

多输入多输出线性定常系统稳定裕度的分析与改进

李信栋[†], 苟兴宇

(北京控制工程研究所, 北京 100190; 空间智能控制技术重点实验室, 北京 100190)

摘要: 针对多输入多输出(MIMO)控制系统的稳定裕度求解问题, 首先分析了现有的回差阵奇异值法这一计算方法, 并得到其解决单输入单输出(SISO)系统的稳定裕度结论, 在此基础上, 提出两种基于系统回差阵的稳定裕度改进方法: 一种是在有限条件下利用矩阵的特征值代替奇异值来建立与稳定裕度关系的策略, 另一种是利用系统逆回差阵的行列式, 通过求其奇异值来计算系统稳定裕度; 最后结合工程实例, 通过数值仿真验证两种稳定裕度计算方法相比原方法都有不同程度的改进, 而且三种方法可以结合起来进行分析, 最大化的减小系统稳定裕度结果的保守性。

关键词: 回差阵奇异值法; 特征值; 逆回差阵; 稳定裕度

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Analysis and improvement of stability margin for multi-input multi-output linear time-invariant systems

LI Xin-dong[†], GOU Xing-yu

(Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;
Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing 100190, China)

Abstract: A method based on the singular value of the return difference matrix is investigated for calculating the stability margin of multi-input multi-output (MIMO) linear time invariant systems. Results are first obtained for single-input single-output linear systems. Then two improved methods are proposed for calculating the stability margin of MIMO linear systems based on the return difference matrix. In the first improved method, the minimum eigenvalue magnitude is used for replacing the minimum singular value of the return difference matrix, and a new relationship between the stability margin and the minimum eigenvalue magnitude is developed. In the other improved method, the stability margin is calculated through the minimum singular value of the inverse return difference matrix. Numerical simulation results clearly show the improvement in the solutions obtained from the improved methods, and the conservativeness of stability margin can be reduced effectively through the combination of three methods.

Key words: singular value of the return difference matrix; eigenvalue; inverse return difference matrix; stability margin

1 引言(Introduction)

稳定裕度是判断系统相对稳定性的一个重要依据。在经典控制理论中, 单输入单输出(single-input single-output, SISO)线性定常系统的稳定裕度常用频域下的相角裕度和幅值裕度来度量, 并且有明确的计算方法; 在工程中, 控制器参数的调节与优化是一个很重要的问题, 文献[1]就根据改进的D-分割法及与最大灵敏度、超调和调节时间有关的目标函数, 给出一种基于幅值裕度和相位裕度的比例-积分-微分(proportion-integral-derivative, PID)参数最优整定方法。SISO系统稳定裕度已能有效地应用于工程实际。然而, 对于多输入多输出(multi-input multi-output, MIMO)线性系统由于其各回路之间存在耦合, 以及频域理论的应

用限制, 目前没有公认明确的稳定裕度结论。

最近几十年众多学者另辟蹊径, 基于现代控制技术对MIMO系统稳定裕度的研究做了大量工作。利用频域下的Nyquist理论, Latchman和Crisalle等人提出临界方向理论(critical direction theory)^[2-3], 通过定义临界方向和临界扰动半径等概念来计算系统Nyquist鲁棒稳定裕度, 其中文献[3]将这一理论推广至MIMO线性系统。Doyle通过定义结构奇异值^[4] $\mu(\omega)$ 来分析结构不确定性MIMO线性系统稳定裕度; 文献[5]依据 μ 分析法处理多回路不确定性问题所具有的独特优势, 建立了 $\mu(\omega)$ 值与经典增益、相位裕度之间的转换关系。纪多红等人^[6]提出了基于 μ 分析的多变量系统稳定裕度评估方法, 评估结果的精确性取决于所估

计 μ 值的精确程度,若估计的 μ 值不准确,所得稳定裕度必然具有较大保守性.与结构奇异值 $\mu(\omega)$ 分析法类似,de Gaston R R E和Safonov G等人^[7-8]提出一种实多回路稳定裕度计算方法,基于映射理论通过迭代算法得到MIMO系统稳定裕度结果 k_m ,针对实参数扰动可写成对角矩阵的情形,文献[7]将稳定裕度的计算问题转化为计算 k_m 的上下界问题;文献[8]针对一类实参不确定性系统,解决了不确定性元素之间相关联时系统的稳定裕度问题,虽然实多回路稳定裕度理论可以得到比较准确的稳定裕度结果,但是同时也可看出这种方法的复杂程度,相对于其它MIMO系统稳定裕度的求取方法,其要求的计算量非常大.相比较而言,文献[9-10]提出的基于回差阵奇异值计算稳定裕度的策略所要求的计算量较小,结合奇异值理论,通过分析系统回差阵即可得到系统的稳定裕度,其中文献[10]将所提方法应用到某飞行器的两输入两输出横侧向姿态控制系统.文献[11]在回差阵奇异值法基础上进行了改进,同样应用到某型飞机的侧向运动系统进行了稳定裕度的分析.

