下面系统均方能观:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + A_1 v_{1k} x_k, \\ y_k = Q^{\frac{1}{2}} x_k, \end{cases} \quad (54)$$

或 $Q > 0, R > 0$,则控制器(53)均方可镇定系统(49)

并且 P 是方程(52)的唯一正定或半正定解.

注 13 从定理14可知,假设系统(49)是均方可镇定的,那么最优控制问题有一个解.若附加 $Q \geq 0, R > 0$ 并且系统(54)均方能观;或 $Q > 0$,那么该解是唯一的,并且相应的最优控制均方镇定该系统,而且最优指标 $J_{opt} = x_0^T P x_0$.该定理同时也提供了一个易于操作的迭代收敛算法.需要指出的是,若没有能观性假设,以零矩阵为初态的迭代只能收敛到方程的最小非负定解而且系统均方稳定性无法保证.

Zhang等^[43-44]针对随机系统(55)的精确能观性、精确可检测性:

$$\begin{aligned} dx(t) = & Ax(t)dt + Bu(t)dt + \\ & [A_1 x(t) + B_1 u(t)]dp_1(t), \end{aligned} \quad (55)$$

其中 p_1 是标量独立维纳过程.

在此基础上,笔者给出了该系统最优调节问题,其中性能指标为

$$J = E\left\{\int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u)dt\right\}, \quad Q \geq 0, R > 0. \quad (56)$$

最优状态反馈阵根据下面MARE的半正定解求取:

$$\begin{aligned} PA + A^T P + A_1^T P A_1 + Q - (PB + A_1^T P B_1) \times \\ (R + B_1^T P B_1)^{-1} (B^T P + B_1^T P A_1) = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

进一步得到下面结论:

定理 15 假设 $Q \geq 0, R > 0$,且对应的连续时间系统 $(A, A_1; B, B_1)$ 均方可镇定,那么

1) MARE(57)的所有解中一定有一个半正定的最大解 P_{max} ,该解所对应的反馈控制器至少临界均方镇定系统(55);

2) 若MARE(57)有半正定解,由其最小半正定解 P_{min} 决定的最优控制器使得最优指标满足 $V_2(x_0) = x_0^T P_{min} x_0$;

3) 若 $(A, A_1|Q^{\frac{1}{2}})$ 是精确能观的,那么MARE(57)有一个正定的反馈镇定解;

4) 若 $(A, A_1|Q^{\frac{1}{2}})$ 是精确可检测的,那么MARE(57)有一个半正定的反馈镇定解;

5) 在3)或4)任何一种情况之下都有

$$V_1(x_0) = V_2(x_0) = x_0^T P x_0.$$

权重矩阵 Q, R 不定时的最优LQR控制问题也受到了相当的关注.该问题在现实中已发现了一些应用,比如金融系统中的投资组合选择等问题^[61].文献[60]最早提出了该问题,随后许多作者就此问题展开研究并获得一些结果.在文献[64-66]中,Rami等研究了系统(55)的不定LQR最优控制问题.这一工作与Zhang等工作不同之处在:利用LMI解得存在性刻画了MARE(57)解存在性.

另一方面,文献[36]运用LMI和凸优化技术研究

了系统(49) l_2 增益上界的优化问题. 这一问题更接近于 H_∞ 控制问题.

许多作者讨论了随机乘性噪声系统的动态或静态输出反馈控制问题^[97, 112-117]. 不同于确定性系统的是, 由于噪声的出现, 传统的在控制和估计之间的分离原理不再成立^[118]. 文献^[112-114, 118-119]给出了最优输出反馈控制器在各种情况下存在的必要条件. 这其中, 笔者主要是基于严格真的且全阶次的(具有与状态相同的维数)^[112, 114, 118-119]补偿器或观测器, 又或者固定阶次的补偿器来进行最优设计. Yaz^[115]获得了系统经由严格真的且全阶次的补偿器均方可镇定的充分条件.

在文献^[97]中, De Koning研究了一类比式(49)更一般的如下随机系统的可补偿性和最优补偿问题:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \Phi_k x_k + \Gamma_k u_k + d_k, \\ y_k = C_k x_k + w_k, \end{cases} \quad (58)$$

这里 $\{\Phi_k\}$, $\{\Gamma_k\}$, $\{C_k\}$ 都是具有定常统计的独立随机矩阵序列.

所谓的均方可补偿性就是指存在一个严格真的且全阶次的补偿器均方镇定系统(58). 基于LQG最优设计并利用 $(\Phi_k, V^{\frac{1}{2}}, Q^{\frac{1}{2}})$ 的均方可检测性, De Koning给出了系统(58)具有均方可补偿性的充分必要条件. 该条件与初始条件为零的4个耦合的矩阵列的迭代收敛性有关, 这其实也提供了相应的最优补偿器的计算方法. 可以发现, 最优补偿器是具有如下结构的观测器:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \bar{\Phi} \hat{x}_k + \bar{\Gamma} u_k + F(y_k - \bar{C} \hat{x}_k), \\ u_k = -L \hat{x}_k, \end{cases} \quad (59)$$

其中 F , L 和4个耦合的MARE有关.

Lu和Skelton^[117]讨论了一类具有信噪比模型的随机系统的最优控制问题, 并指出: 基于观测器的控制器的优化问题是高度非线性的, 而且分离原理不成立, 因此, 很难寻求最优解. 在这种情况下, Lu和Skelton提出了一类具有全阶次的最优输出反馈的局部最优算法.

4.2 H_2 最优控制(H_2 optimal control)

在文献^[75]中, 作者研究了如下线性随机系统的状态反馈最优控制问题, 并给出了最优设计方法:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_0 \omega_{dk} + \sum_{i=1}^m B_i (1 + \omega_{ik}) u_{ik}, \\ y_k = C_0 x_k, \end{cases} \quad (60)$$

其中 $E\{\omega_d^2\} = \sigma_d^2$.

