

无领航者的多Euler-Lagrange系统有限时间一致性算法

刘源[†], 王仕成, 闵海波, 刘志国, 廖守亿

(第二炮兵工程大学 301教研室, 西安 陕西 710025)

摘要: 本文针对无领航者的多Euler-Lagrange系统, 设计了一种分布式有限时间一致性控制算法. 该算法只利用相邻个体的位置信息和自身的速度信息作为输入, 使得网络化Euler-Lagrange系统在有限时间内达到一致性. 考虑到闭环Euler-Lagrange系统的非自主性, 运用Matrosov定理、Lyapunov稳定性定理和有限时间稳定性定理等对所设计的控制器的稳定性进行了证明, 并进行了数值仿真实验, 验证了控制器的有效性.

关键词: 协调控制; 有限时间稳定性; Euler-Lagrange系统; 一致性

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Decentralized finite-time leaderless consensus algorithm for networked Euler-Lagrange systems

LIU Yuan[†], WANG Shi-cheng, MIN Hai-bo, LIU Zhi-guo, LIAO Shou-yi

(Department 301, The Second Artillery Engineering University, Xi'an Shaanxi 710025, China)

Abstract: This paper considers finite time consensus problem of networked Euler-Lagrange systems. For each agent, finite time consensus algorithm is designed by using the position information of its neighbors and the velocity information of its own. Because the closed-loop networked Euler-Lagrange equations are non-autonomous, we need to use Matrosov's theorem, Lyapunov stability theorem and the finite-time stability theory for convergence analysis. Numerical simulation is conducted to validate the effectiveness of the controller.

Key words: coordination control; finite-time stability; Euler-Lagrange systems; consensus

1 引言(Introduction)

随着计算机技术、网络技术和通信技术的发展, 多智能体(multi-agent system, MAS)的协调控制成为控制领域的研究热点. 类似于鱼群捕食、鸟群迁徙等生物群体性优势, 多智能体间的互相协同可以大大提高个体行为的智能化程度, 从而完成单个个体无法完成的复杂任务. 多智能体协调控制具有高效率、高灵活性、高容错性和内在的并行性等优点. 近年来, 针对MAS分布式协调控制的研究取得了丰硕的成果(可参考综述性文献[1-3]).

一致性问题为MAS分布式协调控制领域的一个主要研究内容, 所谓一致性是指系统中各个体通过信息交换而最终使得状态达到一致. 一致性问题的研究可分为两方面内容, 有领航者一致性(leader-following consensus)和无领航者一致性(leaderless consensus). 区别于有领航者时所有个体都趋近于领航者的状态, 无领航者一致性问题更关注于如何使整个系统趋近于相同的状态, 而不要求具体趋近于什么样的状态.

无领航者一致性问题具有非常广泛的应用环境, 比如会合控制、聚结控制和姿态协同等^[2].

Euler-Lagrange(EL)方程能够刻画大量实际的机械系统(如航天器、机器人、机械臂、地面车辆等), 使得多EL协调控制具有非常广阔的应用前景, 可广泛应用于工业生产、空间探索、卫星保障、灾难救援等. 该领域的研究成为近年来一个新的热点. 到目前为止, 针对EL系统协调控制的研究取得了一定的成果, 如文献[4-17]等, 这里不一一列举. 目前已有的大多数协调控制算法都是使得系统状态达到渐近稳定. 然而, 在实际的应用中, 多智能体系统的收敛速度十分重要, 有限时间一致性问题具有更强的工程应用意义. 目前多智能体协调控制领域对于有限时间一致性算法的研究主要集中于简单的线性一阶和二阶系统, 对于这些系统的有限时间一致性控制问题, 研究方法主要有两类: 第一, 利用齐次性理论. 典型的参考文献如[18-19]等; 第二, 有限时间Lyapunov稳定性定理, 如文献[20-22]等. 笔者发现, 这些方法大部分都用到了

符号函数,一般的线性算法只能保证系统渐近收敛,而符号函数的运用能使系统实现有限时间收敛.虽然对于线性一阶和高阶系统的研究取得了一定的成果,但针对非线性的多EL系统有限时间协调算法的研究目前还不多见.文献[16]运用滑模控制思想,提出了一种基于有领航者(leader-following)构架的有限时间跟踪算法,文献[17]研究了多领航者的静态和动态跟踪问题,得到了有限时间稳定性算法.然而,现有的多EL系统有限时间协调算法都是基于leader-following构架下进行的,对于无领航者(leaderless)构架下的研究却未曾见到.究其原因,在证明闭环多EL系统收敛的过程中,大都都需要用到LaSalle定理,而LaSalle定理要求系统为自主系统.对于有领航者的EL系统,以领航者的状态作为参考,闭环EL方程总能转换为自主系统,这样就可以运用LaSalle定理进行证明.而无领航者的多EL系统中,闭环的EL系统为非自主系统,使LaSalle定理不再适用,给算法的设计和稳定性证明带来了困难^[12].

受启发于文献[12,23],本文对无领航者的多EL系统协调控制进行了研究,得到了有限时间一致性算法,运用Matrosov定理、系统齐次性相关理论和有限时间稳定性理论等,从理论上证明了控制器的稳定性,并用数值仿真实验验证了控制器的有效性.和已有文献相比,本文有以下特色:1) 目前为止,还未见到无领航者时的多EL系统分布式有限时间一致性算法,本文对算法的设计做了初步的研究;2) 有限时间算法设计过程中,运用Matrosov定理解决了无领航者时闭环EL系统的稳定性证明问题,从理论上证明了没有领航者状态作为参考,系统也能实现有限时间一致性.

