第 31 卷第 2 期
2014 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 31 No. 2
Feb. 2014

DOI: 10.7641/CTA.2014.30486

基于Radau伪谱法的非线性最优控制问题的收敛性

黄 诘[1,3†], 张友安[1], 王丽英[2]

(1. 海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001; 2. 海军航空工程学院 系统科学与数学研究所, 山东 烟台 264001;

3. 海军航空工程学院 航空仪电控制系, 山东 青岛 266041)

摘要: 在过去的10年里, 伪谱方法(如Legendre伪谱法、Gauss伪谱法、Radau伪谱法)逐步成为求解不同领域中非线性最优控制问题的一种高效、灵活的数值解法. 本文从最优控制问题解的存在性、收敛性以及解的可行性3个方面对采用Radau伪谱法求解一般非线性最优控制问题解的收敛性进行研究. 证明了原最优控制问题的离散解存在、存在收敛到原最优控制问题解上的离散解和离散形式的收敛解是原最优控制问题的最优解. 在此基础上, 证明了Radau伪谱法的收敛性. 本文结论与现有文献相比, 去掉了一些必要条件, 更适合一般的非线性时不变系统.

关键词: Radau伪谱法; 收敛性; 最优解; 存在性

中图分类号: TJ765 **文献标识码**: A

Convergence of nonlinear optimal control problem using Radau pseudospectral method

HUANG Jie[1,3†], ZHANG You-an[1], WANG Li-ying[2]

(1. Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China;
2. Institute of Systems Science and Mathematics, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China;
3. Department of Aeronautical Instrument and Electronics Control, Naval Aeronautical and Astronautical University,
Qingdao Shandong 266041, China)

Abstract: In the last decade, pseudospectral (PS) methods, such as Legendre PS method, Gauss PS method and Radau PS method, have emerged as effective and flexible approaches to solve nonlinear optimal control in a variety of areas in applications. We investigate the Radau PS method in solving nonlinear optimal control problems, from the aspects of solution existence, solution convergence and solution feasibility. The investigation results show that the discrete form of the original optimal control problem has solutions, the solutions of the discrete form converge to the solutions of the original problems, and the convergent solution of the discrete form is the optimal solution of the original problem. Thus, the convergence of the Radau PS method is proved. Compared with existing results in the literature, the conclusions of this paper remove some necessary conditions, making this method more applicable to general nonlinear time-invariant systems.

Key words: Radau PS method; convergence; optimal solution; feasibility

1 引言(Introduction)

最优控制理论的发展已经有很长的历史了, 但能够精确、高效的求解非线性最优控制问题并且比较实用的算法仍然有限. 起源于谱方法的伪谱法作为一种高效率、高精度的数值计算方法在计算流体力学和偏微分方程的求解中受到了广泛的应用. 近年来, 伪谱方法逐渐被应用于最优控制问题的求解中.

稳定性和收敛性对任何一种数值计算方法都是至关重要的, 虽然伪谱法在很多领域中都有应用[1–2], 但采用伪谱法求解最优控制问题数值解的稳定性和收敛性一直是公开的研究热点和难点[3–4]. 目前, 只有少数文献针对特殊的系统研究了伪谱法求解最优控制问题的收敛性问题, 如文献[3]对基于Legendre伪谱法的可反馈线性化系统的最优控制问题的收敛性进行了研究, 在一系列必要的假设条件下得到了收敛性结论, 文献[4]在文献[3]的基础上对假设条件进行了弱化, 得到了连续和不连续可反馈线性化系统的最优控制问题的收敛性, 文献[5]在基于平滑性等一些假设条件下研究了Gauss伪谱法的收敛性, 证明了针对无约束连续控制问题, Gauss伪谱法是收敛的. 且相比较以上两种伪谱法而言, Radau伪谱法对求解非线性最优控制问题最优解的速度更快、精度更高. 文献[6]仅通过仿真实验验证了Radau伪谱法比Legendre和Gauss伪谱法在求解最优控制问题数值解时具有更快的收

收稿日期: 2013−05−16; 录用日期: 2013−08−02.
†通信作者. E-mail: ythuangjie2009@163.com; Tel.: +86 18505453943.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61273058).