鉴于回差阵奇异值法在计算MIMO系统稳定裕度方面的优越性,本文将对这一方法进行详细分析,在此方法的基础上作出改进,以减小系统稳定裕度计算的保守性.首先将这一理论退化为解决SISO线性定常系统的情形,得到相应的稳定裕度结论;其次尝试用矩阵的特征值代替奇异值来分析系统回差阵,得到基于回差阵特征值的稳定裕度改进方案;最后根据逆回差阵信息,结合矩阵奇异值理论得到MIMO系统稳定裕度计算的另一种改进方法.将3种方法所得稳定裕度结合起来分析,最大化的减小系统稳定裕度结果的保守性.

2 回差阵奇异值法 (Singular value of the return difference matrix)

奇异值分解是矩阵分解中的一个重要的技术手段,是现代数值分析的最基本和最重要的工具之一,可为控制系统的分析和设计提供有力支持.下面对回差阵奇异值法^[9-10]这一重要的稳定裕度理论进行分析.

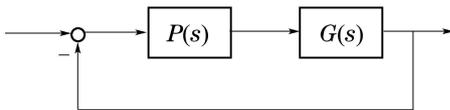


图1 系统模型

Fig. 1 System model

系统模型如图1所示,其中 $G(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为系统标称模型,则系统回差阵为 $I + G(s)$.在输入端引入不确定性指数阵形式量测阵

$$P(s) = \text{diag}\{k_i \exp(j\phi_i)\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

可知系统回差阵变为 $I + G(s)P(s)$,下面分析当所有回路中的 k_i 或 ϕ_i 同时变化时,系统仍能保证自身稳定性所容许其变化的最大值.已知对于标称模型的回差阵^[12],有

$$\det[I + G(s)] = \alpha \frac{\varphi_c(s)}{\varphi_o(s)}, \quad (2)$$

其中: $\varphi_c(s)$ 是闭环特征多项式, $\varphi_o(s)$ 是开环特征多项式, α 是常数.若闭环标称系统是渐近稳定的,说明 $\det[I + G(s)]$ 的分子 $\varphi_c(s)$ 的根全都具有负实部,因此令 $s = j\omega$,必有 $\det[I + G(s)] \neq 0$,根据奇异值的性质,则意味着

$$\underline{\sigma}(I + G) > 0,$$

即回差矩阵在工作频率范围内的最小奇异值就是稳定裕度的衡量标准.同理,若引入量测阵后的系统也是渐近稳定的,则有

$$\underline{\sigma}(I + GP) > 0.$$

本文研究的重点是系统由渐近稳定达到临界稳定时,量测阵 $P(s)$ 中 k_i 和 ϕ_i 所能变化的最大范围.根据 $P(s)$ 的定义知 k_i 不可能等于零,因此 P 是非奇异的,而又已知 $I + G$ 非奇异,利用矩阵分离特性可得

$$I + GP = [(P^{-1} - I)(I + G)^{-1} + I](I + G)P. \quad (3)$$

进一步可得

$$\bar{\sigma}[(P^{-1} - I)(I + G)^{-1}] < 1. \quad (4)$$

根据奇异值的性质

$$\bar{\sigma}(G)\bar{\sigma}(L) \geq \bar{\sigma}(GL), \quad (5a)$$

$$\bar{\sigma}(G) = \frac{1}{\underline{\sigma}(G^{-1})}, \quad (5b)$$

分析式(4),可知若

$$\bar{\sigma}[(P^{-1} - I)(I + G)^{-1}] \leq \frac{\bar{\sigma}(P^{-1} - I)}{\underline{\sigma}(I + G)} < 1$$

成立,则可得系统稳定的充分条件为

$$\bar{\sigma}(P^{-1} - I) < \underline{\sigma}(I + G). \quad (6)$$

若考虑增益和相位在每个通道同时变化的情况,应用方程(1),可得确保MIMO线性定常系统稳定的充分条件

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(P^{-1} - I) = \\ \max_{i=1}^n \sqrt{\left(1 - \frac{1}{k_i}\right)^2 + \frac{2}{k_i}(1 - \cos \phi_i)} \leq \\ \underline{\sigma}(I + G). \end{aligned} \quad (7)$$

将回归矩阵最小奇异值 $\underline{\sigma}(I + G)$ 作为参数,若 $\underline{\sigma}(I + G) \geq m$,根据式(7),分别令 $\phi = 0^\circ$ 和 $k = 1$,可以得到多变量系统每个通道同时确保的幅值裕度GM和相位裕度PM表达式:

$$\text{GM} = -20 \lg(1 - m), \quad \text{PM} = 2 \arcsin \frac{m}{2}. \quad (8)$$

通过上面的分析可看出, 保证系统稳定的条件式(4)是一个保守条件, 因此不可避免地, 采用回差阵奇异值法来求取系统的稳定裕度也会导致保守的结果, 这是此方法仍需改进之处.

