

挠性卫星姿态非线性局部镇定控制

周燕茹, 黄文超, 曾建平[†]

(厦门大学 信息科学与技术学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 本文针对挠性卫星姿态机动和振动抑制问题, 给出一种基于多项式平方和(sum of squares, SOS)的非线性局部镇定控制方法. 根据姿态系统结构特征, 在此基础上, 采用SOS结合S-procedure理论, 得出相应的非线性局部可镇定条件. 该条件可借助有效凸优化工具进行检验, 当优化问题可解时, 可构造非线性姿态控制器的解析解. 最后, 将文中方法应用于某型挠性卫星姿态控制. 仿真结果表明, 在实现大角度姿态快速机动的同时, 有效抑制了挠性附件振动.

关键词: 挠性卫星; 姿态控制; 非线性控制; 降维观测器; 平方和

中图分类号: V448.22 **文献标识码:** A

Nonlinear local stabilization control of flexible satellite attitude system

ZHOU Yan-ru, HUANG Wen-chao, ZENG Jian-ping[†]

(College of Information Science and Technology, Xiamen University, Xiamen Fujian 361005, China)

Abstract: Based on the polynomial sum of squares (SOS) techniques, a nonlinear local stabilization control approach is proposed for the problem of flexible satellite attitude maneuver and vibration suppression. According to the structural features of attitude system, a nonlinear local stabilization controller is developed and the complexity of attitude control design is reduced effectively by employing a separation principle for the reduced-order observer and state feedback. On this basis, the corresponding conditions of nonlinear local stabilization, which can be checked through convex optimization algorithms, are presented by using the SOS and S-procedure theory, and the analytical solution of nonlinear attitude controller can be constructed if the optimization problem is solvable. Finally, this method is applied to the attitude control of a flexible satellite and the simulation results show that both the fast large angle attitude maneuver and the vibration suppression are well realized.

Key words: flexible satellite; attitude control; nonlinear control; reduced-order observer; sum of squares

1 引言(Introduction)

现代卫星通常安装有诸如太阳能帆板、天线和液体箱等大型挠性附件. 当卫星快速大角度姿态机动时, 会激发星体姿态/挠性附件的耦合运动, 严重影响姿态稳定性和运行安全. 对挠性振动抑制, 有主动控制和被动控制两条途径, 前者需额外安装振动运动测量传感器和执行机构, 代价巨大, 工程实践中应尽量避免. 因此, 挠性振动的被动抑制控制, 仍然是当前卫星姿态控制研究和航天工程应用的主要方法^[1-6]. 对挠性卫星姿态机动和振动抑制控制, 多采用智能控制类方法, 如滑模^[1,5,7-8]、自适应^[1,5-6]、变结构^[2,4,7-8]和神经网络^[2-4]等. 这些控制方法可视为“隐式”的非线性控制, 且多采用线性化方法设计^[1-2,4,8]. 由于非线性控制设计工具的缺乏, 直接基于挠性卫星非线性模型的“显式”非线性设计研究结果还很少见.

近年来, 多项式平方和(sum of squares, SOS)技术取得重要进展, 极大地促进了非线性控制理论研

究^[9-13]. SOS可为多项式非负性判断提供有效的凸松弛算法, 是多项式非线性系统研究的有力工具. 挠性卫星姿态模型本质上是一类有特定结构的多项式非线性系统, 因此可利用SOS来解决这类系统的分析与综合问题. 目前, SOS方法已被初步应用于卫星姿态控制研究^[14-22]. Zeng等人^[14]基于SOS研究了导弹预警卫星姿态控制问题. 陈琦等人^[15]提出一种基于SOS的飞行器姿态镇定控制策略, 用消去法建立控制器与Lyapunov函数间的关系, 减少了求解迭代次数. 通过引入稠密函数方法, Prajna等人^[16]研究了非线性状态反馈综合问题, 并对刚体航天器进行数值仿真验证. Narendra等人^[17-18]给出基于SOS的刚体卫星大角度姿态机动控制和切换控制方法. Zheng和Wu^[19-20]研究了一类轴对称航天器的姿态控制问题, 提出了非线性 H_∞ 控制的可解条件. 对于刚体卫星姿态系统, 文^[21-22]给出了基于SOS的非线性 H_∞ 和自适应反步LPV控制方案.

从现有成果来看, SOS在卫星姿态控制的研究成果还很不充分, 当前多限于解决刚体卫星姿态系统控制问题. 受此激励, 本文针对挠性卫星的姿态机动和振动抑制问题, 根据姿态系统结构特征, 采用SOS结合S-procedure理论, 给出一种基于降维观测器的非线性局部镇定控制设计方法. 由于降维观测和非线性状态反馈设计满足分离原理, 降低了姿态控制设计算法的复杂性. 另外, 在SOS框架下, 可获得非线性姿态局部镇定控制器的解析解, 且其仅是关于输出变量的多项式或有理式函数, 不过分增加工程实现难度.