敛速度, 但没有给出理论上的证明. 目前理论证明Radau伪谱法的收敛性仍没有很好地解决[7], 并且研究的系统大多数属于一般性系统.

基于以上原因, 本文针对一般性系统, 研究基于Radau伪谱法求解最优控制问题数值解的收敛性问题. 从理论上证明Radau伪谱法对于解决一般非线性系统的最优控制问题是收敛的. 相比文献[3–5], 首先, 本文针对的系统为一般连续非线性时不变系统, 包含了文献[3–4]中的可反馈线性化系统; 其次, 文献[5]研究的是无约束条件下的最优控制问题; 最后, 本文去掉了文献[3–4]中的可反馈线性化系统必须存在收敛的子序列和文献[5]要求非线性系统的状态变量和协态变量具有$k+1(k\geqslant 3)$阶连续可导等假设条件(见问题陈述), 这些条件要求非线性系统存在满足一定的收敛性和有界性要求, 而本文的结论适合一般连续时不变的非线性系统, 虽然要求控制变量满足有界的条件, 但是对于最优控制问题来说, 这个条件是比较容易满足的.

2 问题陈述(Problem formulation)

考虑以下一般最优控制问题. 寻找控制变量$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^m$使如式(1)所示的Bolza型代价函数最小化[8]:

$$J=E[\boldsymbol{x}(t_0),t_0,\boldsymbol{x}(t_{\rm f}),t_{\rm f}]+\int_{t_0}^{t_{\rm f}}g[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)]{\rm d}t, \tag{1}$$

且满足动态约束$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))$. 路径约束

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))\leqslant\boldsymbol{0}$$

和边界条件

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}(t_0),t_0,\boldsymbol{x}(t_{\rm f}),t_{\rm f})=\boldsymbol{0},$$

式中: $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$表示状态变量, $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{C}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^s$, $\boldsymbol{\Phi}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^q$, E表示Mayer型代价函数, g表示Lagrange型代价函数, t表示时间.

以上非线性时不变Bolza问题定义在时间区间$t\in[t_0,t_{\rm f}]$上, 但是伪谱法需要在一个固定的时间区间$[-1,1]$上研究问题, 可以通过以下关系将自变量映射到一般区间$\tau\in[-1,1]$上:

$$t=\frac{t_{\rm f}-t_0}{2}\tau+\frac{t_{\rm f}+t_0}{2}. \tag{2}$$

应用式(2), 可重新定义Bolza问题为如下形式, 即最小化代价函数

$$J=E[\boldsymbol{x}(\tau_0),t_0,\boldsymbol{x}(\tau_{\rm f}),t_{\rm f}]+\frac{t_{\rm f}-t_0}{2}\int_{\tau_0}^{\tau_{\rm f}}g[\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{u}(\tau)]{\rm d}\tau$$

满足

$$\frac{{\rm d}x}{{\rm d}\tau}=\frac{t_{\rm f}-t_0}{2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{u}(\tau))\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{u}(\tau))\leqslant\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}(\tau_0),t_0,\boldsymbol{x}(\tau_{\rm f}),t_{\rm f})=\boldsymbol{0}.$$

本文研究以上一般非线性时不变最优控制问题Radau伪谱法的收敛性, 不失一般性, 将考虑最优控制问题的区间定义为$\tau\in[-1,1]$, 并且控制变量满足一定的约束条件, 得到以下问题.