2 问题描述(Problem formulation)

2.1 Euler-Lagrange方程(Euler-Lagrange equation)

假设编队EL系统中有 n 个个体,第 $i(i \in \mathcal{I}, \mathcal{I} = \{1, \dots, n\})$ 个个体的运动方程为

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i = \tau_i(t), \quad (1)$$

其中: $q_i \in \mathbb{R}^p$ 为系统的状态, $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为对称的惯性矩阵, $C_i(q_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 为科里奥利力与向心力矩阵,施加在系统上的 p 维广义力或力矩($\tau_i(t) \in \mathbb{R}^p$). $\dot{M}_i - 2C_i$ 为反对称矩阵,这种对称性可视为EL系统能量保守性的矩阵表示.概括而言,典型的EL系统具有以下3个性质^[14]:

性质1 惯性矩阵 $M_i(q_i)$ 有界,即

$$0 < \lambda_m \{M_i(q_i)\} I \leq M_i(q_i) \leq \lambda_M \{M_i(q_i)\} I < \infty.$$

性质2 矩阵 $\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)$ 为反对称矩阵,即,对于给定向量 $r \in \mathbb{R}^p$,有

$$r^T [\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)] r = 0.$$

性质3 $\forall q_i \in \mathbb{R}^n \exists k_{c_i} \in \mathbb{R}_{>0}$,使得

$$|C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i| \leq k_{c_i} |\dot{q}_i|^2.$$

2.2 代数图论(Algebraic graph theory)

用图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ 来表示编队中 n 个个体的信息交换.图 $\mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 由顶点集 $\mathcal{V} = \{v_i\}$, $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$, 边集 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 和邻接矩阵 $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}$ 组成.每条边都可由两个不同的顶点(v_i, v_j)所确定,其中 v_i 称为头(head), v_j 称为尾(tail).若 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in \mathcal{E}$,则称图为无向的或对称的;反之,称该图为有向的.对于有向图,以 v_i 作为头的边的数目称为节点 v_i 的出度,以 v_i 作为尾的边的数目称为节点 v_i 的入度,加权图的邻接矩阵 $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}$ 为一个 $n \times n$ 矩阵,其中: $a_{ii} = 0$,当 $i \neq j$ 且 $a_{ij} \in \mathcal{E}$ 时, $a_{ij} = 1$.

引理1 假设 $\varsigma_i \in \mathbb{R}^p$, $\zeta_i \in \mathbb{R}^p$, $a_{ij} = a_{ji}$, $0 < \alpha < 1$, ψ 为连续的奇函数,于是可得

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\varsigma_i - \varsigma_j)^T \psi(\text{sig}(\zeta_i - \zeta_j)^\alpha) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \varsigma_i^T \psi(\text{sig}(\zeta_i - \zeta_j)^\alpha).$$

引理1的证明类似于文献[24]中引理3.1的证明过程,这里不再赘述.

2.3 有限时间稳定定理(Finite time stability theorem)

定义1 考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x(0) = x_0, x \in \mathbb{R}^p, \quad (2)$$

其中: $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ 为定义域 U 到 p 维空间 \mathbb{R}^p 的向量函数,若对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{R}^p$,其中 $r_i > 0 (i = 1, 2, \dots, p)$,使得 $f(x)$ 满足

$$f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \varepsilon^{r_2} x_2, \dots, \varepsilon^{r_p} x_p) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad (3)$$

其中: $i = 1, \dots, p$, $k \geq -\max\{r_i, i = 1, 2, \dots, n\}$,则称 $f(x)$ 关于 (r_1, \dots, r_p) 具有齐次度 k .若向量函数 $f(x)$ 是齐次的,则称系统(2)是齐次的^[23].

引理2 考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x) + \hat{f}(x), f(0) = 0, x \in \mathbb{R}^p, \quad (4)$$

其中: $f(x)$ 是连续函数,其关于 (r_1, \dots, r_p) 具有齐次度 $k < 0$; $\hat{f}(x)$ 满足 $\hat{f}(0) = 0$.假设 $x = 0$ 是系统(2)的渐近稳定点,那么如果对于 $\forall x \neq 0$ 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_p} x_p)}{\varepsilon^{k+r_i}} = 0, i = 1, \dots, p,$$

并且 $x = 0$ 是系统(4)的全局渐近稳定点,则 $x = 0$ 是系统(4)的全局有限时间收敛点^[24].

2.4 其他引理(Other lemma)

引理3 系统 $\dot{x} = f(t, x)$,其中对于函数 f ,方程 $f(t, 0) \equiv 0$,并且系统存在唯一解. $V(x, t)$ 和 $W(x, t)$ 为定义域 D 上的连续函数并且满足以下条件:

- 1) $V(x, t)$ 为正定非增函数;
- 2) $\dot{V}(x, t) \leq \text{slant } U(x) \leq 0$, 其中 $U(x)$ 连续;
- 3) $|W(x, t)|$ 有界;
- 4) $\max(d(x, M), |\dot{W}(x, t)|) \geq \gamma(\|x\|)$, 其中: $M = \{x | U(x) = 0\}$, $d(x, M)$ 表示 x 到集 M 的距离, $\gamma(\cdot)$ 为一类 κ 函数.

则系统 $\dot{x} = f(t, x)$ 的平衡点在定义域 D 内渐近稳定^[26].

引理 4 如果以下两个条件满足:

- 1) 函数 $\dot{W}(x, t)$ 为连续函数且有 $\dot{W}(x, t) = g(x, \beta(t))$, 其中 g 为连续函数且 $\beta(t)$ 连续且有界;
- 2) 存在一类 κ 函数 α , 对于任意 $x \in M$ 有 $|\dot{W}(x, t)| \geq \alpha \|x\|$, M 为引理3所定义.