文中符号规定说明如下, $I_n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 S^n 分别表示 n 维单位矩阵、 m 维实向量、 $m \times n$ 维实矩阵和 n 维实对称矩阵空间. 对方阵 A , $\text{He}(A) := A + A^T$. 假定所有矩阵具有合适维数, 多项式和单项式均在实数域内.

2 预备知识(Preliminaries)

定义 1^[23] 设 $f(x)$ 是一个关于 $x \in \mathbb{R}^n$ 的多项式, 若存在一组多项式 $f_1(x), \dots, f_m(x)$, 使得

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x),$$

则称 $f(x)$ 为 SOS 多项式.

显然, SOS 多项式是非负的, 反之则不一定成立. 已有学者对 SOS 多项式和非负多项式之间的差距 (gap) 问题进行了研究, 在某些情况下两者是等价的^[24]. 检验一个多项式是否为 SOS 是凸优化问题, 因而将多项式非负性检验放宽为 SOS 检验, 为多项式非线性控制问题研究提供了一条有效的途径.

后续讨论需要如下引理和定理.

引理 1^[12] 关于 x 的 $2m$ 阶多项式 $f(x)$ 是 SOS, 当且仅当存在 $Q \geq 0$ 使得

$$f(x) = Z^T(x)QZ(x),$$

其中 $Z(x)$ 是关于 x 的阶数不大于 m 的单项式向量.

引理 2^[12] 设 $P(x)$ 为对称多项式矩阵, 若其对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 都非奇异, 则

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x) = -P(x) \frac{\partial P^{-1}}{\partial x_i}(x) P(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

引理 3^[25] 对 $\sigma_1(x) = x^T Q_1 x \geq 0$, 假定存在一个 $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\sigma_1(\tilde{x}) > 0$, 则以下两个条件等价:

i) 对使得 $\sigma_1(x) \geq 0$ 的所有非零 $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T Q_0 x > 0$;

ii) 存在 $m \geq 0$, 使得 $Q_0 - mQ_1 > 0$.

定理 1 设 $\alpha \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, $F \in S^q$, $D(x) \in S^p$ 和 $E(x) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 的元素均是关于 $x \in \alpha$ 的连续函数, 则下列陈述等价:

i) $D(x) < 0, F < 0$;

ii) 存在标量 $\mu > 0$, 使得 $\begin{bmatrix} D(x) & E(x) \\ E^T(x) & \mu F \end{bmatrix} < 0$.

证 ii) \Rightarrow i), 显然成立.

i) \Rightarrow ii). 记 $G(x) = E^T(x)D^{-1}(x)E(x)$, 易知 $G(x) \leq 0$ 且其特征值是关于 x 的连续函数, 故在 $x \in \alpha$ 上存在最小特征值 $\lambda_G \leq 0$ 满足

$$\lambda_G I_q \leq E^T(x)D^{-1}(x)E(x), \quad \forall x \in \alpha. \quad (1)$$

记 $F < 0$ 的最大特征值为 $\bar{\lambda}_F < 0$, 则

$$F \leq \bar{\lambda}_F I_q. \quad (2)$$

取 $\mu_0 = \lambda_G \bar{\lambda}_F^{-1} \geq 0$, 结合式(1)-(2), 当 $\mu > \mu_0$ 时, 有 $\mu F < \lambda_G I_q \leq E^T(x)D^{-1}(x)E(x), \forall x \in \alpha$.

最后, 由 Schur 补引理, 可知 ii) 成立. 证毕.

3 挠性卫星姿态系统数学模型(Mathematical model of flexible satellite attitude system)

基于有限元离散化方法, 挠性卫星姿态动力学方程可表为

$$\begin{cases} J\dot{\omega} + S(\omega)J\omega + F_s\dot{\eta} = T_c, \\ \ddot{\eta} + 2\xi\Omega\dot{\eta} + \Omega^2\eta + F_s^T\dot{\omega} = 0, \end{cases} \quad (3a)$$

其中: $J = \begin{bmatrix} J_1 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{12} & J_2 & -J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & J_3 \end{bmatrix}$ 为惯量矩阵, $S(\omega) =$

$[\omega \times]$ 为叉乘矩阵, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ 和 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)^T$ 分别为姿态角速度和挠性模态坐标向量, T_c 为控制力矩, ξ 和 Ω 分别为挠性模态阻尼和频率矩阵, F_s 为整星振动对卫星中心体转动的柔性耦合系数矩阵, N 为截取的挠性模态阶数.

采用 Rodrigues 参数描述, 卫星姿态运动学方程为

$$\dot{\sigma} = \rho(\sigma)\omega, \quad (3b)$$

其中:

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 & \sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 \\ \sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 & 1 + \sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1 \\ \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2 & \sigma_1 + \sigma_2\sigma_3 & 1 + \sigma_3^2 \end{bmatrix},$$

$\sigma = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3]^T$ 为 Rodrigues 参数.