考虑该系统输出信号 y_k 关于噪声 ω_d , $\hat{\omega}$ 的平均功率

$$E\{\|y\|_p^2\} \triangleq E\left\{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T y_k^T y_k\right\}. \quad (61)$$

最优控制问题是: 找一个最小化 $\frac{1}{\sigma_d^2} E\{\|y\|_p^2\}$ 的控制器 $u_k = F_{\text{opt.2}} x_k$, 即

$$F_{\text{opt.2}} = \arg \inf_F \frac{1}{\sigma_d^2} E\{\|y\|_p^2\}. \quad (62)$$

具有状态反馈 $u_k = F x_k$ 的闭环系统如图3所示, 其中 G 是标称闭环系统的传递函数并且满足式(26).

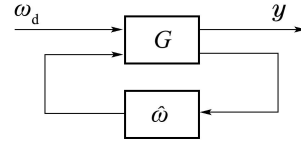


图 3 具有控制噪声的反馈系统

Fig. 3 The feedback system with control noises

引理 3^[28] 对于任意给定的 $\sigma_0, \sigma_i^2, i = 1, \dots, m$, 状态反馈控制器 $u_k = F x_k$ 均方稳定系统(60)并且以下不等式成立:

$$\frac{1}{\sigma_d^2} E\|y\|_p^2 \leq \frac{1}{\sigma_0^2}, \quad (63)$$

当且仅当

$$\rho(\hat{G}\Sigma) < 1,$$

其中 \hat{G} 如式(9)所示, 其每个元素是 G 中相应元素的 H_2 范数.

从该引理可知: 对于给定的方差 $\sigma_i^2, i = 1, \dots, m$, 系统(60)的最优控制问题为如下的最优状态反馈设计问题:

$$F_{\text{opt.2}} = \arg \sup_F \sigma_0,$$

满足约束条件 $\rho(\hat{G}\Sigma) < 1$. 在文中本文指出这一问题等价于下面优化问题:

$$F_{\text{opt.2}} = \arg \inf_{\hat{\Gamma}} \sup_F \sigma_0,$$

其中 $\hat{\Gamma} = \text{diag}\{1, \Gamma\}$, $\Gamma = \{\gamma_1^2, \dots, \gamma_m^2\} > 0$, 并且

$$\left\| \begin{bmatrix} A + BF & B_i \\ \hat{\Gamma}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} C_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \frac{\gamma_i^2}{\sigma_i^2}, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (64)$$

定理 16 系统(60)最优控制的解为

$$F_{\text{opt.2}} = \arg \sup \sigma_0, \quad (65)$$

满足约束

$$B_0^T P B_0 \leq \frac{1}{\sigma_0^2}, \quad B_i^T P B_i \leq \frac{\gamma_i^2}{\sigma_i^2}, \quad i = 1, \dots, m,$$

和黎卡提方程

$$\begin{aligned} P &= A^T P A + C_0^T C_0 - A^T P B (\Gamma + \\ & B^T P B)^{-1} B^T P A. \end{aligned} \quad (66)$$

上述结论将最优问题化成了GEVP问题,可运用线搜索和LMI技术求出全局最优解.

4.3 混合H₂/H_∞控制(Mixed H₂/H_∞ control)

H_∞控制是一种处理扰动抑制问题的有效方法.确定性H_∞控制理论已获得大量而深入的研究,就线性理论而言,结论已趋于成熟和完善.最近几年,具有乘性噪声的连续和离散时间随机系统的H_∞控制理论上已成为广受关注的研究课题.在文献[76]中,Bouhtouri等研究了一类具有状态和控制乘性噪声的离散时间随机系统的H_∞控制问题.通过利用输入-输出算子的L₂诱导范数,得到了一个随机版本下的有界实引理(SBRL),该引理在鲁棒随机H_∞滤波方面有着重要的应用[77].下面,给出离散版本的SBRL.

考虑如下系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + A_1x_k\omega_k + B_1v_k\omega_k + Bd_k, \\ z_k = Cx_k, \end{cases} \quad (67)$$

其中d_k表示外部扰动.

记L_ω²(N, R^m)为m维非预测的平方可求和的随机过程所构成的空间.若f ∈ L_ω²(N, R^m),则定义其l₂范数为

$$\|f\|_{l_2^2} = \sum_{k=0}^{\infty} E\{\|f_k\|^2\}.$$

定义 14 在式(67)中,若对于每一个扰动输入d ∈ L_ω²(N, R^{n_v}),被控输出z ∈ L_ω²(N, R^{n_z}),那么定义Ld(k) = Cx(k; 0, d)的算子

$$L : L_{\omega}^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^{n_v}) \rightarrow L_{\omega}^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^{n_z})$$

称为系统(67)的扰动算子,而且其范数||L||被定义为

$$\|L\|_{\infty} = \inf_{v \in L_{\omega}^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^{n_v}), d \neq 0, x_0=0} \frac{\|z\|_{l_2^2}}{\|d\|_{l_2^2}}.$$

定理 17^[76] 对于给定的γ > 0,以下条件是等价的:

- 1) 系统(67)是内部均方稳定的,并且||L||_∞ < γ;
- 2) 存在P ≤ 0,满足H(P) = γ²I + σ²B₁^TPB₁ + B^TPB > 0和如下MARE:

$$\begin{aligned} &A^T P A - P + \sigma^2 A_1^T P A_1 - C^T C - \\ &K(P)H(P)^{-1}K^T(P) = 0, \end{aligned} \quad (68)$$

其中K(P) = A^TPB + σ²A₁^TPB₁;

- 3) 存在P < 0,满足H(P) = γ²I + σ²B₁^TPB₁ + B^TPB > 0和

$$\begin{aligned} &A^T P A - P + \sigma^2 A_1^T P A_1 - C^T C - \\ &K(P)H(P)^{-1}K^T(P) > 0. \end{aligned}$$

注意到,假若(A, A₁|C)是精确能观的,那么MARE(68)的解P < 0.

对于控制工程而言, H₂性能同样是重要的设计指标,因此,这就要求利用混合H₂/H_∞控制来解决H₂和

H_∞性能之间的合理折衷.