则引理3中的条件(4)可以满足文献[26].

2.5 符号定义(Symbol definition)

对于 n 维向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 定义 $x^\alpha = (x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)^T$, $\text{sig}(x)^\alpha = [\text{sgn}(x_1)|x_1|^\alpha, \dots, \text{sgn}(x_n)|x_n|^\alpha]$, 其中 $\text{sgn}(x)$ 为符号函数, 于是有^[25]

$$\frac{d \text{sig}(x)^{\alpha+1}}{dt} = (\alpha + 1)[|x_1|^\alpha \dot{x}_1, \dots, |x_n|^\alpha \dot{x}_n], \quad (5)$$

其中: $|x|$ 表示向量或者矩阵 x 的标准Euclidean范数. 对于任意函数, $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{L}_∞ 范数定义为 $\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |f(t)|$, \mathcal{L}_2 范数定义为 $\|f\|_2^2 = \int_0^\infty |f(t)|^2 dt$. 同时, \mathcal{L}_∞ 空间和 \mathcal{L}_2 空间分别定义为集合 $\{f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n: \|f\|_\infty < \infty\}$ 和 $\{f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n: \|f\|_2 < \infty\}$.

3 控制器设计(Design of the controller)

3.1 控制目标(Purpose of the control)

本文中, 实现多EL系统的有限时间一致性, 即实现以下控制目标:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T} |q_i(t) - q_j(t)| = 0, \\ \lim_{t \rightarrow T} |v_i(t)| = 0, \forall t \geq T, i, j \in \mathcal{I}, \end{cases} \quad (6)$$

其中: $v_i(t) = \dot{q}_i(t)$, 而 T 为某一确定的有界正数, 且 $T \in [0, +\infty)$.

3.2 一致性算法设计(Consensus algorithm design)

基于齐次度的相关性质, 本文设计控制器如下:

$$\begin{aligned} \tau_i(t) = & - \sum_{j=1}^n a_{ij} \psi_1(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1}) - \\ & K_i \psi_2(\text{sig}(\dot{q}_i)^{\alpha_2}), \end{aligned} \quad (7)$$

其中: ψ_i 为连续的奇函数, 满足 $y\psi_i(y) > 0 (\forall y \neq 0 \in \mathbb{R})$, 在 $y = 0$ 附近, 有 $\psi_k(y) = c_k y + o(y)$, $o(y)$ 表示 y 的高阶无穷小量,

$c_k > 0$, $0 < \alpha_1 < 1$, $\alpha_2 = 2\alpha_1/(1 + \alpha_1)$, $k = 1, 2$.

定理 1 对于多EL系统(1), 通信拓扑为无向连

通图时, 控制器(7)可使系统(1)在有限时间内达到(6)意义下的一致性.

证 首先证明闭环系统(1)在平衡点是渐近稳定的, 将控制律(7)代入方程(1), 系统(1)可写为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(q_i - q_j) = \dot{q}_i - \dot{q}_j, \\ \frac{d}{dt}\dot{q}_i = -M_i^{-1}(q_i)[C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \psi_1(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1}) + \\ K_i \psi_2(\text{sig}(\dot{q}_i)^{\alpha_2})]. \end{cases} \quad (8)$$

选取Lyapunov函数

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^T M_i(q_i) \dot{q}_i + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^{q_i - q_j} a_{ij} \psi_1(\text{sig}(s)^{\alpha_1}) ds. \end{aligned}$$

易知, 对于 $q_i - q_j (\forall i \neq j)$ 和 \dot{q}_i , V 为正定, 对 V 关于时间求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^n [\dot{q}_i^T M_i(q_i) \ddot{q}_i + \frac{1}{2} \dot{q}_i^T \dot{M}_i(q_i) \dot{q}_i] + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\dot{q}_i - \dot{q}_j)^T \psi_1(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1}) = \\ & \sum_{i=1}^n [\dot{q}_i^T (\tau_i - C_i \dot{q}_i) + \frac{1}{2} \dot{q}_i^T \dot{M}_i(q_i) \dot{q}_i] + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i^T \psi_1(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1}). \end{aligned} \quad (9)$$

这里用到了

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (\dot{q}_i - \dot{q}_j)^T \psi_1(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1}) = \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i^T \psi_1(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1}), \end{aligned}$$

是由引理1所得. 将式(7)代入式(9)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i^T \psi_1(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1}) - \\ & K_i \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \psi_2(\text{sig}(\dot{q}_i)^{\alpha_2}) + \frac{1}{2} \dot{q}_i^T (\dot{M}_i - 2C_i) \dot{q}_i + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i^T \psi_1(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1}) = \\ & - K_i \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \psi_2(\text{sig}(\dot{q}_i)^{\alpha_2}). \end{aligned}$$

可知, \dot{V} 是负半定的, 由于系统(8)的状态变量为 $(q_i - q_j, \dot{q}_i)$, 而 M_i 与 C_i 和 q_i 相关, 因此(1)为非自主系统^[12], 不能用LaSalle定理进行相关证明, 这里本文采用Matrosov定理(引理3)说明系统在平衡点的稳定性. 由于 $\dot{V} \leq 0$, 则引理3中的条件1和2得到满足, 设

$$W = \sum_{i=1}^n \eta_i^T M_i(q_i) \dot{q}_i, \quad (10)$$

其中 $\eta_i \triangleq \sum_{j=1}^n a_{ij} \psi_1(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1})$. 于是有 $W \leq \sum_{i=1}^n \|\eta_i\| \|M_i(q_i)\| \|\dot{q}_i\|$, 易知 $\|a_{ij}\|$ 有界, 由 $\dot{V} \leq 0$ 可以得到 $V(t) \leq V(0), \forall t \geq 0$, 于是有 $q_i - q_j$ 和 \dot{q}_i 有界, 所以 $\|\eta_i\|$ 有界, 由EL系统性质1可知 $\|M_i(q_i)\|$ 有界, 因此 W 有界, 于是引理3中的条件3得以满足. 对 W 求导可得

$$\dot{W} = \sum_{i=1}^n \dot{\eta}_i^T M_i(q_i) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \eta_i^T \dot{M}_i(q_i) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \eta_i^T [-\eta_i - C_i(q, \dot{q}_i) \dot{q}_i - K_i \psi_2(\text{sig}(\dot{q}_i)^{\alpha_2})],$$