问题 1 在区间$\tau\in[-1,1]$上考虑以下Bolza型的一般连续非线性时不变最优控制问题, 寻找控制变量, 使如式(3)所示的代价函数最小化:

$$J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=E(\boldsymbol{x}(-1),\boldsymbol{x}(+1))+\int_{-1}^{+1}g(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)){\rm d}t, \tag{3}$$

满足

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))\leqslant\boldsymbol{0}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}(-1),\boldsymbol{x}(+1))=\boldsymbol{0} \tag{6}$$

和控制约束

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|\leqslant A,\ u\in W_m^{\alpha,p},\ \alpha\geqslant 2, \tag{7}$$

其中: $g\in C^m$, $\boldsymbol{f}\in C_n^{m-1}$, 而$W_m^{\alpha,p}$表示$m$维向量Sobolev空间; 当$m=1$时对所有满足$0\leqslant j\leqslant\alpha$, 空间包含函数$\xi:[-1,1]\to\mathbb{R}$, 它的$j$阶弱导数$\xi^{(j)}$在$L^p$中有下列形式:

$$\|\xi\|_{W^{\alpha,p}}=\sum_{j=0}^{\alpha}\|\xi^{(j)}\|_{L^p}.$$

文献[4]研究Legendre伪谱法收敛性的状态方程必须满足以下关系:

$$\dot{x}_1=x_2,\ \cdots,\ \dot{x}_{r-1}=x_r,$$
$$\dot{x}_r=\boldsymbol{f}(x)+g(x)\boldsymbol{u}.$$

针对连续和非连续最优控制问题, Legendre伪谱法收敛的假设条件分别为:

条件 1 序列$\{N\}_{N=1}^{\infty}$存在一个收敛的子序列$\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$使得当$N_j\to\infty$时, $\{\bar{x}^{N_j0}\}_{j=1}^{\infty}$收敛. 另外, 存在一连续函数$q(t)$使得$\dot{x}_r^{N_j}(t)$在区间$[-1,+1]$上一致收敛到$q(t)$.

条件 2 对于给定的一序列离散可行轨迹解$\{\bar{x}^N,\bar{u}^N\}_{N=N_1}^{\infty}$, $\{N\}_{N=1}^{\infty}$存在一个子序列$\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$使得以下条件满足:

a) 本文中, 对于所有的$1\leqslant i\leqslant r$, 当$N_j\to\infty$时$\{\bar{x}_i^{N_j0}\}_{N_j=N_1}^{\infty}$收敛;

b) 当$N_j\geqslant N_1$, $t\in[-1,1]$时$\dot{x}_r^{N_j}(t)$一致有界;

c) 存在一个分段连续函数$q(t)$使得对所有的定值$\varepsilon>0$, $\dot{x}_r^{N_j}(t)$在区间I_ε上一致收敛到$q(t)$. 其中:

$$I_\varepsilon=[-1,1]\backslash\bigcup_{j=1}^{s}(\tau_j-\varepsilon,\tau_j+\varepsilon),$$

$-1<\tau_1<\cdots<\tau_s<1$表示函数$q(t)$的不连续点.

文献[5]针对较简单的无控制约束的系统, 在平滑性和有界性等4个假设条件下研究了Gauss伪谱法的

收敛性, 由于篇幅原因, 将不在这里列写了, 可参考文献[5].

3　Radau伪谱法(Radau pseudospectral)

本文Radau伪谱法(Radau pseudospectral method, RPM)作为配点法, 能够以较少的节点获得很高的求解精度. 根据Radau协态映射定理, 采用RPM得到的非线性规划(nonlinear programming, NLP)问题的KKT(Karush-Kuhn-Tucker)条件与原最优控制问题的一阶最优必要条件的离散形式具有一致性. 因此RPM使得其NLP问题的解满足传统间接法的一阶最优必要条件, 避免了常规直接法的不足[7]. RPM应用N阶拉格朗日多项式来近似最优控制问题的状态变量和控制变量:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(\tau)\approx I_N\boldsymbol{x}(\tau)=\sum\limits_{k=1}^{N+1}\bar{\boldsymbol{x}}_k l_k(\tau),\\ \boldsymbol{u}(\tau)\approx I_N\boldsymbol{u}(\tau)=\sum\limits_{k=1}^{N}\bar{\boldsymbol{u}}_k l_k(\tau).\end{cases}\tag{8}$$