考虑如下的随机系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + A_1x_k\omega_k + B_1d_k\omega_k + \\ \quad Bd_k + B_2u_k, \\ z_k = \begin{bmatrix} Cx_k \\ Du_k \end{bmatrix}, D^T D = I. \end{cases} \quad (69)$$

对于给定的扰动衰减γ > 0,定义如下两个相应的性能指标:

$$J_1^{\infty}(u, d) = \sum_{k=0}^{\infty} E\{\gamma^2\|d_k\|^2 - \|z_k\|^2\}, \quad (70)$$

$$J_2^{\infty}(u, d) = \sum_{k=0}^{\infty} E\{\|z_k\|^2\}. \quad (71)$$

系统(69)的无限时程随机H₂/H_∞控制问题表述为^[82]:发现一个控制率u* ∈ L_ω²(N, R^{n_u}),满足

- 1) u*内部均方镇定系统(69)并且

$$\|L_{u^*}\|_{\infty} = \inf_{d \in L_{\omega}^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^{n_d}), d \neq 0, x_0=0, u=u^*} \frac{\|z\|_{l_2^2}}{\|d\|_{l_2^2}} < \gamma;$$

- 2) 若最坏情况扰动d* ∈ L_ω²(N, R^{n_v})存在,则被用到系统(69),进而u*最小化输出能量J₂[∞](u, d*).这里, d*被称为以下意义下的最坏情况扰动:

$$d^* = \arg \min_d J_1^{\infty}(u^*, d), \forall d \in L_{\omega}^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^{n_v}).$$

注 14 无限时程H₂/H_∞控制是与如下定义相关的两人非零和纳什均衡(u*, d*)博弈:

$$J_1^{\infty}(u^*, d^*) \leq J_1^{\infty}(u^*, d), J_2^{\infty}(u^*, d^*) \leq J_2^{\infty}(u, d^*).$$

定理 18^[85] 对于系统(69),若(A, A₁/C)和(A + BK₁, A₁ + B₁K₁/C)是精确能观的,则H₂/H_∞控制问题有一对解

$$u^* = K_2x_k, d^* = K_1x_k,$$

其中K₁, K₂和4个耦合的MARE相关.

4.4 最优跟踪(Optimal tracking)

在文献[17-19,21]中,Qi和Su等研究了一类线性时不变SISO离散时间网络化反馈系统的最优跟踪问题.系统结构如图4所示.

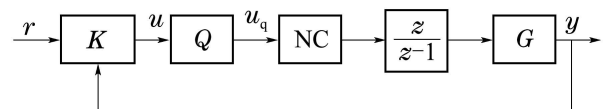


图4 闭环网络化控制系统结构

Fig. 4 Structure of closed-loop networked control system

在系统中, NC代表一个无噪声的网络通道, Q代表具有以下性质的对数量化器:

$$u_q = Q(u) = u + \Delta u,$$

其中Δu是量化误差并且描述为源信号和一个白噪声的乘积,即

$$\Delta u_k = u_k\omega_k,$$

这里 $|\omega_k| \leq \delta$. 实质上, 这一量化控制系统被描述成一个具有乘性噪声的线性系统.

跟踪性能通过系统输出 y_k 和给定参考输入 r_k 之间的平均跟踪误差能量来进行度量, 即

$$J = E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [r_k - y_k]^2 \right\},$$

其中 ω 是所有容许的相对量化误差. 最优跟踪问题就是设计一个最小化跟踪性能的最优动态输出反馈控制器(或补偿器), 即

$$J_{\text{opt}} = \inf_{K \in \mathcal{K}} \left\{ E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [r_k - y_k]^2 \right\} \right\},$$

其中 \mathcal{K} 表示所有能镇定该系统控制器的集合. 基于标准的 H_2 最优控制技术, 获得如下结论:

定理 19^[19,21] 具有对数量化的线性时不变系统如图4所示. 其最优跟踪问题是一个拟凸优化问题, 而且最小跟踪误差为

$$J_{\text{opt}} = \sum_{i=1}^m \frac{|z_i|^2 - 1}{|1 - z_i|^2} + E(\sigma^2), \quad (72)$$

其中: z_i , $i = 1, \dots, m$ 是对象 $G(z)$ 的 m 个非最小相位零点; $E(\sigma^2)$ 是一个与噪声方差 σ^2 有关单调递增非负项, 并且 $\lim_{\sigma^2 \rightarrow 0} E(\sigma^2) = 0$.

注 15 从最优指标可以看出, 若没有乘性噪声的影响, 则该问题退化为传统的最优跟踪问题. 噪声的出现增加了额外的项 $E(\sigma^2)$, 这一项进一步恶化了最优跟踪性能. 因为该最优优化问题是拟凸的, 所以系统存在一个全局最优控制器. 值得注意的是: 对于多变量系统这一性质通常不成立.

在文献[20]中, Su等研究了一类具有对数量化的最小相位的LTI MIMO离散时间系统的最优跟踪问题, 并得到了与定理19类似的结论: 最优跟踪问题是一个拟凸优化问题. 由于均方可镇定性是保证系统可获得渐近跟踪的充分必要条件, 文献[20]同时对系统的均方镇定问题也进行了深入的讨论.

4.5 最优估计(Optimal estimation)

状态估计问题被广泛应用于跟踪、检测和控制领域^[120], 自20世纪60年代开始, 卡尔曼滤波^[121]一直是解决状态估计问题的主要工具. 基于卡尔曼滤波递归估计技术, 这一部分简要地回顾具有丢包或乘性噪声的线性系统的最优估计问题.

首先考虑如下系统:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k, \\ y_k = \gamma_k Cx_k + v_k, \end{cases} \quad (73)$$

其中: 初始状态 x_0 是具有零均值和协方差矩阵 P_0 的随机向量, w_k, v_k 是分别具有协方差矩阵 Q, R 的独立随机过程, γ_k 是取值0和1的独立同分布随机过程, 而且满足

$$P\{r_k = 1\} = q, P\{r_k = 0\} = 1 - q.$$

假设随机过程 w_k, v_k, γ_k 与初始状态 x_0 是相互独立的.