引入辅助变量 $\varphi = \dot{\eta} + F_s^T\omega$ ^[26], 并记

$$n = 6 + 2N, \quad R_s = (J - F_s F_s^T)^{-1}, \quad x_1 = \sigma,$$

$$x_2 = \omega, \quad x_3 = \eta, \quad x_4 = \varphi, \quad x_a = [x_1^T \ x_2^T]^T$$

和 $x_b = [x_3^T \ x_4^T]^T$, 则可得到挠性卫星姿态系统的非线性状态空间方程为

$$\dot{x} = A(x_a)x + Bu, \quad (4a)$$

其中:

$$A(x_a) = \begin{bmatrix} A_{11}(x_a) & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ R_s \end{bmatrix}, \quad A_{21} := \begin{bmatrix} 0 & -F_s^T \\ 0 & 2\xi\Omega F_s^T \end{bmatrix},$$

$$A_{22} := \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ -\Omega^2 & -2\xi\Omega \end{bmatrix},$$

$$A_{11}(x_a) := \begin{bmatrix} 0 & \rho(x_1) \\ 0 & R_s(-S(x_2)J - 2F_s\xi\Omega F_s^T) \end{bmatrix},$$

$$A_{12} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ R_s F_s \Omega^2 & 2R_s F_s \xi \Omega \end{bmatrix},$$

$x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $u = T_c \in \mathbb{R}^3$ 是控制输入.

挠性卫星姿态系统中可直接测量的量是姿态角和姿态角速度, 故系统输出方程为

$$y = x_a = Cx, \quad C = [I_6 \quad 0]. \quad (4b)$$

显见, 上述挠性卫星姿态状态空间模型(4)仅在系统矩阵的左上角含有部分状态变量耦合, 是一类有特定结构的多项式非线性系统.

记 $\rho(x_1)$ 的第 i 行为 $\rho_i(x_1)$, 采用Lyapunov方法, 可先建立该系统的一个稳定性判据.

引理 4 如果存在对 x_1 具有连续一阶偏导数的矩阵 $P(x_1) > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \Sigma(x_a) &:= \text{He}(P(x_1)A(x_a)) + \\ &\sum_{i=1}^3 \frac{\partial P}{\partial \sigma_i}(x_1)(\rho_i(x_1)x_2) < 0, \end{aligned}$$

则系统(4)渐近稳定.

证 沿用文[12]思路, 选取Lyapunov函数 $V(x) = x^T P(x_1)x$, 易知结论成立. **证毕.**

由于状态 x_b 不能直接测量, 为实现大角度姿态快速机动并有效抑制挠性附件振动的控制目标, 本文根据系统(4)的结构特征, 采用SOS研究基于降维观测器的挠性卫星姿态非线性局部镇定控制问题.

4 非线性局部镇定控制(Nonlinear local stabilization control)

考虑系统(4), 易于验证 (A_{22}, A_{12}) 完全能观测, 故可对 $2N$ 维挠性子系统构造如下观测器:

$$\begin{cases} \dot{z} = (A_{22} - LA_{12})z + [(A_{22} - LA_{12})L + \\ \quad A_{21} - LA_{11}(y)]y - LB_1u, \\ \hat{x}_b = z + Ly, \end{cases} \quad (5)$$

其中 L 为观测器增益矩阵.

注 1 由极点配置定理, 可选取 L 使得 $(A_{22} - LA_{12})$ 的极点配置在任意位置.

基于降维观测器(5), 设计非线性状态反馈控制器

$$u = K(x_a)\hat{x}, \quad (6)$$

其中:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_a \\ \hat{x}_b \end{bmatrix} = \bar{L}x_a + Qz, \quad \bar{L} := \begin{bmatrix} I_6 \\ L \end{bmatrix}, \quad Q := [0 \quad I_{2N}]^T,$$

$K(x_a)$ 为控制器增益矩阵.

结合式(4)–(6), 可得相应闭环系统

$$\dot{\tilde{x}}_{cl} = \tilde{A}_{cl}(x_a)\tilde{x}_{cl}, \quad (7)$$

其中:

$$\tilde{x}_{cl} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{cl}(x_a) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}(x_a) & \tilde{A}_{12}(x_a) \\ \tilde{A}_{21}(x_a) & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{22} := A_{22} - L(A_{12} + B_1K(x_a)Q),$$

$$\tilde{A}_{12}(x_a) := BK(x_a)Q,$$

$$\tilde{A}_{21}(x_a) := [A_{21} + (A_{22} - LA_{12})L - L(B_1K(x_a)\bar{L} + A_{11}(x_a))]C,$$

$$\tilde{A}_{11}(x_a) := A(x_a) + BK(x_a)\bar{L}C.$$

取变换矩阵 $T = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ [-L \quad I_{2N}] & -I_{2N} \end{bmatrix}$, 注意到

$$T \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -Lx_a + x_b - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x_b - \hat{x}_b \end{bmatrix}.$$