由拉格朗日多项式的性质, τ_k为多项式的配点, 所以有$\boldsymbol{x}(\tau_k)=I_N\boldsymbol{x}(\tau_k)=\bar{\boldsymbol{x}}_k$, $\boldsymbol{u}(\tau_k)=I_N\boldsymbol{u}(\tau_k)=\bar{\boldsymbol{u}}_k$, 即$\bar{\boldsymbol{x}}_k, \bar{\boldsymbol{u}}_k$为原最优控制问题的离散值, 也将成为下面离散问题的决策变量. 性能指标函数中的积分项由高斯积分公式来近似:

$$\int_{-1}^{1}g(t)\mathrm{d}t\approx\sum_{i=1}^{N}g(\tau_i)\omega_i,\ \omega_i=\int_{-1}^{1}l_i(t)\mathrm{d}t,\tag{9}$$

其中:

$$l_j(\tau)=\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{N+1}\frac{\tau-\tau_l}{\tau_j-\tau_l},\ j=1,\cdots,N+1$$

为拉格朗日多项式基, $\tau_j\in\mathit{\Gamma}^{\mathrm{LGR}}$, $\mathit{\Gamma}^{\mathrm{LGR}}=\{\tau_i=(P_{N-1}(\tau)+P_N(\tau))|_{\tau_i}=0,\ i=1,\cdots,N\}\cup\{-1\}$. 式(8)在$\tau_j\in\mathit{\Gamma}^{\mathrm{LGR}}$处的微分表达式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_N\boldsymbol{x}(\tau_j)=\sum_{k=1}^{N+1}\bar{\boldsymbol{x}}_k\dot{l}_k(\tau_j)=\sum_{k=1}^{N+1}D_{jk}\bar{\boldsymbol{x}}\triangleq(D_N\boldsymbol{x})(\tau_j),$$

其中D为$N\times(N+1)$阶Radau伪谱微分矩阵[9](详细的离散化过程可参见文献[7]).

最终将连续时间最优控制问题1转化为下列非线性规划问题.

问题 2　寻找最优控制量, 使得以下性能指标最小:

$$\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}})=E(\bar{\boldsymbol{x}}_0,\bar{\boldsymbol{x}}_N)+\sum_{k=0}^{N}g(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{u}}_k)\omega_k,\tag{10}$$

且满足

$$\|\boldsymbol{f}(I_N\boldsymbol{x},I_N\boldsymbol{u})-D_N\boldsymbol{x}\|_N\leqslant c_0N^{1-m},\tag{11}$$

$$\boldsymbol{C}(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{u}}_k)\leqslant\boldsymbol{0},\tag{12}$$

$$\boldsymbol{\varPhi}(\bar{\boldsymbol{x}}_0,\bar{\boldsymbol{x}}_N)=\boldsymbol{0},\tag{13}$$

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|\leqslant A,\ \forall\ k=0,1,\cdots,N,\tag{14}$$

其中c_0是一个正常数.

注 1　不等式(11)是由动态方程(4)进行缩放得来的, 目的是为了保证离散问题有可行解, 在定理1中得到证明.