在1969年, Nahi^[122]考虑了如下线性最小均方误差估计(LMMSE)问题: 对于系统(73), 已知给定的测量信号 y_0, y_1, \dots, y_k , 求解状态向量 x_{k+1} 的线性估计 $\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^k \alpha_i y_i$, 最小化如下误差协方差矩阵:

$$E_{w, v, x_0, \gamma} \left\{ [x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}][x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}]^T \right\}, \quad (74)$$

其中 α_i 是具有相应维数的常数系数矩阵.

利用正交性条件, 可得具有如下结构最优估计器:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + F_k(y_k - qC\hat{x}_k), \quad (75)$$

其中

$$\begin{aligned} F_k &= qAP_kC^T[R + q^2CP_kC^T + \\ &\quad q(1-q)CS_kC^T]^{-1}, \\ S_{k+1} &= AS_kA^T + Q, \\ P_{k+1} &= AP_kA^T - q^2AP_kC^T[R + q^2CP_kC^T + \\ &\quad q(1-q)CS_kC^T]^{-1}CP_kA^T + Q, \end{aligned}$$

这里 $S_0 = P_0$.

注意到, 以上最优估计方程是由一个黎卡提和一个李雅普诺夫差分方程所决定. 当测量信息没有损失, 即 $q = 1$ 时, 相应的最优估计器(75)退化为标准的卡尔曼滤波方程.

在文献[123]中, Haditi 和 Schwartz 把Nahi的结论推广到更一般的情形, 即丢包变量 γ_k 不再是独立同分布的, 此时最优线性估计器通常不再满足递归关系.

在网络化环境下, Sinopoli等^[6]考虑了具有间歇观测的卡尔曼滤波问题, 利用与文献[122]不同的观测机制, 作者得到了具有如下结构最优估计器:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + \gamma_k \bar{F}_k(y_k - C\hat{x}_k), \quad (76)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{F}_k &= AP_kC^T[R + CP_kC^T]^{-1}, \\ P_{k+1} &= AP_kA^T - \gamma_k AP_kC^T[R + \\ &\quad CP_kC^T]^{-1}CP_kA^T + Q. \end{aligned}$$

容易看到, 此时的最优估计和误差协方差矩阵都是与 γ_k 有关的随机迭代序列, 这一方面是由相应的观测机造成的, 另一方面也与指标(74)的期望与 γ_k 无关有关. 因为 γ_k 的信息在估计器设计中是可利用的, 所以式(76)比式(75)有较小的误差协方差. 文献[6]还进一步讨论了矩阵序列 $E\{P_k\}$ 的敛散性, 相关结论在引理2中已详细给出.

通过采用与文献[6]中相似的观测机制, Zhang等^[12]考虑了一类具有如下结构的次优估计器:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + \tilde{F}_k(y_k - \gamma_k C\hat{x}_k), \quad (77)$$

其中 \tilde{F}_k 的选择满足最小化误差协方差矩阵(74).

定理 20^[12] 假设 $(A^T, qC^T, C^T)(0 < q < 1)$ 均方可镇定, $(A^T, Q^{\frac{1}{2}})$ 精确可观. 以下结论成立:

1) 次优估计器增益 \tilde{F}_k 满足

$$\tilde{F}_k = qAP_kC^T[R + qCP_kC^T]^{-1},$$

其中

$$P_{k+1} = AP_kA^T - q^2AP_kC^T[R + qCP_kC^T]^{-1}CP_kA^T + Q.$$

2) 对于任意给定的 $P_0 \geq 0$, 矩阵列 P_k 都收敛到唯一正定矩阵 P , 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P$, 而且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{F}_k = \tilde{F} = qAPC^T[R + qCPC^T]^{-1}$.

3) 次优估计器

$$\hat{x}_{k+1} = (A - \gamma_k \tilde{F}C)\hat{x}_k + \tilde{F}y_k$$

是均方稳定的.

在文献[12]中, Zhang等进一步指出: 和LMMSE估计器(75)及间歇卡尔曼滤波器(76)相比, 次优估计器(77)估计误差小于式(75)而大于式(76), 因此可被看作式(75)和式(76)一个性能折衷. 更多的具有丢包的离散时间随机系统的状态估计问题请参考文献[13–14].

考虑如下具有状态和测量乘性噪声的系统:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + A_0\beta_k)x_k + w_k, \\ y_k &= (C + C_0\beta_k)x_k + v_k. \end{aligned} \quad (78)$$

一般来说, 具有状态和控制乘性噪声的最优LQR设计问题不在对偶于传统的LMMSE估计问题. 在文献[124]中, Zhang和Song通过提出一个不同于以往的线性估计器来建立了控制和估计的对偶性, 并进一步运用到具有丢包和多个时延的系统.

在文献[50]中, Zhang等考虑了一类具有随机测量时延的线性估计问题. 当随机时延可在线知道时, 利用测量重组技术, 随机时延系统就可被等价重构为没有时延的具有二进制切换的乘性噪声系统, 进而利用卡尔曼滤波技术, 获得了一个最优线性滤波器. 在一类特殊情况下, 若系统同时具有随机状态和测量时延^[125], 则相应的系统可被等价转化为具有定常时延和二进制切换的乘性噪声系统.

在网络化环境下, Schenato等^[8]综合考虑了控制和估计问题, 在那里, 控制和测量信道被建模为乘性丢包信道. 利用不同的网络传输协议, 作者得到了如下结论: 当控制包的成功接收能被确认时(类TCP协议), 存在一临界收包概率, 在此值之下, 最优控制不能镇定系统, 而且在此协议下, 分离原理成立并且最优LQG控制器是状态估计的线性函数. 反之, 当控制包的成功接收不能被确认时(类UDP协议), 最优LQG控制器通常是非线性的, 因此分离原理不在成立. 更

多的关于控制和估计方面的内容请参考文献[126]及其中文文献.