其中: $\dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^n \dot{\psi}_1 \frac{d[\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1}]}{dt}$, 易知 $\eta_i(t)$ 为连续函数. 注意到如果 $\dot{V}(t) = 0$, 则可得到 $\dot{q}_i = 0$, 这时对于集合 $\{(q_i - q_j, \dot{q}_i) | \dot{V} = 0\}$ 有 $\dot{W} = -\sum_{i=1}^n \eta_i^T \eta_i \leq 0$,

易知 $|\dot{W}| = \sum_{i=1}^n \eta_i^T \eta_i$ 关于 $q_i - q_j$ 是正定的, 由文献[28]可知, 存在一类 κ 函数 α , 使得 $|\dot{W}| \geq \alpha(\|q_i - q_j\|)$, 应用引理4可知, 引理3中的条件4得以满足. 同时, 系统(8)除了零点 ($q_i - q_j = 0, \dot{q}_i = 0$) 是局部Lipschitz的, 根据文献[29]中的引理2.2可知, 系统(8)存在唯一解. 由引理3可得系统(1)在平衡点 $q_i - q_j = 0, v_i = 0$ 是渐近稳定的.

假设当 $t \rightarrow \infty$ 时 $q_i(t) \rightarrow q_j(t) = q_d$, 其中 q_d 为常量, 设 $x_i(t) = q_i(t) - q_d, y_i(t) = \dot{x}_i(t)$, 于是闭环系统(1)可写为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i, \\ M_i(x_i + q_d) \dot{y}_i + C_i(x_i + q_d, y_i) y_i = \\ - \sum_{j=1}^n a_{ij} \psi_1(\text{sig}(x_i - x_j)^{\alpha_1}) - K_i \psi_2(\text{sig}(y_i)^{\alpha_2}). \end{cases} \quad (11)$$

进一步, 将系统(11)写为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = -M_i^{-1}(q_d) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} c_1 \text{sig}(x_i - x_j)^{\alpha_1} + \right. \\ \left. K_i c_2 \text{sig}(y_i)^{\alpha_2} \right] + \hat{f}_i(x_i, y_i), \end{cases} \quad (12)$$

其中: $\hat{f}_i(x_i, y_i) = \bar{f}_i(x_i, y_i) + \tilde{f}_i(x_i, y_i)$, $\bar{f}_i(x_i, y_i)$ 和 $\tilde{f}_i(x_i, y_i)$ 分别为

$$\begin{aligned} \bar{f}_i(x_i, y_i) &= -M_i^{-1}(x_i + q_d) C_i(x_i + q_d, y_i) y_i - \\ & [M_i^{-1}(x_i + q_d) - M_i^{-1}(q_d)] \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \right. \\ & \left. \psi_1(\text{sig}(x_i - x_j)^{\alpha_1}) + K_i \psi_2(\text{sig}(y_i)^{\alpha_2}) \right], \\ \tilde{f}_i(x_i, y_i) &= -M_i^{-1}(q_d) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} o(\text{sig}(x_i - x_j)^{\alpha_1}) + \right. \\ & \left. K_i o(\text{sig}(y_i)^{\alpha_2}) \right]. \end{aligned}$$

显然, $x_i = x_j, y_i = 0$ 是系统(12)的平衡点, 接下

来首先证明以下系统(13)是齐次的:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = -M_i^{-1}(q_d) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} c_1 \text{sig}(x_i - x_j)^{\alpha_1} + \right. \\ \left. K_i c_2 \text{sig}(y_i)^{\alpha_2} \right]. \end{cases} \quad (13)$$

令

$$\phi(t) = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) = (\phi_1, \dots, \phi_i, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}, \dots, \phi_{n+i}, \dots, \phi_{2n}).$$

于是系统(13)可写为

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = f_i(\phi) = \phi_{n+i}, \\ \dot{\phi}_{n+i} = f_{n+i}(\phi) = \\ - M_i^{-1}(q_d) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} c_1 \text{sig}(\phi_i - \phi_j)^{\alpha_1} + \right. \\ \left. K_i c_2 \text{sig}(\phi_{n+i})^{\alpha_2} \right]. \end{cases}$$

注意到, 如果 $r_1 = r_2 = \dots = r_n = R_1, r_{n+1} = r_{n+2} = \dots = r_{2n} = R_2, R_2 = R_1 + k$, 则有

$$\begin{aligned} f_i(\varepsilon^{r_1} \phi_1, \dots, \varepsilon^{r_n} \phi_n, \varepsilon^{r_{n+1}} \phi_{n+1}, \dots, \varepsilon^{r_{2n}} \phi_{2n}) = \\ \varepsilon^{r_{n+i}} \phi_{n+i} = \varepsilon^{r_i+k} f_i(\phi), \end{aligned}$$