4　理论基础(Theoretical foundation)

引理 1　如果$h\in W^{\alpha}(\Omega)$, 那么存在常数$c_1, c_2, c_3, c>0$使得以下不等式成立[10]:

a) $\|h-I_Nh\|_2\leqslant c_1N^{-\alpha}\|h\|_{(\alpha)}$, 其中$I_Nh$为插值多项式;

b) $\|\dot{h}-D_Nh\|_2\leqslant c_2N^{1-\alpha}\|h\|_{(\alpha)}$, $\|\dot{h}-D_Nh\|_N\leqslant c_3N^{1-\alpha}\|h\|_{(\alpha)}$, 其中$D_Nh$为插值多项式的微分;

c) $|\int_{-1}^{1}h(t)\mathrm{d}t-\sum\limits_{k=0}^{N}h(\tau_k)\omega_k|\leqslant cN^{-\alpha}\|h\|_{(\alpha)}$, 其中: τ_k为LGR(Legendre Gauss Radau)节点, ω_k为相应的LGR积分权重.

引理 2　假如$\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)^{\mathrm{T}}$, $h\in W_n^{\alpha}(\Omega)$, $h_i\in W^{\alpha}(\Omega)$, $i=1,2,\cdots,n$, 则[10]

a) 引理1中a)的向量表现形式为

$$\|\boldsymbol{h}-I_N\boldsymbol{h}\|_2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|h_i-I_Nh_i\|_2\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_iN^{-\alpha}\|h_i\|_{(\alpha)};$$

b) 引理1中b)可以延伸为

$$\|\dot{\boldsymbol{h}}-D_N\boldsymbol{h}\|_2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|\dot{h}_i-D_Nh_i\|_2\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_iN^{1-\alpha}\|h_i\|_{(\alpha)}\leqslant cN^{1-\alpha}.$$

引理 3　对于给定的$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{x}\in W_n^{\alpha}(\Omega)$, $\boldsymbol{u}\in W_m^{\alpha}(\Omega)$和插值系数$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}})$, 则由式(3)(10)定义的代价函数之间具有如下的误差关系:

$$|J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}})|\leqslant cN^{-\alpha}.$$

证　由伪谱法的定义可知$E(\boldsymbol{x}(-1),\boldsymbol{x}(+1))=E(\bar{\boldsymbol{x}}_0,\bar{\boldsymbol{x}}_N)$, 故

$$|J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}})|=|\int_{-1}^{1}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{N}g(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{u}}_k)\omega_k|.$$

因为$g\in C^{\alpha}$, $\boldsymbol{x}\in W_n^{\alpha}(\Omega)$, $\boldsymbol{u}\in W_m^{\alpha}(\Omega)$, 所以$g(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))\in W^{\alpha}(\Omega)$, 由引理1中c)可知

$$|\int_{-1}^{1}g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{N}g(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{u}}_k)\omega_k|\leqslant cN^{-\alpha}\|g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\|_{(\alpha)},$$

又$g(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))\in W^{\alpha}(\Omega)$, 所以$\|g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\|_{(\alpha)}$有界. 引理得证.　　证毕.

5　主要结论(Main results)

定理 1　假设问题1有一个解$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$, 那么问题2就存在一个可行解$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}})$, 并且解为相应的插值多项式系数.

证 设$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$为一个可行解, $(I_N\boldsymbol{x},I_N\boldsymbol{u})$为解在LGR节点处的插值多项式. 现在需要证明的是这个多项式的系数满足问题2中的约束条件. 由于离散值只计算插值点处的值, 由引理2中b)可得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{f}(I_N\boldsymbol{x},I_N\boldsymbol{u})-D_N\boldsymbol{x}\|_N\leqslant\\&\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-D_N\boldsymbol{x}\|_N\leqslant\\&\|\dot{\boldsymbol{x}}-D_N\boldsymbol{x}\|_N\leqslant cN^{1-\alpha},\end{aligned}$$

故插值系数$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}})$满足问题2中的式(11).