5 结论(Conclusions)

本文主要概述并总结了具有乘性噪声的线性随机不确定系统的稳定性分析、均方镇定、最优控制, 以及估计问题. 针对一些问题, 提出了一些不同的观点并发展了相应的结论. 在第2部分, 作为预备性工作, 首先给出一些基本概念并提出相关问题. 第3部分回顾并收集了一系列的关于随机系统均方稳定和镇定的结论. 对于线性系统, 这些结论主要利用随机李雅普诺夫函数技术和频域方法来获得. 本文着重讨论了两者之间的联系, 以及分析结果与计算结果之间的联系. 第4部分主要回顾了随机最优控制的不同方面, 例如LQR、LQG最优控制、 H_2/H_∞ 混合控制等. 尤其在网络化环境下, 本文分别在第3、4部分给出了关于镇定、估计以及最优跟踪的一些最近的结论. 基于所给结论, 初步指出了最优控制、MARE的非负定解、均方可镇定以及状态或控制噪声方差之间的内在联系: 对于SISO系统, 若噪声方差小于一个临界值, 那么相应MARE存在唯一正定解, 这也就意味着最优控制存在唯一, 而且是均方镇定控制器, 反之亦然. 本文更进一步的解决了具有状态与控制乘性噪声的线性多变量离散时间系统的状态反馈最优设计问题. 相应的结论分别出现在第3、4部分, 其中不但证明了经由状态反馈下的均方镇定问题是一个广义特征值问题(即, 该问题有全局最优解), 而且还提出了状态反馈最优控制问题等价于均方镇定问题.

本文所涉及的内容并没有很好地解决一些重要的问题, 比如在动态输出反馈控制之下, 具有状态与控制乘性噪声的线性多变量离散时间系统的均方镇定问题; 比如网络化环境下的具有状态乘性噪声的线性离散时间系统的最小比特率均方镇定问题, 以及双通道控制问题(该问题允许控制器通过两个具有乘性噪声的信道来连接到装置的输入输出端)等等, 这些问题都是未来研究的重点.

参考文献(References):

- [1] MCLANE P J. Optimal stochastic control of linear systems with state- and control-dependent disturbances [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, 16(6): 793 – 798.
- [2] BOLATIN V V. *Random Vibration of Elastic Systems* [M]. Boston: Martinus Nijhoff, 1984.
- [3] IBRAHIM R A. *Parametric Random Vibration* [M]. Chichester: John Wiley, 1985.
- [4] WAGENAAR T J A, KONING W L D. Stability and stabilizability of chemical reactors modeled with stochastic parameters [J]. *International Journal of Control*, 1989, 49(1): 33 – 44.
- [5] AOKI M. Control of linear discrete-time stochastic dynamic systems with multiplicative disturbances [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, 20(3): 388 – 392.

- [6] SINOPOLI B, SCHENATO L, FRANCESCHETTI M, et al. Kalman filtering with intermittent observations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453 – 1464.
- [7] ELIA N. Remote stabilization over fading channels [J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(3): 237 – 249.
- [8] SCHENATO L, SINOPOLI B, FRANCESCHETTI M, et al. Foundations of control and estimation over lossy networks [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 163 – 187.
- [9] XIAO N, XIE L H, QIU L. Mean square stabilization of multi-input systems over stochastic multiplicative channels [C] // *Proceedings of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2008: 6893 – 6898.
- [10] YOU K Y, XIE L H. Minimum data rate for mean square stabilization of discrete LTI systems over lossy channels [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(10): 2373 – 2378.
- [11] ISHIDO Y, TAKABA K, QUEVEDO D E. Stability analysis of networked control systems subject to packet-dropouts and finite-level quantization [J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(5): 325 – 332.
- [12] ZHANG H S, SONG X M, SHI L. Convergence and mean square stability of suboptimal estimator for systems with measurement packet dropping [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(5): 1248 – 1253.
- [13] SUN S L, XIE L H, XIAO W D, et al. Optimal linear estimation for systems with multiple packet dropouts [J]. *Automatica*, 2008, 44(5): 1333 – 1342.
- [14] LIANG Y, CHEN T W, PAN Q. Optimal linear state estimator with multiple packet dropouts [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(6): 1428 – 1433.
- [15] GUPTA V, HASSIBI B, MURRAY R M. Optimal LQG control across packet-dropping links [J]. *Systems & Control Letters*, 2007, 56(6): 439 – 446.
- [16] FU M Y, SOUZA C E. State estimation using quantized measurements [C] // *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Oxford, UK: Pergamon, 2008: 12492 – 12497.
- [17] QI T, SU W Z. Tracking performance limitation of a linear miso unstable system with quantized control signals [C] // *The 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*. Piscataway, NJ: IEEE, 2008: 1424 – 1429.
- [18] QI T, SU W Z. Optimal tracking performance of a linear system with a quantized control input [C] // *Proceedings of the 27th Chinese Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2008: 437 – 441.
- [19] QI T, SU W Z. Optimal tracking and tracking performance constraints from quantization [C] // *Proceedings of the 7th Asain Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2009: 447 – 452.
- [20] SU W Z, QI T, CHEN J, et al. Optimal tracking design of an MIMO linear system with quantization effects [C] // *The 18th IFAC World Congress*. Oxford, UK: Pergamon, 2011: 3268 – 3273.
- [21] QI T, SU W Z, CHEN J. Tracking performance for output feedback control under quantization constraints [C] // *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2011: 6419 – 6424.
- [22] WEI L, ZHANG H S, FU M Y. Quantized stabilization for stochastic discrete-time systems with multiplicative noises [EB/OL]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. [2011–12–29]. <http://onlineibrary.wiley.com/doi/10.1002/rnc.2778/abstract>.
- [23] KLEINMAN D. On the stability of linear stochastic systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, 14(4): 429 – 430.
- [24] MCLANE P J. Asymptotic stability of linear autonomous systems with state-dependent noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, 14(6): 754 – 755.
- [25] KUSHNER H J. *Stochastic Stability and Control* [M]. New York: Academic Press, 1967.
- [26] KOZIN F. A survey of stability of stochastic systems [J]. *Automatica*, 1969, 5(1): 95 – 112.
- [27] WILLEMS J C, BLANKENSHIP G L. Frequency domain stability criteria for stochastic systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, 16(4): 292 – 299.
- [28] LU J B, SKELTON R E. Mean-square small gain theorem for stochastic control: discrete-time case [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(3): 490 – 494.
- [29] WILLEMS J L, WILLEMS J C. Feedback stabilizability of stochastic systems with state and control dependent noise [J]. *Automatica*, 1976, 12(3): 277 – 283.
- [30] HAUSSMANN U. Stability of linear systems with control dependent noise [J]. *SIAM Journal of Control*, 1973, 11(2): 382 – 394.
- [31] MOROZAN T. Stabilization of some stochastic discrete-time control systems [J]. *Stochastic Analysis and Applications*, 1983, 1(1): 89 – 116.
- [32] YAZ E. Stabilization of discrete-time systems with stochastic parameters [J]. *Systems & Control Letters*, 1985, 5(5): 321 – 326.
- [33] YAZ E. Certainty equivalent control of stochastic systems: stability property [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(2): 178 – 180.
- [34] YAZ E. Sliding-horizon optimal and certainty-equivalent controllers for stabilizing stochastic-parameter systems [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 1987, 8(4): 327 – 337.
- [35] YAZ E. Feedback controllers for stochastic-parameter systems: relations among various stabilizability conditions [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 1988, 9(3): 325 – 332.
- [36] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [37] HAUSSMANN U. On the existence of moments of stationary linear systems with multiplicative noise [J]. *SIAM Journal of Control*, 1974, 12(1): 99 – 105.
- [38] WILLSKY A, MARCUS S, MARTIN D. On the stochastic stability of linear systems containing colored multiplicative noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, 20(5): 711 – 713.
- [39] AEYELS D, WILLEMS J. Moment stability of linear stochastic systems with solvable Lie algebras [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(2): 285.
- [40] BLANKENSHIP G. Stability of linear differential equations with random coefficients [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(5): 834 – 838.
- [41] WISE G L, MARCUS S I. Stochastic stability for a class of systems with multiplicative state noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, 24(2): 333 – 335.
- [42] SASAGAWA T, WILLEMS J L. Parametrization method for calculating exact stability bounds of stochastic linear systems with multiplicative noise [J]. *Automatica*, 1996, 32(12): 1741 – 1747.
- [43] ZHANG W H, CHEN B S. On stabilizability and exact observability of stochastic systems with their applications [J]. *Automatica*, 2004, 40(1), 87 – 94.
- [44] ZHANG W H, ZHANG H S, CHEN B S. Generalized Iyapunov equation approach to state-dependent stochastic stabilization/detectability criterion [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(7): 1630 – 1642.
- [45] ZHANG W H, XIE L H. Interval stability and stabilization of linear stochastic systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(4): 810 – 815.