令 $e = x_b - \hat{x}_b$, 则式(7)可写为

$$\dot{x}_{cl} = A_{cl}(x_a)x_{cl}, \quad (8)$$

其中:

$$A_{cl}(x_a) = \begin{bmatrix} A(x_a) + BK(x_a) & -BK(x_a)Q \\ 0 & A_{22} - LA_{12} \end{bmatrix},$$

$$x_{cl} = [x^T \quad e^T]^T.$$

对于挠性卫星姿态系统(4), 其非线性局部镇定控制问题具体指, 设计一个基于降维观测器(5)的非线性状态反馈控制器(6), 保证当状态 x_a 在指定区域内时, 闭环系统(8)渐近稳定. 为了研究此问题, 先定义如下集合:

$$\begin{aligned} \alpha &= \{x_a \mid |\sigma_i| \leq \delta_i, |\omega_i| \leq \delta_j, \delta_i > |\sigma_{0i}|, \\ &\quad \delta_j > |\omega_{0j}|, j = 3 + i, i = 1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

其中 $\sigma_0 = [\sigma_{01} \quad \sigma_{02} \quad \sigma_{03}]^T$ 和 $\omega_0 = [\omega_{01} \quad \omega_{02} \quad \omega_{03}]^T$ 分别表示 σ 和 ω 的初始值.

定理 2 对系统(8), 给定多项式矩阵 $P_1(x_1) > 0$ 和 $Y(x_a)$, 常数矩阵 $P_2 > 0$ 和 W , 当 $x_a \in \alpha$ 时, 如下陈述等价:

$$\text{i) } \Sigma_2 := \text{He}(P_2A_{22} - WA_{12}) < 0,$$

$$\begin{aligned} \Sigma_1(x_a) &:= \text{He}(A(x_a)P_1(x_1) + BY(x_a)) - \\ &\sum_{i=1}^3 \frac{\partial P_1}{\partial \sigma_i}(x_1)(\rho_i(x_1)x_2) < 0; \end{aligned}$$

ii) 存在标量 $\mu > 0$, 矩阵 $L = P_2^{-1}W$, $K(x_a) = Y(x_a)P_1^{-1}(x_1)$ 和 $P_0(x_1) = \text{diag}\{P_1^{-1}(x_1), \mu P_2\}$ 使得

$$\begin{aligned} \Sigma_0(x_a) &:= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial P_0}{\partial \sigma_i}(x_1)(\rho_i(x_1)x_2) + \\ &\text{He}(P_0(x_1)A_{cl}(x_a)) < 0. \end{aligned}$$

证 ii) \Rightarrow i). 由 $\Sigma_0(x_a) < 0$ 可得

$$\begin{bmatrix} D(x_a) & E(x_a) \\ E^T(x_a) & \mu F \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} E(x_a) &= -P_1^{-1}(x_1)BY(x_a)P_1^{-1}(x_1)Q, \\ F &= \text{He}(P_2A_{22} - WA_{12}), \\ D(x_a) &= \\ &\text{He}(P_1^{-1}(x_1)(A(x_a) + BY(x_a)P_1^{-1}(x_1))) + \\ &\sum_{i=1}^3 \frac{\partial P_1^{-1}}{\partial \sigma_i}(x_1)(\rho_i(x_1)x_2). \end{aligned}$$

对式(9)左边矩阵分别左乘和右乘 $\text{diag}\{P_1(x_1), I_{2N}\}$, 根据引理2和Schur补引理, 就可得出 $\Sigma_1(x_a) < 0$ 和 $\Sigma_2 < 0$.

i) \Rightarrow ii). 定义

$$K(x_a) = Y(x_a)P_1^{-1}(x_1) \text{ 和 } L = P_2^{-1}W,$$

则由 $\Sigma_1(x_a) < 0$ 和 $\Sigma_2 < 0$, 可得

$$D(x_a) < 0, F < 0. \quad (10)$$

对 $x_a \in \alpha$, 根据定理1和式(10), 易知存在标量 $\mu > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} D(x_a) & E(x_a) \\ E^T(x_a) & \mu F \end{bmatrix} < 0.$$

最后, 令 $P_0(x_1) = \text{diag}\{P_1^{-1}(x_1), \mu P_2\}$, 就有 $\Sigma_0(x_a) < 0$. 证毕.

推论 1 对姿态系统(4)的非线性局部镇定控制, 当 $x_a \in \alpha$ 时, 基于降维观测器(5)的非线性状态反馈控制器(6)的设计满足分离原理, 即观测器(5)和控制器(6)的设计可独立进行. 观测器(5)可通过期望极点配置, 也可通过求解 $\Sigma_2 < 0$ 来构造. 控制器(6)则可通过求解 $\Sigma_1(x_a) < 0$ 来构造.

证 由 (A_{22}, A_{12}) 完全能观测、定理2和引理4, 易知这一结论显然成立. 证毕.

在前述工作基础上, 下面借助S-procedure理论结合SOS方法, 给出挠性卫星非线性姿态系统(4)的局部可镇定条件.