对于路径约束, 因为对所有的$t\in\varOmega$都有$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)\leqslant\boldsymbol{0}$成立, 那么对于所有的属于$t\in\varOmega$中的LGR节点$\tau_k\in\varGamma^{\mathrm{LGR}}$亦有

$$\boldsymbol{C}(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{u}}_k)=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}(\tau_k),\boldsymbol{u}(\tau_k))\leqslant\boldsymbol{0},$$

所以式(12)满足. 而对于终端约束, 由定义

$$\boldsymbol{\varPhi}(\boldsymbol{x}(-1),\boldsymbol{x}(+1))=\boldsymbol{\varPhi}(\bar{\boldsymbol{x}}_0,\bar{\boldsymbol{x}}_N)=\boldsymbol{0}.$$

综上可得$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}})$为问题2的一个可行解. 定理得证.

证毕.

定理 2 假设问题2有一序列解$\{(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}})\}_N$, 那么其相应的插值多项式$\{(I_N\boldsymbol{x},I_N\boldsymbol{u})\}_N$有一个收敛的子序列$\lim\limits_{N_j\to\infty}(I_N\boldsymbol{x},I_N\boldsymbol{u})=(I_\infty\boldsymbol{x},I_\infty\boldsymbol{u})$, 且极限值$(I_\infty\boldsymbol{x},I_\infty\boldsymbol{u})$为问题1的一个可行解.

证 设$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{u}})$为问题2的一个解, 且满足约束条件(11)–(13). 由式(11)可得

$$(\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{f_i(I_Nx,I_Nu)-D_Nx_i)^2(\tau_k)}\,)\leqslant c_dN^{1-\alpha}.$$

由$\boldsymbol{f}$连续可知

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}(f_i(I_N\boldsymbol{x},I_N\boldsymbol{u})-D_Nx_i)(\tau_k)=\\&f_i((\lim_{N\to\infty}I_N\boldsymbol{x},\lim_{N\to\infty}I_N\boldsymbol{u})-\lim_{N\to\infty}D_Nx_i)(\tau_k)=0.\end{aligned}\tag{15}$$

因为在紧集$\varOmega$中, $\{I_N\boldsymbol{x}\}$是一个多项式序列, 故对有限的N, $I_N\boldsymbol{x}\in W_n^\alpha(\varOmega)$, 式(15)中的$(\lim\limits_{N\to\infty}I_N\boldsymbol{x})'$与状态方程中的$\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{C}_n^{\alpha-1}$是相匹配的; 又$\boldsymbol{f}$在$\varOmega$中有界, 因此, 对于所有的$N$, $I_N\boldsymbol{x}\in W_n^\alpha(\varOmega)$, 故$\{I_N\boldsymbol{x}\}$有界. 由Rellich定理[11]可知: 插值多项式$\{I_N\boldsymbol{x}\}$存在一个子序列$\{I_{N_j}\boldsymbol{x}\}$在$W_n^\alpha(\varOmega)$中收敛, 同理, 控制序列也可得到一个收敛的子序列, 故函数序列$\{(I_N\boldsymbol{x},I_N\boldsymbol{u})\}$至少存在一个极限点$\{(I_\infty\boldsymbol{x},I_\infty\boldsymbol{u})\}$.

因为$\{I_N\boldsymbol{x}\}_N$存在一个收敛的子序列, 所以由式(15)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_\infty\boldsymbol{x})(\tau_k)=\boldsymbol{f}(I_\infty\boldsymbol{x},I_\infty\boldsymbol{u})(\tau_k),$$

即$\{(I_\infty\boldsymbol{x},I_\infty\boldsymbol{u})\}$在节点处满足问题1中的状态方程(4). 又当$N$变大时, LGR节点在$\varOmega$中变得越稠密, 故当$N\to\infty$时, $(I_\infty\boldsymbol{x},I_\infty\boldsymbol{u})$在$\varOmega$中的每个点都能满足问题1中的动态方程.

同理, 由$\boldsymbol{C}(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{x}}_k)=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}(t_k),\boldsymbol{u}(t_k))\leqslant\boldsymbol{0}$可知, 当$N\to\infty$时, LGR节点变得稠密, 所以解能够满足路径约束. 而对于终端约束来说, 由于终端处的值与离散值是一致的, 所以同样得到满足. 定理得证.