- [46] HAYASE M, NIWA S, SUGIURA I. Stability of linear time-varying systems with state dependent noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(5): 775 – 776.
- [47] HAs'MINSKI R Z. *Stochastic Stability of Differential Equations* [M]. Alphen, Netherlands: Sijthoff and Noordhoff, 1980.
- [48] KUBRUSLY C S, COSTA O L V. Mean square stability conditions for discrete stochastic bilinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, 30(11): 1082 – 1087.
- [49] RYASHKO L B, SCHURZ H. Mean square stability analysis of some linear stochastic systems [J]. *Dynamic Systems & Applications*, 1997, 6: 165 – 189.
- [50] ZHANG H S, FENG G, HAN C Y. Linear estimation for random delay systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2011, 60(7): 450 – 459.
- [51] WONHAM W M. Optimal stationary control of linear systems with state-dependent noise [J]. *SIAM Journal of Control*, 1967, 5(3): 486 – 500.
- [52] WONHAM W M. Random differential equations in control theory [J]. *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, 1970, 2: 131 – 212.
- [53] KLEINMAN D. Optimal stationary control of linear systems with control-dependent noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, 14(6): 673 – 677.
- [54] HAUSSMANN U. Optimal stationary control with state and control dependent noise [J]. *SIAM Journal of Control*, 1971, 9(2), 184 – 198.
- [55] MAHALANABIS A, RANA R. On optimal stationary control of systems with state dependent noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1975, 20(5): 718 – 719.
- [56] BISMUT J. Linear-quadratic optimal stochastic control with random coefficients [J]. *SIAM Journal of Control*, 1976: 14(3): 419 – 444.
- [57] KONING W L D. Infinite horizon optimal control of linear discrete time systems with stochastic parameters [J]. *Automatica*, 1982, 18(4), 443 – 453.
- [58] 张维海. 广义代数Riccati方程和最优调节器的研究 [J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(4), 637 – 640.
(ZHANG Weihai. Study on generalized algebraic Riccati equations and optimal regulators [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(4), 637 – 640.)
- [59] BEGHI A, D'ALESSANDRO D. Discrete-time optimal control with control-dependent noise and generalized riccati difference equations [J]. *Automatica*, 1998, 34(8): 1031 – 1034.
- [60] CHEN S P, LI X J, ZHOU X Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1998, 36(5): 1685 – 1702.
- [61] ZHOU X Y, LI D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: a stochastic LQ framework [J]. *Applied Mathematics & Optimization*, 2000, 42(1): 19 – 33.
- [62] MOORE J B, ZHOU X Y, LIM A E B. Discrete time LQG controls with control dependent noise [J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 36(3): 199 – 206.
- [63] RAMI M A, CHEN X, ZHOU X Y. Discrete-time indefinite LQ control with state and control dependent noises [J]. *Journal of Global Optimization*, 2002, 23(3/4): 245 – 265.
- [64] RAMI M A, ZHOU X Y. Linear matrix inequalities, Riccati equations, and indefinite stochastic linear quadratic controls [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(6): 1131 – 1143.
- [65] RAMI M A, MOORE J B, ZHOU X Y. Indefinite stochastic linear quadratic control and generalized differential Riccati equation [J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2001, 40(4): 1296 – 1311.
- [66] RAMI M A, CHEN X, MOORE J B, et al. Solvability and asymptotic behavior of generalized Riccati equations arising in indefinite stochastic LQ controls [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(3): 428 – 440.
- [67] ZHANG W H, HUANG Y L, ZHANG H S. Infinite horizon linear quadratic optimal control for discrete-time stochastic systems [J]. *Asian Journal of Control*, 2008, 10(5): 608 – 615.
- [68] SONG X M, ZHANG H S, XIE L H. Stochastic linear quadratic regulation for discrete-time linear systems with input delay [J]. *Automatica*, 2009, 45(9): 2067 – 2073.
- [69] MARITON M. On the influence of noise on jump linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, 32(12): 1094 – 1097.
- [70] DRAGAN V, MOROZAN T, STOICA A M. H_2 optimal control for linear stochastic systems [J]. *Automatica*, 2004, 40(7): 1103 – 1113.
- [71] COSTA O L V, OLIVEIRA A D. Optimal mean-variance control for discrete-time linear systems with Markovian jumps and multiplicative noises [J]. *Automatica*, 2012, 48(2): 304 – 315.
- [72] DRAGAN V, MOROZAN T, STOICA A M. *Mathematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems* [M]. Berlin: Springer, 2010.
- [73] ZHOU S W, ZHANG W H. Discrete-time indefinite stochastic LQ control via SDP and LMI methods [J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2012: 638762.
- [74] ZHOU S W, ZHANG W H. Indefinite LQ control for discrete-time stochastic systems via semidefinite programming [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012: 674087.
- [75] LIU G M, SU W Z, CHEN J. Optimal control of linear discrete-time systems with multiplicative noises [C] // *Proceeding of the 31st Chinese Control Conference*. Piscataway, NJ: IEEE, 2012: 5948 – 5953.
- [76] BOUHTOURI A E, HINRIECHSEN D, PRITCHARD A J. H_∞ -type control for discrete-time stochastic systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1999, 9(13): 923 – 948.
- [77] GERSHON E, SHAKED U, YAESH I. H_∞ control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise [J]. *Automatica*, 2001, 37(3): 409 – 417.
- [78] GERSHON E, LIMEBEER D J N, SHAKED U, et al. Stochastic H_∞ tracking with preview for state-multiplicative systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(11): 2061 – 2066.
- [79] GERSHON E, SHAKED U. Static H_2 and H_∞ output-feedback of discrete-time LTI systems with state multiplicative noise [J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(3): 232 – 239.
- [80] GERSHON E, SHAKED U. H_∞ output-feedback control of discrete-time systems with state-multiplicative noise [J]. *Automatica*, 2008, 44(2): 574 – 579.
- [81] CHEN X, ZHOU K. Multiobjective H_2/H_∞ control design [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001, 40(2): 628 – 660.
- [82] CHEN B S, ZHANG W H. Stochastic H_2/H_∞ control with state-dependent noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(1): 45 – 57.
- [83] ZHANG W H, ZHANG H S, CHEN B S. Stochastic H_2/H_∞ control with (x, u, v) -dependent noise: finite horizon case [J]. *Automatica*, 2006, 42(11): 1891 – 1898.
- [84] ZHANG W H, HUANG Y L, ZHANG H S. Stochastic H_2/H_∞ control for discrete-time systems with state and disturbance dependent noise [J]. *Automatica*, 2007, 43(3): 513 – 521.
- [85] ZHANG W H, HUANG Y L, XIE L H. Infinite horizon stochastic H_2/H_∞ control for discrete-time systems with state and disturbance dependent noise [J]. *Automatica*, 2008, 44(9): 2306 – 2316.