其中 $i \in \mathcal{I}$, 再者如果 $R_1 \alpha_1 = R_2 \alpha_2 = R_2 + k$, 则有

$$\begin{aligned} f_{n+i}(\varepsilon^{r_1} \phi_1, \dots, \varepsilon^{r_n} \phi_n, \varepsilon^{r_{n+1}} \phi_{n+1}, \dots, \varepsilon^{r_{2n}} \phi_{2n}) = \\ - M_i^{-1}(q_d) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} c_1 \text{sig}(\varepsilon^{r_i} \phi_i - \varepsilon^{r_j} \phi_j)^{\alpha_1} + \right. \\ \left. K_i c_2 \text{sig}(\varepsilon^{r_{n+i}} \phi_{n+i})^{\alpha_2} \right] = \\ - \varepsilon^{R_1 \alpha_1} M_i^{-1}(q_d) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} c_1 \text{sig}(\phi_i - \phi_j)^{\alpha_1} + \right. \\ \left. K_i c_2 \text{sig}(\phi_{n+i})^{\alpha_2} \right] = \varepsilon^{r_{n+i}+k} f_{n+i}(\phi), \quad i, j \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

由以上分析可知, 如果方程(14)成立, 则系统(13)关于 $(r_1, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots, r_{2n})$ 具有齐次度 k .

$$\begin{cases} R_2 = R_1 + k, \\ R_1 \alpha_1 = R_2 \alpha_2 = R_2 + k, \end{cases} \quad (14)$$

解方程得

$$R_1 = 2k/(\alpha_1 - 1), \quad R_2 = (\alpha_1 + 1)k/(\alpha_1 - 1),$$

即当 $R_1, R_2 > 0$ 时, 有 $k < 0$. 所以系统(13)关于 $(r_1, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots, r_{2n})$ 具有负的齐次度 k . 同时, 系统(13)在平衡点也是全局渐近稳定的, 为证明这一点, 选取Lyapunov方程

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^{x_i - x_j} a_{ij} c_1 \text{sig}(s)^{\alpha_1} ds + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^T M_i(q_d) y_i. \end{aligned} \quad (15)$$

易知, V 为正定, 沿闭环系统(13)求导可得

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^p K_i |y_{i(l)}|^{1+\alpha_2} \leq 0.$$

不同于系统(8), 系统(13)为自治系统, 所以基于LaSalle定理, 定义不变集 $S = \{(x_i - x_j, y_i) | \dot{V} = 0\}$, 若 $\dot{V} \equiv 0$, 则 $y_i \equiv 0$, 由式(5)可得

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_1 \text{sig}(x_i - x_j)^{\alpha_1} \equiv 0,$$

于是

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} c_1 \text{sig}(x_i - x_j)^{\alpha_1} = \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} c_1 (x_i - x_j) \text{sig}(x_i - x_j)^{\alpha_1} \equiv 0. \end{aligned}$$

由于 $(x_i - x_j) \text{sig}(x_i - x_j)^{\alpha_1} \geq 0$, 所以有 $x_i - x_j \equiv 0$, 由LaSalle不变性定理知, $x_i = x_j, y_i = 0$ 是系统(13)的全局渐近稳定点.

最后, 笔者证明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n, \varepsilon^{r_{n+1}} y_1, \dots, \varepsilon^{r_{2n}} v_n) / \varepsilon^{k+r_{n+i}}] = 0.$$

考察 $\bar{f}_i(x_i, y_i)$, 注意到 $-M_i^{-1}(x_i + q_d)$ 和 $C_i(x_i + q_d, y_i)y_i$ 是平滑的, 并且 $k < 0$, 所以

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-M_i^{-1}(\varepsilon^{r_i} x_i + q_d) C_i(\varepsilon^{r_i} x_i + q_d, \varepsilon^{r_{n+i}} y_i) \times \\ & \varepsilon^{r_{n+i}} y_i / \varepsilon^{k+r_{n+i}}] = \\ & -M_i^{-1}(q_d) C_i(q_d, 0) y_2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} = 0. \end{aligned}$$

由文献[24]的分析可以得知, $M_i^{-1}(\varepsilon^{r_i} x_i + q_d) - M_i^{-1}(q_d) = o(\varepsilon^{r_i})$, 所以

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n, \varepsilon^{r_{n+1}} y_1, \dots, \\ & \varepsilon^{r_{2n}} v_n) / \varepsilon^{k+r_{n+i}}] = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{o(\varepsilon^{r_i}) [\sum_{j=1}^n a_{ij} c_1 (\varepsilon^{r_i} x_i - \varepsilon^{r_j} x_j)^{\alpha_1} \\ & c_2 K_i (\varepsilon^{r_i} v_i)^{\alpha_2} + \sum_{j=1}^n a_{ij} o((\varepsilon^{r_i} x_i - \varepsilon^{r_j} x_j)^{\alpha_1}) + \\ & K_i o((\varepsilon^{r_i} v_i)^{\alpha_2})] / \varepsilon^{k+r_{n+i}}\} = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{o(\varepsilon^{R_1}) [\sum_{j=1}^n a_{ij} c_1 \varepsilon^{R_1 \alpha_1} (x_i - x_j)^{\alpha_1} \\ & c_2 K_i \varepsilon^{R_2 \alpha_2} v_i^{\alpha_2} + \sum_{j=1}^n a_{ij} o(\varepsilon^{R_1 \alpha_1} (x_i - x_j)^{\alpha_1}) + \\ & K_i o(\varepsilon^{R_2 \alpha_2} v_i^{\alpha_2})] / \varepsilon^{k+R_2}\} = 0. \end{aligned}$$