定理 3 考虑系统(4), 给定标量 $\tau > 0, \varepsilon > 0, \delta_i$ 和 $\delta_j (j = 3 + i, i = 1, 2, 3)$, 若下面两个条件成立:

i) 存在多项式矩阵 $P_1(x_1)$ 和 $Y(x_a)$, 标量 $p_i \geq 0, q_i \geq 0$ 和 $q_j \geq 0$ 使得表达式

$$v^T(P_1(x_1) - \tau I_n)v - \Xi(x_1, \vartheta), \quad (11a)$$

$$-\varsigma^T(\Sigma_1(x_a) + \varepsilon I_n)\varsigma - \Lambda(x_a, \psi) \quad (11b)$$

是SOS, 其中: $v \in \mathbb{R}^n, \varsigma \in \mathbb{R}^n, \vartheta = [\vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \vartheta_3]^T \in \mathbb{R}^3$ 和 $\psi = [\psi_1 \ \dots \ \psi_6]^T \in \mathbb{R}^6$ 的元素分别均为 v 和 ς 中的元素,

$$\Xi(x_1, \vartheta) = \sum_{i=1}^3 p_i \vartheta_i^T (\delta_i^2 - \sigma_i^2) \vartheta_i,$$

$$\begin{aligned} \Lambda(x_a, \psi) &= \sum_{i=1}^3 (q_i \psi_i^T (\delta_i^2 - \sigma_i^2) \psi_i + \\ & q_j \psi_j^T (\delta_j^2 - \omega_i^2) \psi_j). \end{aligned}$$

ii) 存在常数矩阵 P_2 和 W 使得 $\Sigma_2 < 0$.

则存在一个基于降维观测器(5)的非线性状态反馈控制器(6), 使得当 $x_a \in \alpha$ 时, 闭环系统(8)渐近稳定, 且相应观测器和控制器增益矩阵为 $L = P_2^{-1}W, K(x_a) = Y(x_a)P_1^{-1}(x_1)$.

证 对系统(4), 给定 $\tau, \varepsilon, \delta_i$ 和 $\delta_j (j = 3 + i, i = 1, 2, 3)$, 并定义多项式

$$\ell(x_1, v) = v^T(P_1(x_1) - \tau I_n)v - \Xi(x_1, \vartheta). \quad (12)$$

将式(12)的前后两项对应分解为

$$\ell(x_1, v) = h^T(x_1, v)(G_0 - \sum_{i=1}^3 p_i G_i)h(x_1, v), \quad (13)$$

其中: G_0 和 G_i 为常数矩阵, $h(x_1, v)$ 是关于 x_1 和 v 的单项式向量.

由式(11a)是SOS、引理1和式(13), 可得

$$G_0 - \sum_{i=1}^3 p_i G_i \geq 0. \quad (14)$$

再根据引理3, 当 $x_a \in \alpha$ 时, 有 $v^T(P_1(x_1) - \tau I_n)v \geq 0$, 即 $P_1(x_1) > 0$. 同理, 由式(11b)是SOS、引理1和3, 可知当 $x_a \in \alpha$ 时, $\Sigma_1(x_a) < 0$.

最后, 根据定理2和引理4, 易知存在一个基于降维观测器(5)的非线性状态反馈控制器(6), 使得当 $x_a \in \alpha$ 时, 闭环系统(8)渐近稳定, 相应观测器和控制器的增益矩阵为 $L = P_2^{-1}W, K(x_a) = Y(x_a)P_1^{-1}(x_1)$.

证毕.

注 2 上述定理的条件ii)也可转化为相应的SOS凸优化条件.

注 3 对于定理3, 基于降维观测器的非线性状态反馈存在条件可进一步减弱, 即对系统(4), 条件ii)自然满足, 故可去掉.

5 数值仿真(Numerical simulation)

以文[26]中的挠性卫星姿态系统为仿真实例, 为了设计方便, 仅取前2阶挠性模态(即 $N = 2$), 相关参数如下:

$$J = \begin{bmatrix} 350 & 3 & 4 \\ 3 & 280 & 10 \\ 4 & 10 & 190 \end{bmatrix}, F_s = \begin{bmatrix} 6.45637 & -1.25619 \\ 1.27814 & 0.91756 \\ 2.15629 & -1.67264 \end{bmatrix},$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 5.607 & 0 \\ 0 & 8.62 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \Omega = \begin{bmatrix} 0.7681 & 0 \\ 0 & 1.1038 \end{bmatrix}.$$

考虑该卫星为实现某项任务需进行 160° 的姿态快速机动, 要完成的任务是从初始状态 $\sigma_0 = [-1.5157 \ 4.5471 \ -3.0314]^T$ 和 $\omega_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$ 机动到期望状态 $\sigma_d = [0 \ 0 \ 0]^T$ 和 $\omega_d = [0 \ 0 \ 0]^T$.