2.1 退化结果(Degradation results)

本节分析MIMO线性系统的稳定裕度结果退化为SISO系统的情形. 对于SISO线性系统 $g(s)$, 不确定性结构相应的由不确定性量测阵变为如下标量形式:

$$p(j\omega) = ke^{j\phi}. \quad (9)$$

接下来探讨系统达到临界稳定状态时 $p(s)$ 中参数 k 和 ϕ 所能变化的最大范围. 首先, 笔者假定标称状态下系统是稳定的, 即满足条件

$$|1 + g(j\omega)| > 0. \quad (10)$$

引入不确定性 $p(s)$, 若使系统仍保持稳定, 则有

$$|1 + pg(j\omega)| > 0.$$

利用分离特性:

$$1 + pg(j\omega) = \left[\left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{1 + g(j\omega)} + 1 \right] [1 + g(j\omega)] p.$$

根据 $p(s)$ 的定义可知 $p(s) > 0$, 结合式(10), 由上式可得

$$\left| \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{1 + g(j\omega)} + 1 \right| > 0. \quad (11)$$

分析知上述不等式等价于

$$\begin{cases} \left| \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{1 + g(j\omega)} \right| > 1, \\ \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{1 + g(j\omega)} = 1, \\ \left| \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{1 + g(j\omega)} \right| < 1. \end{cases}$$

对第一个条件进行整理, 可等价于

$$p < \frac{1}{1 + |1 + g(j\omega)|},$$

或

$$p > \frac{1}{1 - |1 + g(j\omega)|}.$$

考虑到系统 $g(j\omega)$ 的一般性, 根据此条件不能得到明确的稳定裕度量测值 $p(j\omega)$ 使得式(11)成立. 类似地, 对于第2个条件式, 可整理得

$$p = \frac{1}{2 + g(j\omega)}.$$

上式说明稳定裕度量测值 $p(j\omega)$ 随 $g(j\omega)$ 变化, 同样不能得到满足式(11)的明确稳定裕度结果. 因此, 对于一般系统 $g(j\omega)$, 可知使式(11)成立的充分条件为

$$\left| \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \frac{1}{1 + g(j\omega)} \right| < 1.$$

与上文中MIMO线性系统分析类似, 这里可得系统稳定的一个充分条件:

$$\left| \frac{1}{p} - 1 \right| < |1 + g(j\omega)|. \quad (12)$$

考虑回路中增益和相位的变化, 将方程(9)代入上式, 可得确保系统稳定的充分条件:

$$\left| \frac{1}{p} - 1 \right| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 + \frac{2}{k}(1 - \cos \phi)} \leq \min_{\omega} [1 + g(j\omega)]. \quad (13)$$

将 $\min[1 + g(j\omega)]$ 作为参数, 若 $\min[1 + g(j\omega)] \geq m$, 根据上式, 则可得SISO系统确保的幅值裕度GM和相位裕度PM为

$$\text{GM} = -20 \lg(1 - m), \quad \text{PM} = 2 \arcsin \frac{m}{2}. \quad (14)$$

从上式所示结论可看出, 回差阵奇异值法是在一个频率点处得到了系统增益裕度和相位裕度两者的计算表达式, 这和经典控制里SISO系统稳定裕度的定义及计算结果不同, 经典控制理论中需要两个频率点(即截止频率和穿越频率)来分别确定系统的相位裕度和增益裕度两个裕度指标, 可认为此处差异是回差阵奇异值法计算结果的保守性在SISO线性定常系统下的具体体现. 然而同样基于这一点可以进行如下大胆推测: 对于MIMO线性定常系统, 可否通过定义一个指标即可有效地衡量整个系统的相对稳定程度.

3 回差阵特征值法(Eigenvalue of the return difference matrix)

特征值分解是分析矩阵特性的另外一个重要工具, 矩阵特征值和奇异值之间有着紧密联系, 其中重要一点就是特征值的幅值是最小奇异值的上界; 本节在文献[10-11]的基础上, 针对前面提出的回差阵奇异值法具有的保守性, 下面尝试利用特征值代替奇异值来进行MIMO线性系统稳定裕度的分析, 并给出详细分析过程.