- [86] HOU T, ZHANG W H, MA H J. Finite horizon H_2/H_∞ control for discrete-time stochastic systems with Markovian jumps and multiplicative noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 15(5): 1185 – 1191.
- [87] DENG H, KRSTIĆ M. Stochastic nonlinear stabilization—II: inverse optimality [J]. *Systems & Control Letters*, 1997, 32(3): 151 – 159.
- [88] ZHANG W H, CHEN B S. State feedback H_∞ control for a class of nonlinear stochastic systems [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2006, 44(6): 1973 – 1991.
- [89] BERMAN N, SHAKED U. H_∞ -like control for nonlinear stochastic systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(3): 247 – 257.
- [90] HU L J, MAO X R. Almost sure exponential stabilization of stochastic systems by state-feedback control [J]. *Automatica*, 2008, 44(2): 465 – 471.
- [91] UMESH V, ELIA N. Stabilization of nonlinear systems over packet-drop links: scalar case [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(9): 959 – 966.
- [92] BOUHTOURI A E, HINRICHSEN D, PRITCHARD A J. Stability radii of discrete-time stochastic systems with respect to blockdiagonal perturbations [J]. *Automatica*, 2000, 36(7): 1033 – 1040.
- [93] GHAOUIL E. State-feedback control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities [J]. *Systems & Control Letters*, 1995, 24(3): 223 – 228.
- [94] LI Z Y, WANG Y, ZHOU B, et al. Detectability and observability of discrete-time stochastic systems and their applications [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1340 – 1346.
- [95] 刘雅增. 倒向随机微分方程和随机控制系统 [D]. 济南: 山东大学, 1999.
(LIU Yazeng. *Backward stochastic differential equation and stochastic control system* [D]. Jinan: Shandong University, 1999.)
- [96] KONING W L D. Detectability of linear discrete-time systems with stochastic parameters [J]. *International Journal of Control*, 1983, 38(5): 1035 – 1046.
- [97] DE KONING W L. Compensatability and optimal compensation of systems with white parameters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(5): 579 – 588.
- [98] BOUHTOURI A E, PRITCHARD A J. Stability radii of linear systems with respect to stochastic perturbations [J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(1): 29 – 33.
- [99] BOUHTOURI A E, PRITCHARD A J. A Riccati equation approach to maximizing the stability radius of a linear system under structured stochastic Lipschitzian perturbations [J]. *Systems & Control Letters*, 1993, 21(6): 475 – 484.
- [100] HINRICHSEN D, PRITCHARD A J. Stability margins for systems with deterministic and stochastic uncertainty [C] // *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway, NJ: IEEE, 1994: 3825 – 3826.
- [101] HINRICHSEN D, PRITCHARD A J. Stability radii for systems with stochastic uncertainty and their optimization by output feedback [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1996, 34(6): 1972 – 1998.
- [102] MOROZAN T. Stability radii of some discrete-time systems with independent random parameters [J]. *Stochastic Analysis and Applications*, 1997, 15(3): 375 – 386.
- [103] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [104] SCHERER C, GAHINET P, CHITALI M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(7): 896 – 911.
- [105] SU W Z, QI T, CHEN J, et al. Optimal tracking design of an MIMO linear system with quantization effects [C] // *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*. Italy: International Federation of Automatic Control, 2011, 18: 3268 – 3273.
- [106] SU W Z, CHEN J. The mean-square stabilization of networked feedback systems with channel delays [C] // *Proceedings of Chinese Control Conference*. Xi'an: IEEE, 2013.
- [107] ELIA N, MITTER S K. Stabilizing a linear system with limited information [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1384 – 1400.
- [108] FU M Y, XIE L H. The sector bound approach to quantized feedback control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1698 – 1711.
- [109] TATIKONDA S, MITTER S K. Control under communication constraints [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1056 – 1068.
- [110] WONHAM W M. On a matrix Riccati equation of stochastic control [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1968, 6(4): 681 – 697.
- [111] ATHANS M, KU R T, GERSHWIN S B. The uncertainty threshold principle: some fundamental limitations of optimal decision making under dynamic uncertainty [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(3): 491 – 495.
- [112] PAKSHIN P V. State estimation and control synthesis for discrete linear systems with additive and multiplicative noise [J]. *Automation and Remote Control*, 1978, 39(4): 526 – 535.
- [113] BERNSTEIN D S, HADDAD W M. Optimal projection equations for discrete-time fixed-order dynamic compensation of linear systems with multiplicative white noise [J]. *International Journal of Control*, 1987, 46(1): 65 – 73.
- [114] PHILLIS Y A. Optimal estimation and control of discrete multiplicative systems with unknown second-order statistics [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1990, 64(1): 153 – 168.
- [115] YAZ E. Stabilizing compensator design for discrete-time non-linear stochastic systems with incomplete state information [J]. *International Journal of Control*, 1988, 48(1): 343 – 352.
- [116] YAZ E, SKELTON R E. Parameterization of all linear compensators for discrete-time stochastic parameter systems [J]. *Automatica*, 1994, 30(6): 945 – 955.
- [117] LU J B, SKELTON R E. Robust variance control for systems with finite-signal-to-noise uncertainty [J]. *Automatica*, 2000, 36(3): 511 – 525.
- [118] PHILLIS Y A. Controller design of systems with multiplicative noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, 30(10): 1017 – 1019.
- [119] BERNSTEIN D S. Robust static and dynamic output feedback stabilization: deterministic and stochastic perspectives [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1987, 32(12): 1076 – 1084.
- [120] KONING W L D. Optimal estimation of linear discrete-time systems with stochastic parameters [J]. *Automatica*, 1984, 20(1): 113 – 115.
- [121] KALMAN R E. A new approach to linear filtering and prediction problems [J]. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 1960, 82(1): 35 – 45.
- [122] NAHI N E. Optimal recursive estimation with uncertain observation [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1969, IT-15(4): 457 – 462.
- [123] HADITI M T, SCHWARTZ S C. Linear recursive state estimators under uncertain observations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, 24(6): 944 – 948.
- [124] ZHANG H S, SONG X M. New estimator and duality of control for multiplicative noise systems with applications to packet dropping and multiple input delay systems [C] // *Proceedings of IEEE International Conference on Control and Automation*. Piscataway, NJ: IEEE, 2009: 75 – 80.