给定仿真参数 $\tau = 1 \times 10^{-6}, \varepsilon = 1 \times 10^{-5}, p_i = q_i = q_j = 1 \times 10^{-5}, \delta_i = 5$ 和 $\delta_j = 1 (j = 3 + i, i = 1, 2, 3)$. 根据定理3, 分别采用SOSTOOLS和LMI工具箱进行求解, 可得到一个基于降维观测器的非线性状态反馈控制器, 相应观测器增益矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 72.2876 & 53.9425 & -19.9216 \\ 0 & 0 & 0 & 21.7847 & 58.0738 & -66.3071 \\ 0 & 0 & 0 & 55.3492 & 39.8056 & -12.9929 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4287 & 4.4714 & -5.6309 \end{bmatrix}.$$

鉴于篇幅限制, 只给出非线性状态反馈增益矩阵 $K(x_a) = (k_{ij}(x_a)) \in \mathbb{R}^{3 \times 10}$ 的第1列:

$$\begin{aligned} k_{11}(x_a) = & -11.30 + 6 \times 10^{-3} \sigma_1 + 0.205 \sigma_2 - 8.35 \times 10^{-2} \sigma_3 - \\ & 3 \times 10^{-3} \omega_1 - 0.62 \omega_2 + 0.36 \omega_3 + 1.9 \times 10^{-2} \sigma_1 \sigma_2 + \\ & 3 \times 10^{-2} \sigma_1 \sigma_3 + 2 \times 10^{-3} \sigma_1 \omega_1 + 2 \times 10^{-2} \sigma_1 \omega_2 + \\ & 9.1 \times 10^{-2} \sigma_1 \omega_3 + 5.7 \times 10^{-2} \sigma_2 \sigma_3 - 11.3 \sigma_1^2 - \\ & 7.5 \times 10^{-3} \sigma_2 \omega_1 + 0.2 \sigma_2 \omega_2 - 11.0 \sigma_2^2 - \\ & 1.61 \times 10^{-2} \sigma_2 \omega_3 + 0.28 \sigma_3 \omega_3 - 10.93 \sigma_3^2 - \\ & 1.01 \times 10^{-2} \sigma_3 \omega_1 - 1.62 \times 10^{-2} \sigma_3 \omega_2 - 10.98 \omega_1^2 + \\ & 3.7 \times 10^{-2} \omega_1 \omega_2 + 8.7 \times 10^{-2} \omega_1 \omega_3 - 11.62 \omega_2^2 + \\ & 5.7 \times 10^{-2} \omega_2 \omega_3 - 12.07 \omega_3^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{21}(x_a) = & -1.016 - 2.5 \times 10^{-2} \sigma_1 - 4.3 \times 10^{-4} \sigma_2 + \\ & 1.02 \sigma_3 + 0.51 \omega_1 + 6.8 \times 10^{-2} \omega_2 - 0.503 \sigma_1 \sigma_2 - \\ & 4.06 \omega_3 + 2.3 \times 10^{-2} \sigma_1 \sigma_3 + 1.44 \times 10^{-2} \sigma_1 \omega_1 - \\ & 0.17 \sigma_1 \omega_2 + 1.3 \times 10^{-3} \sigma_1 \omega_3 - 9.4 \times 10^{-2} \sigma_2 \omega_1 - \\ & 0.96 \sigma_1^2 - 0.17 \sigma_2 \sigma_3 - 1.1 \times 10^{-2} \sigma_2 \omega_2 - 1.09 \sigma_2^2 + \\ & 9.2 \times 10^{-2} \sigma_2 \omega_3 + 1.2 \times 10^{-2} \sigma_3 \omega_1 - \sigma_3^2 - \\ & 1.31 \times 10^{-2} \sigma_3 \omega_2 - 5.2 \times 10^{-3} \sigma_3 \omega_3 + 0.41 \omega_1 \omega_2 - \\ & 2.4 \times 10^{-2} \omega_1 \omega_3 - 1.041 \omega_1^2 - 1.00 \omega_2^2 - 1.14 \omega_3^2 + \\ & 9.8 \times 10^{-3} \omega_2 \omega_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{31}(x_a) = & -1.1 + 9.9 \times 10^{-3} \sigma_1 - 1.20 \sigma_2 - 0.29 \omega_1 - \\ & 4.6 \times 10^{-3} \sigma_3 + 4.24 \omega_2 - 8.1 \times 10^{-2} \omega_3 + \\ & 1.35 \times 10^{-2} \sigma_1 \sigma_2 - 0.6 \sigma_1 \sigma_3 - 2.72 \times 10^{-2} \sigma_1 \omega_1 + \\ & 9.2 \times 10^{-3} \sigma_1 \omega_2 - 0.22 \sigma_1 \omega_3 - 1.3 \sigma_1^2 + \\ & 2 \times 10^{-2} \sigma_2 \omega_1 - 9.5 \times 10^{-2} \sigma_2 \sigma_3 - 0.11 \sigma_2 \omega_2 - \\ & 2.3 \times 10^{-2} \sigma_2 \omega_3 - 1.34 \sigma_2^2 + 2.21 \times 10^{-2} \sigma_3 \omega_2 - \\ & 0.15 \sigma_3 \omega_1 - 5.04 \times 10^{-2} \sigma_3 \omega_3 - 1.54 \sigma_3^2 - \\ & 5.5 \times 10^{-2} \omega_1 \omega_2 - 1.5 \omega_1^2 + 0.9 \omega_1 \omega_3 + \\ & 0.12 \omega_2 \omega_3 - 1.43 \omega_2^2 - 1.42 \omega_3^2. \end{aligned}$$

取状态初始值

$$x_{cl0} = [-1.5157 \quad 4.5471 \quad -3.0314 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1]^T.$$

相应闭环系统响应如图1-4所示.