对于如图1所示系统, 同样在输入端引入不确定性指数阵形式量测阵 $P(s)$, 此时标称状态下系统是稳定的充要条件变为

$$\min |\lambda(I + G)| > 0,$$

即利用回差矩阵在工作频率范围内的最小特征值衡量稳定裕度. 若加入不确定性阵 $P(s)$ 后系统仍稳定, 则有

$$\min |\lambda(I + GP(s))| > 0. \quad (15)$$

利用如式(3)所示矩阵分离特性, 同样假定 $P(s)$ 是非奇异的, 且已知 $I + G$ 非奇异. 因此矩阵 $P(s)$ 和 $I + G$ 没有为零的特征值, 根据特征值与矩阵行列式的关系,

可知只有下面的条件式:

$$\max |\lambda[(P^{-1} - I)(I + G)^{-1}]| < 1 \quad (16)$$

成立,才能够满足式(15)的不等式要求.这里需要注意的是,矩阵特征值不像奇异值那样具有类似如式(5)所示不等式的性质.因此,对于上面式(16),只有当对角阵 $P(s)$ 的所有对角元素相同,即满足

$$P(s) = \text{diag}[k \exp(j\phi), \dots, k \exp(j\phi)] = k \exp(j\phi)I, \quad (17)$$

才有

$$\begin{aligned} \max |\lambda[(P^{-1} - I)(I + G)^{-1}]| &= \\ \max |\lambda[(k \exp(j\phi)^{-1}I - I)(I + G)^{-1}]| &= \\ [k \exp(j\phi)^{-1} - 1] \max |\lambda[(I + G)^{-1}]| &= \\ \max |\lambda(P^{-1} - I)| \max |\lambda[(I + G)^{-1}]|. & \end{aligned} \quad (18)$$

对于矩阵特征值来说,条件

$$\max |\lambda(A)| = (\min |\lambda(A^{-1})|)^{-1}$$

恒成立.在此条件下对上面式(18)进一步整理,可得

$$\begin{aligned} \max |\lambda(P^{-1} - I)| \max |\lambda[(I + G)^{-1}]| &= \\ \max |\lambda(P^{-1} - I)| (\min |\lambda(I + G)|)^{-1}. & \end{aligned} \quad (19)$$

因此要式(15)成立,需满足条件

$$\max |\lambda(P^{-1} - I)| (\min |\lambda(I + G)|)^{-1} < 1,$$

即

$$\max |\lambda(P^{-1} - I)| < \min |\lambda(I + G)|. \quad (20)$$

上式就是使系统稳定的最终的充分条件;考虑增益和相位在每个通道同时变化的情况,根据方程(20),可得不确定系统稳定的充分条件为

$$\begin{aligned} \max |\lambda(P^{-1} - I)| &= \\ \sqrt{(1 - \frac{1}{k})^2 + \frac{2}{k}(1 - \cos \phi)} &< \\ \min |\lambda(I + G)|. & \end{aligned} \quad (21)$$

其中 $\min |\lambda(I + G)|$ 与稳定裕度的关系如式(8)所示.由于特征值法本身性质的不足,导致稳定裕度的计算不精确甚至是错误的.性质的不足体现在:

在推导出式(20)所示系统稳定充分条件的过程中,不能使用类似于如式(5)所示不等式的奇异值性质,这种性质在特征值理论中并不是恒成立的;为推导出式(20)必须要求不确定对角阵 $P(s)$ 的所有对角元素相同,即满足式(17).与文献[11]相比,本文不但给出了利用特征值代替奇异值来进行MIMO线性系统稳定裕度的分析的详细过程,并且用 $\min |\lambda(I + G)|$ 代替文献[11]中的 $|\underline{\lambda}(I + G)|$ 给出了最终系统稳定充分条件,使结果更加准确.

注1 虽然本节在分析过程中对量测阵的形式有一定的限制条件,但是正如在开头所述,特征值的幅值是最小奇异值的上界,应用特征值幅值的最小值代替最小奇异值可明显改善系统稳定裕度结果的保守性,这一点使得本节分析结果更具有实际工程价值和意义.

4 逆回差阵奇异值法(Singular value of the inverse return difference matrix)

上文中讲到可通过计算回差阵奇异值来求取MIMO系统稳定裕度的算法,算法指出若标称系统闭环稳定,则闭环特征多项式 $\varphi_c(s)$ 的根全具有负实部,而且根据式(2),可进一步得 $\det[I + G(s)] \neq 0$,这一点是采用奇异值理论分析MIMO系统稳定裕度的理论基础.