- [125] HAN C Y, ZHANG H S, FENG G. Optimal linear estimator for discrete-time systems with random delays [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2012, 10(1): 19 – 27.
- [126] HESPANHA J P, NAGHSHTABRIZI P, XU Y. A Survey of recent results in networked control systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 138 – 162.
- [127] WILLEMS J L, WILLEMS J C. Robust stabilization of uncertain systems [J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1983, 21(3): 352 – 373.
- [128] MOHLER M M, KOLODZIEJ W J. Overview of stochastic bilinear control processes [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1980, 10(12): 913 – 919.
- [129] BERTSEKAS D P. *Dynamic Programming and Stochastic Control* [M]. New York: Academic Press, 1976.
- [130] KATAYAMA T. On the matrix Riccati equation for linear systems with a random gain [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(2): 770 – 771.
- [131] KU R T, ATHANS M. Further results on the uncertainty threshold principle [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(5): 866 – 868.
- [132] KLEINMAN D. Numerical solution of the state dependent noise problem [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(3): 419 – 420.
- [133] PHILLIS Y A. A smoothing algorithms for systems with multiplicative noise [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(4): 401 – 403.
- [134] RICHTER S, HODEL A S. Homotopy methods for the solution of general modified algebraic Riccati equations [C] // *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*. Piscataway, NJ: IEEE, 1990: 971 – 976.
- [135] RAMI M A, GHAOUI L E. LMI optimization for nonstandard Riccati equations arising in stochastic control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(11): 1666 – 1671.
- [136] ZHOU K, DOYLE J, GLOVER K. *Robust and Optimal Control* [M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
- [137] BRASLAVSKY J, MIDDLETON R, FREUDENBERG J. Feedback stabilisation over signal-to-noise ratio constrained channels [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(8): 1391 – 1403.

作者简介:

刘光明 (1977–), 男, 博士研究生, 主要研究方向为网络控制、最优和鲁棒控制, E-mail: lgmm_2008@126.com;

苏为洲 (1962–), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为反馈系统的性能极限、网络反馈系统的分析与设计、最优和鲁棒控制、网络系统分布式估计与信号处理, E-mail: wzhsu@scut.edu.cn.