证毕.

定理 3 假设问题1有一个最优的解$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)$, $\{(\bar{\boldsymbol{x}}^\circ,\bar{\boldsymbol{u}}^\circ)\}_N$为问题2的一序列最优解, 那么序列最优解相对应的插值多项式$\{(I_N\boldsymbol{x}^\circ,I_N\boldsymbol{u}^\circ)\}_N$有一极限点$(I_\infty\boldsymbol{x}^\circ,I_\infty\boldsymbol{u}^\circ)$, 并且极限值为原最优控制问题的一个最优解.

证 因为$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)$为问题1的一个最优解, 由定理1可知: 插值多项式序数$(\bar{\boldsymbol{x}}^*,\bar{\boldsymbol{u}}^*)$是问题2的一个可行解.

因为$(\bar{\boldsymbol{x}}^\circ,\bar{\boldsymbol{u}}^\circ)$为问题2的最优解, 故

$$\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}}^\circ,\bar{\boldsymbol{u}}^\circ)\leqslant\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}}^*,\bar{\boldsymbol{x}}^*).\tag{16}$$

由定理2可知: 问题2的离散最优解的插值多项式的极限点$\lim\limits_{N\to\infty}(I_N\boldsymbol{x}^\circ,I_N\boldsymbol{u}^\circ)=(I_\infty\boldsymbol{x}^\circ,I_\infty\boldsymbol{u}^\circ)$为问题1的一个可行解, 又$(\bar{\boldsymbol{x}}^*,\bar{\boldsymbol{x}}^*)$为问题1的最优解, 所以

$$\begin{aligned}J(\bar{\boldsymbol{x}}^*,\bar{\boldsymbol{u}}^*)\leqslant\lim_{N\to\infty}J(I_N\boldsymbol{x}^\circ,I_N\boldsymbol{u}^\circ)=\\J(I_\infty\boldsymbol{x}^\circ,I_\infty\boldsymbol{u}^\circ).\end{aligned}\tag{17}$$

由引理3可知, 问题1的最优解$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)$及其插值多项式系数$(\bar{\boldsymbol{x}}^*,\bar{\boldsymbol{u}}^*)$所对应的性能函数值间的误差是有界的, 即

$$|J(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)-J(\bar{\boldsymbol{x}}^*,\bar{\boldsymbol{u}}^*)|\leqslant c_0N^{-\alpha}.\tag{18}$$

同理可以得到

$$|J(I_N\boldsymbol{x}^\circ,I_N\boldsymbol{u}^\circ)-\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}}^\circ,\bar{\boldsymbol{u}}^\circ)|\leqslant c_1N^{-\alpha}.\tag{19}$$

当$N\to\infty$时, 由式(18)–(19)可得

$$\lim_{N\to\infty}J(\bar{\boldsymbol{x}}^*,\bar{\boldsymbol{u}}^*)=J(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*),\tag{20}$$

$$\lim_{N\to\infty}[J(I_N\boldsymbol{x}^\circ,I_N\boldsymbol{u}^\circ)-\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}}^\circ,\bar{\boldsymbol{u}}^\circ)]=0.\tag{21}$$

结合式(20)(16)–(17)有

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}}^\circ,\bar{\boldsymbol{u}}^\circ)\leqslant\\&\lim_{N\to\infty}J(\bar{\boldsymbol{x}}^*,\bar{\boldsymbol{u}}^*)=J(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*),\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}}^\circ,\bar{\boldsymbol{x}}^\circ)\leqslant\\&J(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{u}}^*)\leqslant\lim_{N\to\infty}J(I_N\boldsymbol{x}^\circ,I_N\boldsymbol{u}^\circ).\end{aligned}\tag{23}$$