根据此出发点,下面从另一个角度分析系统的稳定性及稳定裕度.首先假设标称系统是可逆的,即 $G^{-1}(s)$ 存在,系统回差阵可进行如下分解:

$$I + G(s) = G(s)[I + G^{-1}(s)].$$

对上式两边分别取行列式,可得

$$\det[I + G(s)] = \det[G(s)] \det[I + G^{-1}(s)].$$

结合式(2),可进一步得

$$\det[I + G^{-1}(s)] = \alpha \frac{\varphi_c(s)}{\varphi_z(s)}, \quad (22)$$

其中 $\varphi_z(s)$ 是开环系统零点特征多项式.通过上式可以看出,逆回差阵 $I + G^{-1}(s)$ 同样可以与闭环特征多项式建立联系,应用奇异值理论分析 $\det[I + G^{-1}(s)]$,亦能得到系统稳定裕度,称这种方法为逆回差阵奇异值法.

类似的,若标称系统闭环稳定,则有

$$\det[I + G^{-1}(s)] \neq 0. \quad (23)$$

可知 $I + G^{-1}(s)$ 是可逆的,即

$$\underline{\sigma}[I + G^{-1}(s)] > 0.$$

加入不确定量测阵 $P(s)$ 后系统仍保持稳定的条件为

$$\det[I + (GP(s))^{-1}] \neq 0, \quad (24)$$

即 $\underline{\sigma}[I + (GP)^{-1}] > 0$.利用矩阵分离特性

$$I + (GP)^{-1} =$$

$$P^{-1}[(P - I)(I + G^{-1})^{-1} + I](I + G^{-1}).$$

根据 $P(s)$ 的定义,可知 $P^{-1}(s)$ 是非奇异的,又知 $I + G^{-1}(s)$ 亦是非奇异的,可得式(24)成立的一个充分条件为

$$\bar{\sigma}[(P - I)(I + G^{-1})^{-1}] < 1. \quad (25)$$

由如式(5)所示奇异值性质,可得

$$\bar{\sigma}[(P - I)(I + G^{-1})^{-1}] \leq$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(P - I)\bar{\sigma}[(I + G^{-1})^{-1}] = \\ \bar{\sigma}(P - I)\frac{1}{\underline{\sigma}(I + G^{-1})}. \end{aligned} \quad (26)$$

联系式(25), 令不等式(26)右边项小于1, 则不确定系统稳定的充分条件变为

$$\bar{\sigma}(P - I) < \underline{\sigma}(I + G^{-1}). \quad (27)$$

考虑增益和相位在每个通道同时变化的情况, 结合 $P(s)$ 的定义式, 可得系统稳定的充分条件

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(P - I) = \\ \max_i^n \sqrt{(1 - k_i)^2 + 2k_i(1 - \cos \phi_i)} \leq \\ \underline{\sigma}(I + G^{-1}). \end{aligned} \quad (28)$$

将回归矩阵最小奇异值 $\underline{\sigma}(I + G^{-1})$ 作为参数, 根据条件式(28), 可确定系统保持稳定所容许的每个通道增益和相位的同时变化范围. 具体地, 分别令 $\phi = 0^\circ$ 和 $k = 1$, 得到MIMO线性系统允许各回路同时变化的最大幅值裕度GM和相位裕度PM分别为

$$GM = 20 \lg(1 + m), \quad PM = 2 \arcsin \frac{m}{2}. \quad (29)$$

通过上述分析可以看出, 利用系统逆回差阵同样可以得到系统的稳定裕度, 将其作为回差阵奇异值法的有效补充, 可减小稳定裕度计算结果的保守性. 至此分析得到了基于系统回差阵及逆回差阵信息的两种稳定裕度改进算法.

5 实例(Examples)

下面通过工程实例对文中所提出的两种MIMO线性定常系统稳定裕度改进方法—回差阵特征值法和逆回差阵奇异值法进行验证, 证明两者在回差阵奇异值法的基础上都取得了不同程度的改进.

例 1 以文献[13]中本体与天线同时机动的两刚体卫星系统为例, 对所提出的新方法进行验证. 针对文献中的非线性系统, 在天线指向角在俯仰平面内小角度机动的假设条件下, 可得其动力学方程, 具体形式如下:

$$\begin{cases} 3422.398\ddot{\theta} - 15.082\ddot{\beta} = M_{cy}, \\ -15.082\ddot{\theta} + 0.438\ddot{\beta} + 0.95\dot{\beta} + 175\beta = 175\beta_f, \end{cases}$$

其中: θ 为卫星姿态转角, β 为天线转角, M_{cy} 为绕航天器Y轴的俯仰姿态控制力矩, β_f 为天线指令输入转角. 若选择输入和输出分别为

$$u = [M_{cy} \ \beta_f]^T, \quad y = [\theta \ \beta]^T,$$

可得对象传递函数矩阵为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\begin{bmatrix} 0.438s^2 + 0.95s + 175 & 2639.3s^2 \\ 15.082s^2 & 598920s^2 \end{bmatrix}}{s^2(1271.5s^2 + 3251.3s + 598920)}.$$

设计控制器

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{2400s}{s + 0.7} & \frac{100s}{s + 1} \\ -\frac{0.05s}{s + 0.7} & \frac{s + 1}{s(s + 1.2)} \end{bmatrix}.$$

在计算稳定裕度之前, 首先要判断系统的稳定性, 只有稳定的系统的稳定裕度才有意义. 具体地, 可通过下面的定理证明系统的稳定性.