同样, 对于 $\tilde{f}_i(x_i, y_i)$, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\tilde{f}_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n, \varepsilon^{r_{n+1}} y_1, \dots, \\ & \varepsilon^{r_{2n}} v_n) / \varepsilon^{k+r_{n+i}}] = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{-M_i^{-1}(q_d) [\sum_{j=1}^n a_{ij} o((\varepsilon^{r_i} x_i - \varepsilon^{r_j} x_j)^{\alpha_1}) + \\ & K_i o((\varepsilon^{r_i} v_i)^{\alpha_2})] / \varepsilon^{k+r_{n+i}}\} = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{-M_i^{-1}(q_d) [\sum_{j=1}^n a_{ij} o(\varepsilon^{R_1 \alpha_1} (x_i - x_j)^{\alpha_1}) + \\ & K_i o(\varepsilon^{R_2 \alpha_2} v_i^{\alpha_2})] / \varepsilon^{k+R_2}\} = 0. \end{aligned}$$

因此, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\hat{f}_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n, \varepsilon^{r_{n+1}} y_1, \dots, \varepsilon^{r_{2n}} v_n) / \varepsilon^{k+r_{n+i}}\} = 0$, 由引理2可知, 控制器(7)能使得系统(1)在有限时间内稳定, 即 $q_i = q_j, v_i = 0$ 是系统的全局有限时间收敛点, 定理得证.

注1 这里笔者借鉴文献[12, 24]的思路, 得到了无领航者的分布式多EL系统有限时间一致性算法. 该算法也可推广到含有领航者的多EL系统协调控制, 对于有领航者存在的情况, 笔者将算法(7)做如下推广:

$$\tau_i = -\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \psi_1(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1}) - K_i \psi_2(\text{sig}(\dot{q}_i)^{\alpha_2}), \quad (16)$$

其中: $\alpha_1, \alpha_2, \psi_1$ 和 ψ_2 为式(7)所定义, 注意到该算法稳定性证明过程中, 直接可运用LaSalle定理, 这里不再赘述. 文献[17]对含有一个领航者的一致性算法做过研究, 设计了有限时间控制器, 是算法(16)的一种特殊情况. 但文献[17]中的算法却不能直接推广到本文的leaderless情况, 因为本文研究对象为非自主系统, 文献[17]中所用到的LaSalle定理不再适用, 因此本文基于Matrosov定理对算法的稳定性进行了证明.

注2 类似于文献[12], 本文可将算法推广到执行器饱和情况下的有限时间一致性控制. 可设计控制器如下:

$$\tau_i(t) = -\sum_{j=1}^n a_{ij} \tanh(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1}) - K_i \tanh(\text{sig}(\dot{q}_i)^{\alpha_2}), \quad (17)$$

其中: $\alpha_1, \alpha_2, \psi_1$ 和 ψ_2 为式(7)所定义, 为了证明算法(17)的稳定性, 构造Lyapunov函数

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^T M_i(q_i) \dot{q}_i + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{1}^T \log[\tanh(\text{sig}(q_i - q_j)^{\alpha_1})], \end{aligned}$$

可证明算法(17)的稳定性, 证明过程类似于定理1, 这里不再赘述. 注意到, $\|\tau_i\|_{\max} \leq \sum_{i=1}^n a_{ij} + \|K_i\|_{\infty}$, 易知 τ_{\max} 和系统状态 q_i 和 \dot{q}_i 无关, 而算法(7)中 $\|\tau_i\|$ 则由 q_i 和 \dot{q}_i 的初始状态决定的.

注3 对于有限时间一致性问题, 从应用的角度上讲, 需要对有限时间收敛上限和系统参数之间的关系进行讨论.

首先, 本文给出以下引理:

引理5^[16] 对于连续非线性系统 $\dot{x} = f(t, x)$, 其中 $f(0) = 0$. 假设存在实数 $c > 0$, 并且存在函数 $V(x)$ 满足: 1) $V(x)$ 是正定的; 2) $\dot{V}(x) + cV^\alpha \leq 0$; 于是可得, 系统是有限时间稳定的, 收敛时间取决于初始状态 $x(0) = x_0$, 并且满足 $T \leq V(x_0)^{1-\alpha}/c(1-\alpha)$.

本文已经证明了闭环系统的有限时间稳定性, 且闭环系统有负的齐次度 $k = \alpha_2 - 1$, 依据文献[27]中定理7.2可知, 存在 $c > 0, l > 0$ 和正定的Lyapunov函数 V_0 使得 $\dot{V}_0(x) \leq -c[V_0(x)]^{1+(\alpha_2-1)l}$, 其中: $x = (q_1^T, \dots, q_n^T, \dots, q_n^T)^T, q_i \in \mathbb{R}^p$ 如文中式(1)定义. 于是根据引理5可得, 收敛时间满足

$$T \leq l V_0(x_0)^{\frac{1-\alpha_2}{l}} / c(1-\alpha_2),$$

其中: $x_0 = (q_1(0)^T, \dots, q_i(0)^T, \dots, q_n(0)^T)$ 为系统的初始状态.

需要指出的是, 这里没有得到Lyapunov函数 V_0 的具体表达式, 但是建立了收敛时间上限和参数 α_2 之间的关系. 注意到, 针对某一确定系统, 在系统初始状态确定的情况下, 系统收敛时间 T 和参数 α_2 成正相关关系. 由于 $\alpha_2 = 2\alpha_1/(1 + \alpha_1)$, 所以 T 和参数 α_1 也成正相关关系, 即 α_1 和 α_2 越小, 收敛时间越短. 这和数值仿真实验结果也是一致的. 这里, 笔者没有得到收敛时间上限的精确值 T , 但是针对某一具体系统, 可以通过改变参数 α_1 和 α_2 从而改变收敛时间的长短.