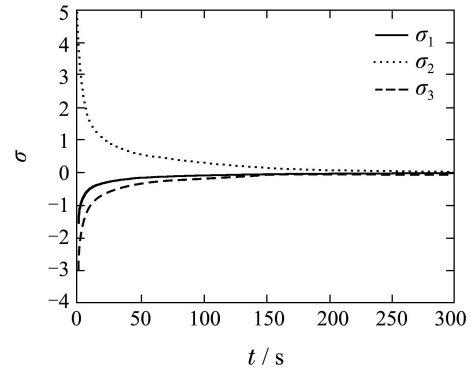


图1 σ 的响应曲线

Fig. 1 Response curve of σ

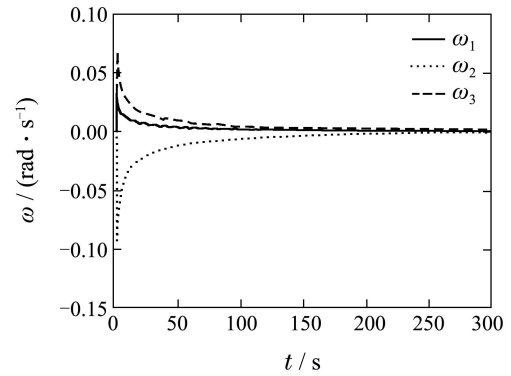


图2 ω 的响应曲线

Fig. 2 Response curve of ω

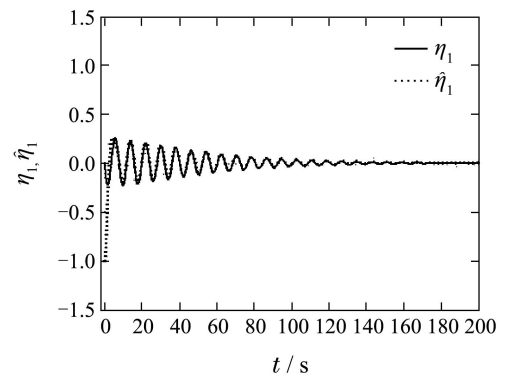


图3 η_1 和 $\hat{\eta}_1$ 的响应曲线

Fig. 3 Response curves of η_1 and $\hat{\eta}_1$

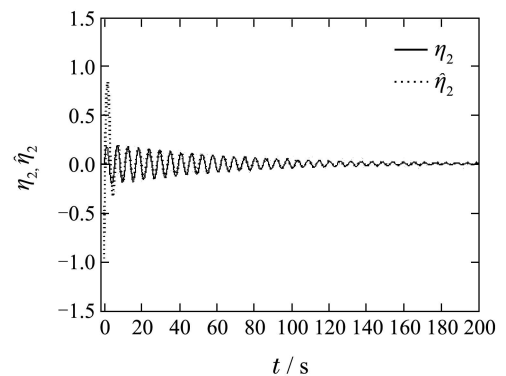


图4 η_2 和 $\hat{\eta}_2$ 的响应曲线

Fig. 4 Response curves of η_2 and $\hat{\eta}_2$

从这些图可以看出,文中方法设计的非线性镇定控制器能保证相应闭环系统渐近稳定,在实现大角度姿态快速机动的同时有效抑制了挠性附件振动。

6 结论(Conclusions)

根据姿态系统结构特征,通过证明挠性模态观测和状态反馈设计满足分离原理,设计出基于降维观测器的非线性镇定控制器,并降低了姿态控制设计算法的复杂性。以此为基础,采用SOS结合S-procedure理论,给出挠性卫星非线性姿态系统的局部可镇定条件,该条件可借助有效凸优化工具进行检验,从而可构造出非线性姿态控制器的解析解。仿真算例验证了该方法的正确性和可行性。在本文工作基础上,下一步可考虑挠性卫星姿态系统存在的不确定因素,研究基于SOS的非线性鲁棒控制问题。

参考文献(References):