定理 1 多变量反馈系统为渐近稳定的充分必要条件是^[12]

$$\text{enc det}[I + G(s)] + n_0 = 0,$$

其中: n_0 是系统开环不稳定极点个数, $\text{enc det}[I + G(s)]$ 表示 $\det[I + G(s)]$ 的Nyquist图以顺时针方向包围原点的次数, 定理指出系统稳定的充分必要条件是 $\det[I + G(s)]$ 的Nyquist曲线逆时针包围原点的次数等于系统的开环不稳定极点个数. 如果开环系统是稳定的, 即 $n_0 = 0$, 那么MIMO闭环系统稳定的充分必要条件是 $\det[I + G(s)]$ 的Nyquist曲线不包围原点.

计算上述系统回差阵 $I_2 + G(s)K(s)$ 及 $\det[I_2 + G(s)K(s)]$. 明显地, 系统没有右半平面开环极点, 可知系统是开环稳定的.

进一步作 $\det[I_2 + G(s)K(s)]$ 的Nyquist曲线如图2所示.

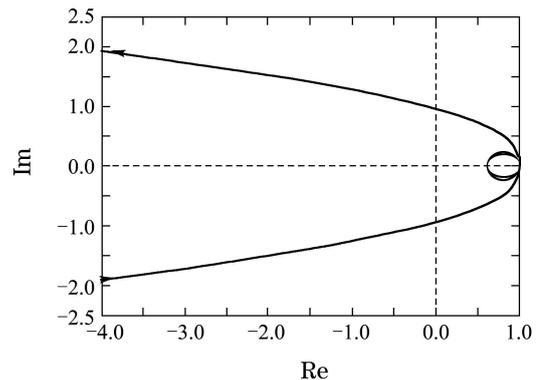


图 2 $\det[I_2 + G(s)]$ 的奈奎斯特图
Fig. 2 Nyquist diagram of $\det[I_2 + G(s)]$

由图2可知 $\det[I_2 + G(s)K(s)]$ 的Nyquist曲线不包围原点, 说明闭环系统稳定. 若设计卫星本体俯仰轴姿态期望跟踪曲线和卫星天线指向角期望跟踪曲线分别为

$$\begin{aligned} \theta_d &= \frac{3\pi}{180} \frac{(1 - e^{-t})(1 - e^{-0.0001t^3})}{1 + e^{-t}}, \\ \beta_d &= \begin{cases} \frac{0.5\pi}{180} \sin(\frac{\pi}{30}t - \frac{\pi}{2}) + \frac{0.5\pi}{180}, & 0 \leq t < 60, \\ 0, & t \geq 60. \end{cases} \end{aligned}$$

在零初始条件下得到系统的跟踪误差曲线见图3.

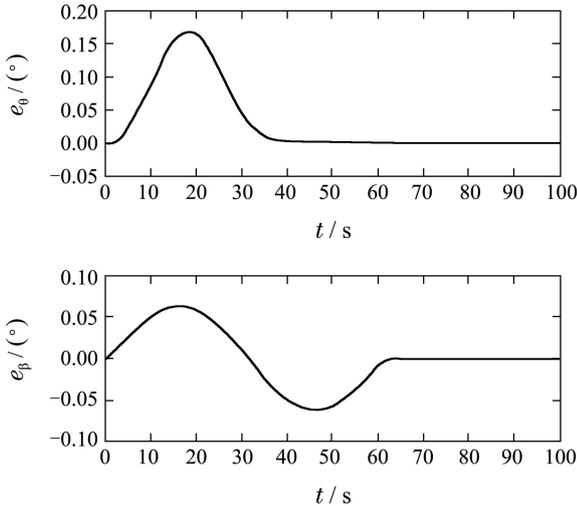


图3 星本体俯仰姿态和天线指向角的跟踪误差曲线
Fig. 3 The error of the satellite pitch attitude and antenna pointing angle

通过图3的仿真曲线可以看出系统是稳定的且误差趋近于0, 接下来分别计算3种方法所求得稳定裕度结果.

首先采用回差阵奇异值法, 根据其回差阵 $I_2 + G(s)K(s)$, 通过MATLAB仿真工具可求得回差阵最小奇异值为 $\min \sigma(I + GK) = 0.6069$, 根据式(8)可得相应的稳定裕度为: 当所有通道的幅值不变时, 允许所有通道的相位变化是 35.3° , 当所有通道的相位不变时, 允许所有通道的幅值变化是 8.11 dB .