3.3 数值仿真(Numerical simulation)

基于Mathmatica软件, 本文设计数值仿真实验验证文中控制器的有效性. 假设系统由4个个体组成. 其通信拓扑如图1所示, 为简单起见, 本文假设各个体都有相同的动力学方程:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & c \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix},$$

其中:

$$\begin{aligned} M_{11} &= a_1 + 2a_3 \cos q_2 + 2a_4 \sin q_2, \\ M_{12} &= M_{21} = a_2 + a_3 \cos q_2 + a_4 \sin q_2, \\ M_{22} &= a_2, \quad h = a_3 \sin q_2 - a_4 \cos q_2, \\ a_1 &= I_1 + m_l l_{c1}^2 + I_e + m_e l_{ce}^2 + m_e l_1^2, \\ a_2 &= I_e + m_e l_{ce}^2, \quad c = -h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \\ a_3 &= m_e l_1 l_{ce} \cos \delta_e, \quad a_4 = m_e l_1 l_{ce} \sin \delta_e, \end{aligned}$$

仿真参数取 $m_1 = 1.2, l_1 = 1.2, m_e = 2.5, \delta_e = 30^\circ, I_1 = 0.15, l_{c1} = 0.5, I_e = 0.25, l_{ce} = 0.6$, 控制律采用式(7). 其中: $\psi(x) = x, K_i = 4, \alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 2\alpha_1/(1 + \alpha_1) = 0.75$.

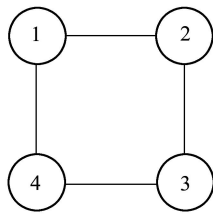


图1 通信拓扑

Fig. 1 Communication graph

仿真结果如图2-5所示. 图2-3表明, 在控制律(7)的作用下, 机械臂的位置在有限时间内趋向一致; 图4-5显示了机械臂的速度信息变化情况, 在有限时间内趋近于零. 由数值仿真实验知, 4个机械臂实现了严格的一致性. 然而, 在实际应用中, 系统可能存在通信时延以及测量误差等, 这些因素有可能会使多EL系统不能达到严格的一致性. 同时, 笔者发现, 收敛时间的长短和参数 α_2 成正比, 这和注3的讨论是一致的.

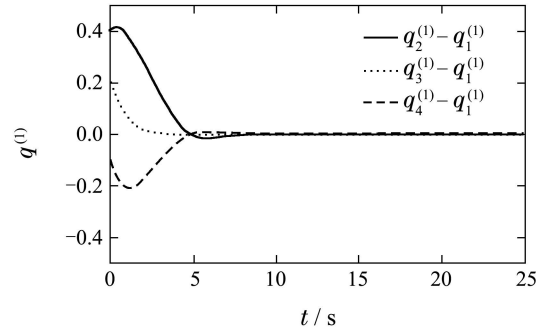


图2 机械臂2, 3, 4与1之间的相对姿态差 $q^{(1)}$ 变化情况
Fig. 2 Convergence error of relative attitude $q^{(1)}$ between manipulators 2, 3, 4 and 1

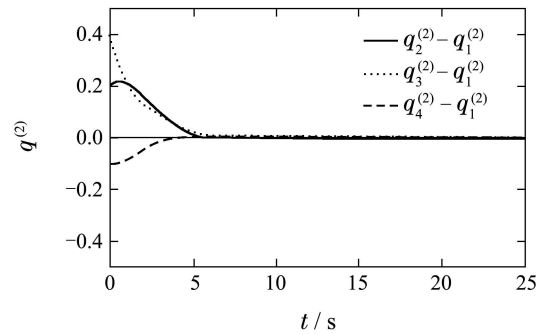


图3 机械臂2, 3, 4与1之间的相对姿态差 $q^{(2)}$ 变化情况
Fig. 3 Convergence error of relative attitude $q^{(2)}$ between manipulators 2, 3, 4 and 1

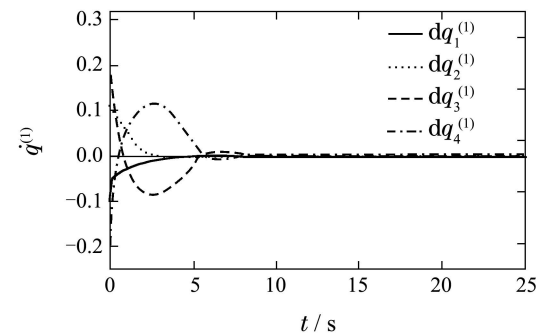


图4 机械臂1, 2, 3, 4的速度分量 $\dot{q}^{(1)}$ 变化情况
Fig. 4 Convergence of $\dot{q}^{(1)}$ of the velocity of the manipulators 1, 2, 3, 4

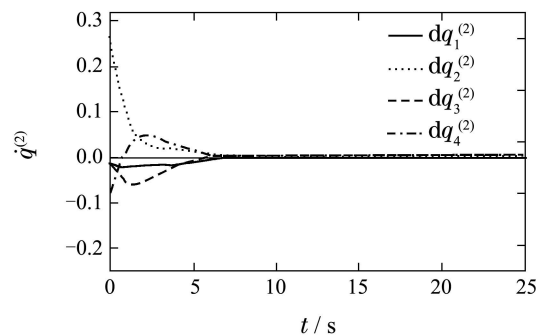


图5 机械臂1, 2, 3, 4的速度分量 $\dot{q}^{(2)}$ 变化情况
Fig. 5 Convergence of $\dot{q}^{(2)}$ of the velocity of the manipulators 1, 2, 3, 4

4 结论(Conclusions)

本文针对分布式EL系统的有限时间一致性控制进行了研究, 设计了有限时间一致性控制算法, 运用Matrosov定理、有限时间定理和Lyapunov稳定性定理等证明了系统的稳定性, 并设计数值仿真验证算法的有效性. 下一步将考虑更为一般的通信拓扑(如有向图或切换拓扑等), 并对收敛时间的估计做更深入的研究.