由式(21)–(22)可知

$$\begin{aligned}0\leqslant&\lim_{N\to\infty}[J(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)-\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}}^\circ,\bar{\boldsymbol{u}}^\circ)]\leqslant\\&\lim_{N\to\infty}[J(I_N\boldsymbol{x}^\circ,I_N\boldsymbol{u}^\circ)-\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}}^\circ,\bar{\boldsymbol{u}}^\circ)]=0,\end{aligned}\tag{24}$$

所以$J(I_N\boldsymbol{x}^\circ,I_N\boldsymbol{u}^\circ)$和$\bar{J}(\bar{\boldsymbol{x}}^\circ,\bar{\boldsymbol{u}}^\circ)$都收敛到问题1的最优代价函数$J(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)$上. 由于$(I_\infty\boldsymbol{x}^\circ,I_\infty\boldsymbol{u}^\circ)$为问题2的一个可行解且代价函数最优, 所以$(I_\infty\boldsymbol{x}^\circ,I_\infty\boldsymbol{u}^\circ)$是问题1的一个最优解. 定理得证. 证毕.

6 结束语(Conclusions)

利用多项式近似理论研究了Radau伪谱法的收敛性. 从理论上证明了对于一般性的非线性最优控制问题, Radau伪谱法是一个收敛的求解最优解的离散化方法. 对于处理一般性的最优控制问题, 通过Radau伪谱离散方法可以快速求解到原最优控制问题的最优解.

本文研究了Radau伪谱法的收敛性, 另外Radau伪谱法是一个收敛速度非常快的数值计算方法, 下一步的工作是从理论上证明其收敛速度.

参考文献(References):

[1] 张友安, 王丽英, 赵国荣. 基于伪谱法的自由采样实时最优反馈控制及应用 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(9): 1151 – 1156.
(ZHANG You'an, WANG Liying, ZHAO Guorong. Pseudospectral-based free sampling real-time optimal feedback control and its application [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(9): 1151 – 1156.)

[2] TONG K W, ZHOU J P, HE L S. Legendre Gauss pseudospectral method for solving optimal control problem [J]. *Acta Aeronautic et Astronautica Sinica*, 2008, 29(4): 1531 – 1538.

[3] GONG Q, KANG W, ROSS I M. A pseudospectral method for the optimal control of constrained feedback linearizable systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(7): 1115 – 1129.

[4] KANG W, ROSS I M, GONG Q. *Pseudospectral Optimal Control and Its Convergence Thorems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[5] HOU H Y, HAGER W W, RAO A V. Convergence of a gauss pseudospectral method for optimal control [C] //*AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Minnesota: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012, 8: 1 – 9.

[6] DARBY C L, HAGER W W, ANIL V R. Direct trajectory optimization using a variable low-order adaptive pseudospectral method [J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2011, 48(3): 433 – 445.

[7] GARG D. *Advances in global pseudospectral methods for optimal control* [D]. Florida: University of Florida, 2011.

[8] HUNTINGTON G T. *Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control* [D]. Florida: University of Florida, 2007.

[9] GARG D, PATTERSON M A, DARBY C L, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation of finite-horizon and infinite-horizon optimal control problems via a radau pseudospectral method [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2011, 49(2): 335 – 358.

[10] CANUTO C, HUSSAINI M Y, QUARTERONO A. *Spectral Methods* [M]. Berlin: Springer, 2006.

[11] FOLLAND G B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Application* [M]. New York: John Wiley Sons, 1984.

作者简介:

黄 诘 (1984–), 男, 博士研究生, 目前研究方向为先进控制技术及其在制导中的应用, E-mail: ythuangjie2009@163.com.cn;

张友安 (1963–), 男, 教授, 目前研究方向为导航、制导与先进控制技术, E-mail: zhangya63@sina.com.cn;

王丽英 (1981–), 女, 讲师, 目前研究方向为差分动力系统, E-mail: ytliyingwang@163.com.cn.