对于回差阵特征值法, 同样根据回差阵 $I_2 + G(s)K(s)$, 然后通过仿真可求得回差阵特征值幅值的最小值为 $\min |\lambda(I + GK)| = 0.6109$, 可得相应的稳定裕度为: 当所有通道的幅值不变时, 允许所有通道的相位变化是 35.6° , 当所有通道的相位不变时, 允许所有通道的幅值变化是 8.2 dB .

最后, 采用逆回差阵奇异值法, 需计算系统逆回差阵 $I_2 + [G(s)K(s)]^{-1}$, 然后通过仿真工具可求得逆回差阵最小奇异值为 $\min \sigma[I + (GK)^{-1}] = 0.7590$, 根据式(29)可得相应的稳定裕度为: 当所有通道的幅值不变时, 允许所有通道的相位裕度是 44.6° , 当所有通道的相位不变时, 允许所有通道的幅值裕度是 4.9 dB .

为方便对3种方法所求得稳定裕度结果进行比较, 将3者的结果见表1.

表1 3种方法所求系统稳定裕度结果
Table 1 Stability margin of the three methods

| 方法 | 增益裕度 / dB | 相位裕度 / ($^\circ$) |
|----------|-----------|---------------------|
| 回差阵奇异值法 | 8.11 | 35.3 |
| 回差阵特征值法 | 8.2 | 35.6 |
| 逆回差阵奇异值法 | 4.9 | 44.6 |

根据表1所示, 对比稳定裕度结果可看出, 两种改

进后方法的相位裕度比回差阵奇异值法都有所提高, 其中逆回差阵奇异值法求得的相位裕度结果最大, 为 44.6° . 回差阵特征值法求得的增益裕度结果最大, 为 8.2 dB . 但同时也应该看到, 逆回差阵奇异值法求得的增益裕度结果较小; 因此, 可以将3种方法所求得的稳定裕度结果结合起来一起考虑, 得到最终保守性较小的系统稳定裕度. 由本文中例子中可知, 系统保持稳定所容许的两个回路的增益可同时增大 8.2 dB , 或相位同时滞后 44.6° .

下面进一步对所求稳定裕度结果进行分析, 通过仿真验证其精确性和有效性. 根据计算结果知系统增益裕度为 8.2 dB , 即各回路增益可同时增大 2.57 倍. 对系统进行仿真可得跟踪误差曲线如图4所示.

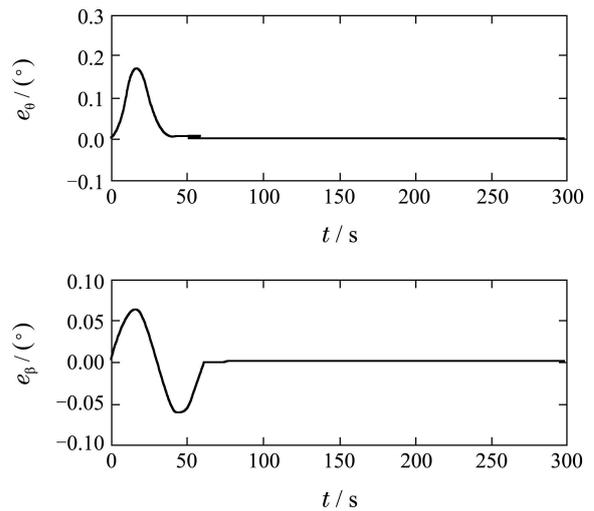


图4 系统增益增大至2.57倍时的跟踪误差曲线
Fig. 4 Tracking errors with the gain of system increasing to 2.57 times

从图4中可以看出系统仍是稳定的, 若继续增大各回路增益至 2.59 倍, 可得系统仿真曲线如图5所示.

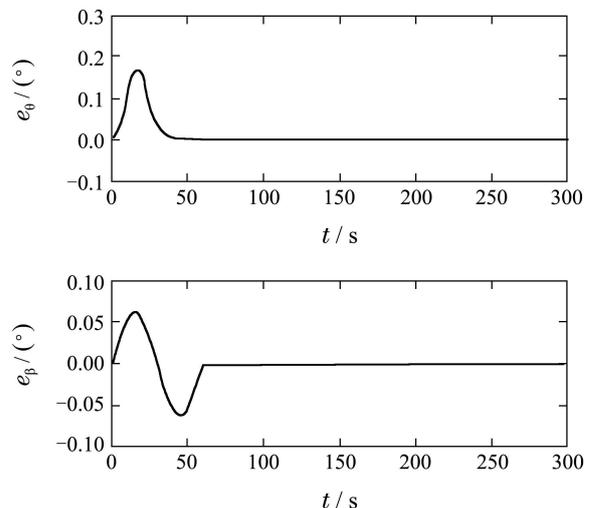


图5 系统增益增大至2.59倍时的跟踪误差曲线
Fig. 5 Tracking errors with the gain of system increasing to 2.59 times

从图5中可以看出,天线指向角误差曲线已有发散趋势,说明系统临界不稳定.通过上述仿真分析可知,利用文中改进方法所求得稳定裕度已经非常接近系统真实稳定裕度,有效地减小了计算结果的保守性.