参考文献(References):

- [1] 闵海波, 刘源, 王仕成, 等. 多智能体协调控制问题综述 [J]. 自动化学报, 2012, 10(8): 1557 – 1570. (MIN Haibo, LIU Yuan, WANG Shicheng, et al. An overview on coordination control problem of multi-agent system [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 99: 1 – 20.)
- [2] CAO Y C, YU W W, REN W, et al. An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination [J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2012, 99: 1 – 20.
- [3] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215 – 233.
- [4] MIN H B, WANG S C, SUN F C, et al. Decentralized adaptive attitude synchronization of spacecraft formation [J]. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(1): 238 – 246.
- [5] JIN E, JIANG X, SUN Z. Robust decentralized attitude coordination control of spacecraft formation [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(5): 567 – 577.
- [6] CHUNG S J, AHSUN J J, SLOTINE J J. Application of synchronization to formation flying spacecraft: Lagrangian approach [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32(2): 512 – 526.
- [7] 刘源, 王仕成, 闵海波, 等. 含自时延和通信时延的Euler-Lagrange系统自适应一致性算法 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(2): 156 – 162. (LIU Yuan, WANG Shicheng, MIN Haibo, et al. Distributed adaptive consensus algorithm of Euler-Lagrange system with input and communication delays [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(2): 156 – 162.)
- [8] MIN H B, WANG S C, SUN F C, et al. Distributed six degree-of-freedom spacecraft formation control with possible switching topology [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2011, 5(9): 1120 – 1130.
- [9] WANG P K, HADAEGH F Y, LAU K. Synchronized formation rotation and attitude control of multiple free-flying spacecraft [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamic*, 1999, 22(1): 28 – 35.
- [10] REN W. Distributed attitude alignment in spacecraft formation flying [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2007, 21(2/3): 95 – 113.
- [11] CHUNG S J, SLOTINE J. Cooperative robot control and concurrent synchronization of lagrangian systems [J]. *Journal of IEEE Transactions on Robotics*, 2009, 25(3): 686 – 700.
- [12] REN W. Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems [J]. *International Journal of Control*, 2009, 82(11): 2137 – 2149.
- [13] MIN H B, SUN F C, WANG S C, et al. Distributed adaptive consensus algorithm for networked Euler-Lagrange systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2011, 5(1): 145 – 154
- [14] NUNO E, ORTEGA R, BASANEZ L, et al. Synchronization of networks of nonidentical Euler-Lagrange systems with uncertain parameters and communication delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(4): 935 – 941.
- [15] MEI J, REN W, MA G F. Distributed coordinated tracking with a dynamic leader for multiple Euler-Lagrange systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(6): 1415 – 1421.
- [16] KHOO S, XIE L, Z MAN. Robust finite-time consensus tracking algorithm for multirobot systems [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2009, 14(2): 219 – 226
- [17] MENG Z Y, REN W, YOU Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies [J]. *Automatica*, 2010, 47(8): 2092 – 2099.
- [18] WANG X, HONG Y. Finite-time consensus for multi-agent networks with second-order agent dynamics [C] // *Proceedings of the 17th World Congress of the International Federation of Automatic Control*. Seoul: IFAC, 2008: 15185 – 15190.
- [19] SUN F L, GUAN Z H. Finite-time consensus for leader-following second order multi-agent system [J]. *International Journal of Systems Science*, 2011, 45(4): 1 – 12.
- [20] XIAO F, WANG L. Reaching agreement in finite time via continuous local state feedback [C] // *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*. Wuhan: IEEE, 2007: 711 – 715.
- [21] WANG L, XIAO F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950 – 955.
- [22] HUI Q. Finite-time rendezvous algorithms for mobile autonomous agents [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(1): 207 – 211.
- [23] HONG Y, XU Y, HUANG J. Finite-time control for robot manipulators [J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 58(6): 429 – 435.
- [24] REN W. On consensus algorithms for double integrator dynamics [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(6): 1503 – 1509.
- [25] YU S Y, YU X H, SHIRINZADEH B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode [J]. *Automatica*, 2005, 41(11): 1957 – 1964.
- [26] PADEN B, PANJA R. Globally asymptotically stable ‘PDT’ controller for robot manipulators [J]. *International Journal of Control*, 1988, 47(6): 1697 – 1712.
- [27] SANJAY P B, DENNIS S B. Geometric Homogeneity with applications to finite-time stability [J]. *Mathematics of Control Signals Systems*, 2005, 17(2): 101 – 127.
- [28] KHALIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
- [29] KAWSKI M. Stabilization of nonlinear systems in the plane [J]. *Systems & Control Letters*, 1989, 12(2): 169 – 175.

作者简介:

刘源 (1986–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为多智能体协调控制, E-mail: craig_wayne@163.com;

王仕成 (1962–), 男, 教授, 目前研究方向为导航、制导与控制, E-mail: wscheng@vip.163.com;

闵海波 (1982–), 男, 讲师, 目前研究方向为多Agent协同控制, E-mail: haibo.min@gmail.com;

刘志国 (1979–), 男, 讲师, 目前研究方向为卫星导航、精确制导与控制, E-mail: Lzgc@163.com;

廖守亿 (1977–), 男, 讲师, 目前研究方向为航天器编队、红外制导与控制, E-mail: lsy_nudt@sohu.com.