- [1] DONG C Y, XU L J, CHEN Y, et al. Networked flexible spacecraft attitude maneuver based on adaptive fuzzy sliding mode control [J]. *Acta Astronautica*, 2009, 65(11/12): 1561 – 1570.
- [2] 耿云海, 吴炜平, 马玉海. 神经网络补偿的挠性卫星敏捷姿态机动 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2012, 44(5): 31–35.
(GENG Yunhai, WU Weiping, MA Yuhai. Neural network compensation of flexible satellite rapid maneuver [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2012, 44(5): 31 – 35.)
- [3] HU Q L, XIAO B. Intelligent proportional-derivative control for flexible spacecraft attitude stabilization with unknown input saturation [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2012, 23(1): 63 – 74.
- [4] 王岩, 唐强, 陈兴林. 挠性卫星姿态快速稳定智能控制 [J]. 北京科技大学学报, 2012, 34(1): 85 – 89.
(WANG Yan, TANG Qiang, CHEN Xinglin. Intelligent control for attitude rapid stabilization of flexible satellites [J]. *Journal of University of Science and Technology Beijing*, 2012, 34(1): 85 – 89.)
- [5] SHAHRAVI M, KABGANIAN M, ALASTY A. Adaptive robust attitude control of a flexible spacecraft [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2006, 16(6): 287 – 302.
- [6] LEE K W, SINGH S N. L_1 adaptive control of flexible spacecraft despite disturbances [J]. *Acta Astronautica*, 2012, 80(11/12): 24 – 35.
- [7] 胡庆雷, 马广富, 姜野, 等. 三轴稳定挠性卫星姿态机动时变滑模变结构和主动振动控制 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(2): 122 – 126.
(HU Qinglei, MA Guangfu, JIANG Ye, et al. Variable structure control with time-varying sliding mode and vibration control for flexible satellite [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(2): 122 – 126.)
- [8] 胡庆雷, 刘亚秋, 马广富. 挠性航天器姿态机动的变结构主动振动抑制 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 329 – 336.
(HU Qinglei, LIU Yaqiu, MA Guangfu. Active vibration suppression in flexible spacecraft with mismatched uncertainty via variable structure control [J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 329 – 336.)
- [9] XU J, XIE L H, WANG Y Y. Simultaneous stabilization and robust control of polynomial nonlinear systems using SOS techniques [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(8): 1892 – 1897.
- [10] NGUANG S K, SAAT S, KRUG M. Static output feedback controller design for uncertain polynomial systems: an iterative sum of squares approach [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2011, 5(9): 1079 – 1084.
- [11] ICHIHARA H. Optimal control for polynomial systems using matrix sum of squares relaxations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(5): 1048 – 1053.
- [12] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, WU F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: a Lyapunov-based approach [C] // *Proceedings of the 5th Asian Control Conference*. Melbourne: IEEE, 2004: 157 – 165.
- [13] MA H J, YANG G H. FTC synthesis for nonlinear systems: sum of squares optimization approach [C] // *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans: IEEE, 2007: 2645 – 2650.
- [14] ZENG M, WANG J, YU Z W, et al. Induced L_2 norm control for missile early-warning satellite attitude maneuver [C] // *Proceedings of the 3rd International Symposium on Systems and Control in Aeronautics and Astronautics*. Harbin: IEEE, 2010: 610 – 615.
- [15] 陈琦, 蔡宗平, 马清亮, 等. 一种基于平方和优化的飞行器大角度机动镇定控制器设计方法 [J]. 弹箭与制导学报, 2011, 31(6): 47 – 50.
(CHEN Qi, CAI Zongping, MA Qingliang, et al. A new approach for stabilizing controller design of spacecraft large angle attitude maneuver based on sum of squares optimization [J]. *Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance*, 2011, 31(6): 47 – 50.)
- [16] PRAJNA S, PARRILO P A, RANTZER A. Nonlinear control synthesis by convex optimization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(2): 310 – 314.
- [17] NARENDRA G, LUIS R. Control of large angle attitude maneuvers for rigid bodies using sum of squares [C] // *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. New York: IEEE, 2007: 3156 – 3161.
- [18] NARENDRA G. Switched control of satellites for global stabilization and local performance: a sum of squares approach [C] // *Proceedings of the 2008 American Control Conference*. Washington: IEEE, 2008: 2987 – 2992.
- [19] ZHENG Q, WU F. Nonlinear H_∞ control design with axisymmetric spacecraft control [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32(3): 850 – 859.
- [20] ZHENG Q, WU F. Generalized nonlinear H_∞ synthesis condition with its numerically efficient solution [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 21(18): 2079 – 2100.
- [21] 王佳, 曾鸣, 苏宝库. 基于平方和的卫星大角度姿态机动非线性 H_∞ 控制 [J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(5): 1024 – 1028.
(WANG Jia, ZENG Ming, SU Baoku. Nonlinear H_∞ control of large angle attitude maneuvers for satellites using sum of squares [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2010, 32(5): 1024 – 1028.)
- [22] WANG J, ZENG M, YU Z W, et al. Adaptive back-stepping LPV control of satellite attitude maneuvers with sum of squares [C] // *Proceedings of the 8th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Jinan: IEEE, 2010: 1747 – 1752.
- [23] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, SEILER P, et al. SOSTOOLS: sum of squares optimization toolbox for matlab: user's guide version 2.0 [DB/OL]. available: <http://www.cds.caltech.edu/sostool/>, March 31, 2012.
- [24] CHESI G, GARULLI A, TESI A, et al. *Homogeneous Polynomial Forms for Robustness Analysis of Uncertain Systems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
- [25] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(YU Li. *Robust Control—Linear Matrix Inequality Approach* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
- [26] GENNARO S D. Output stabilization of flexible spacecraft with active vibration suppression [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, 39(3): 747 – 759.

作者简介:

周燕茹 (1986–), 女, 博士研究生, 目前研究方向为非线性控制、姿态控制, E-mail: zhouyr1986@126.com;

黄文超 (1985–), 男, 讲师, 目前研究方向为鲁棒控制、非线性控制, E-mail: ehwenc@gmail.com;

曾建平 (1966–), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、非线性控制、复杂系统控制, E-mail: jpzeng@xmu.edu.cn.