6 结论(Conclusion)

本文针对回差阵奇异值法这一计算MIMO系统稳定裕度的重要理论方法进行了详细分析,讨论这一理论退化为解决SISO线性定常系统的情形,得到相应的稳定裕度结论;然后基于回差阵信息对系统稳定裕度分析方法进行改进.首先尝试使用矩阵的特征值代替奇异值来分析系统回差阵,在某些条件限制下得到了基于回差阵特征值的稳定裕度结果;此外,利用系统逆回差阵理论,借助矩阵奇异值计算系统的稳定裕度;最后通过实例分析指出三种策略相结合使用可以有效减小所计算系统稳定裕度的保守性.本文虽然基于系统的回差阵及逆回差阵信息,针对MIMO线性定常系统稳定裕度的分析做了一定的工作,但是这些算法仍有不足;因此下一步的工作重点仍将是提出公认的更为有效的保守性更小的稳定裕度指标和算法;或者如文中所推断,设法通过定义一个新的指标来确切衡量系统的稳定裕度.

参考文献(References):

- [1] 欧林林, 顾诞英, 张卫东. 基于幅值裕度和相位裕度的PID参数最优整定方法[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 837–840.
(OU Linlin, GU Danying, ZHANG Weidong. Optimal tuning method of PID controller based on gain margin and phase margin[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 837–840.)
- [2] AL-SHAMALI S A, JI B W, CRISALLE O D, et al. The nyquist robust sensitivity margin for uncertain closed-loop systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2005, 15(14): 619–634.
- [3] SON J E, MANI A S, LATCHMAN H A. Robustness analysis for MIMO aystems with unstructured uncertainties [C] // *Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Control and Automation*. New York: IEEE, 2010: 1333–1337.
- [4] DOYLE J. Analysis of feedback systems with structured uncertainties [J]. *IEE Proceedings Part D*, 1982, 129(6): 242–250.
- [5] TSAO T T, LEE F C, AUGENSTEIN D. Relationship between robustness μ -analysis and classical stability margins [C] // *Proceedings of IEEE Aerospace Conference*. New York: IEEE, 1998, 4: 481–486.
- [6] 纪多红, 刘林, 唐强. μ 分析在飞控系统稳定裕度评估中的应用[J]. 飞行力学, 2007, 25(4): 64–68.
(JI duohong, LIU lin, TANG qiang. Application of μ analysis in clearance of stability margin of flight control system [J]. *Flight Dynamics*, 2007, 25(4): 64–68.)
- [7] DE GASTON R R E, SAFONOV M G. Exact calculation of the multiloop stability margin [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(2): 156–171.
- [8] SIDERIS A, DE GASTON R R E. Multivariable stability margin calculation with uncertain correlated parameters [C] // *Proceedings of the 25th Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 1986, 766–771.
- [9] LEHTOMAKI N A, SANDELL N R, ATHANS M. Robustness results in linear-quadratic gaussian based multivariable control designs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, 26(1): 75–92.
- [10] MUKHOPADHYAY V, NEWSOM J R. Application of matrix singular value properties for evaluating gain and phase margins of multiloop systems [C] // *AIAA Guidance Navigation and Control Conference*. California: AIAA, 1982, 420–428.
- [11] 吴斌, 程鹏. 多变量飞控系统的稳定裕度分析[J]. 航空学报, 1998, 19(6): 657–661.
(WU Bin, CHENG Peng. Stability margin analysis of the multiloop flight control systems [J]. *Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica*, 1998, 19(6): 657–661.)
- [12] 白方周, 庞国仲. 多变量频域理论与设计技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 1988.
(BAI Fangzhou, PANG Guozhong. *Multivariable Frequency Domain Theory and Design Technology* [M]. Beijing: National Defence Industry Publishing Company, 1988.)
- [13] 曾海波. 挠性多体卫星指向控制设计研究[D]. 北京: 北京控制工程研究所, 2003
(ZENG Haibo. *Study on the design of flexible multibody satellite pointing control* [D]. Beijing: Beijing Institute of Control Engineering, 2003.)

作者简介:

李信栋 (1986–), 男, 博士研究生, 研究方向为航天器姿态控制, E-mail: lxdongliu@163.com;

苟兴宇 (1970–), 男, 研究员, 博士生导师, 研究方向为航天器姿态、轨道动力学与控制, E-mail: gouxy@bice.org.cn.