

随机环境下带有私人信息的单机能力分配策略

黄敏, 宋敏[†], 周宁宁, 王兴伟

(东北大学信息科学与工程学院; 流程工业综合自动化国家重点实验室(东北大学), 辽宁 沈阳 110819)

摘要: 本文研究随机环境下考虑私人信息的单机能力分配问题. 该问题中各部门的单位产品收益、需求信息及加工设备各时段的能力为私人信息,且各时段中产品的加工时间为随机变量. 本文采用设备方与各部门协商的方法对问题进行求解,首先利用随机规划理论将能力分配问题清晰化,然后利用拉格朗日松弛和泰勒级数展开方法进行协商机制设计,接着给出基于偏转次梯度方法的协商参数更新法则,最后综合上述过程给出最终的问题求解算法. 数值算例验证了算法的有效性并分析了关键参数对能力分配结果的影响.

关键词: 能力分配; 随机加工时间; 私人信息; 次梯度

中图分类号: TP273 文献标识码: A

Capacity allocation strategy of a single facility with private information in random environment

HUANG Min, SONG Min[†], ZHOU Ning-ning, WANG Xing-wei

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University;

State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries (Northeastern University), Shenyang Liaoning 110819, China)

Abstract: We investigated the capacity allocation of a single facility with private information in random environment, in which the earning per unit and the demand for each organization as well as the manufacturing capability of facility are private and the product processing time for each organization is random. A negotiation-based method between the facility and organizations is proposed to solve the capacity allocation problem with the following solving process. First, the stochastic programming theory is applied to clarify the proposed capacity allocation problem, and then the negotiation mechanism design is performed via Lagrangian relaxation and Taylor series expansion. Further, a method based on the deflected sub-gradient method is derived to update negotiation parameters. The combination of the above steps constitutes the final solution algorithm. Numerical examples demonstrate the efficiency of the proposed algorithm and also analyze the effect of key parameters on capacity allocation results.

Key words: capacity allocation; random processing time; private information; sub-gradient

1 引言(Introduction)

广泛存在于生产实际的能力分配问题一直是广大学者和业界的关注热点^[1-3]. 目前已有大量工作从不同角度,用不同方法对其进行研究. Li等人^[4]应用混合整数规划的方法研究了集成供应链中的能力分配问题. Yarrow等人^[5]应用组合拍卖的方法确定了半导体代工制造中最优能力分配方案. Mathur等人^[6]应用博弈论研究了能力整合问题. 现有工作为能力分配问题的研究提供了理论基础,但实际应用价值有限,主要由于多数文献假设环境确定且信息完全. 事实上,一方面,随着市场经济全球化的发展,能力分配过程中

贯穿了越来越多的会降低能力分配效率的随机因素;另一方面,在分布式管理成为企业管理主要模式的今天,尽管信息完全交换在技术上可行,但由于分布式企业中的每个决策者都追求自身利润的最大化,都不可避免地会隐藏一些信息,私人信息大量存在^[7-9]. 因此,研究随机环境下带有私人信息的能力分配问题具有非常重大的实际意义.

基于以上背景,本文首次针对产品的加工时间为随机变量,分享单机生产能力的各部门的产品单位收益、需求信息以及设备方各时段的生产能力均为私人信息时的单机能力分配问题进行了研究. 首先应用随

收稿日期: 2013-05-26; 录用日期: 2013-11-01.

[†]通信作者. E-mail: bingning1982330@126.com; Tel.: +86 24-83691272.

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(71325002, 61225012); 国家自然科学基金资助项目(71071028, 70931001, 1021061); 高等学校博士学科点专项科研基金优先发展领域资助项目(20120042130003); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20110042110024); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(N110204003, N120104001, N130604004); 流程工业综合自动化国家重点实验室基础科研业务费资助项目(2013ZCX11).

机规划理论, 通过引入置信水平将随机能力约束清晰化. 其次利用拉格朗日松弛方法和泰勒级数展开方法进行协商机制设计, 此协商机制可以使缺失的全局信息在某种程度上得到补偿. 最后给出基于偏转次梯度的协商参数更新法则, 进而给出随机环境下带有私人信息的单机能力分配问题的求解方法.

本文的创新主要有如下3点: 1) 同时考虑了随机产品加工时间与私人信息, 所建模型更接近真实生产系统. 2) 清晰化模型中的置信水平由决策者根据自身偏好事先给出, 所建模型更具柔性. 3) 提出随机环境下考虑私人信息的单机能力分配策略.

2 问题描述(Problem description)

考虑分布式企业中 m 个部门在一个生产计划期内(共分为 t 个时段)共用一台加工设备情形下的单机能力分配问题. 定义部门集合为 $M = \{1, 2, \dots, m\}$, 时间段集合为 $T = \{1, 2, \dots, t\}$, 假设各部门中产品的单位收益、需求信息及加工设备各时段的生产能力是私人信息; k 时段部门 i 产品的加工时间 a_{ik} 是随机变量. 本文研究的问题: 考虑需求和能力两类约束的同时, 如何分配加工设备的有限能力最大化所有部门的总收益. 该问题框架如图1所示.

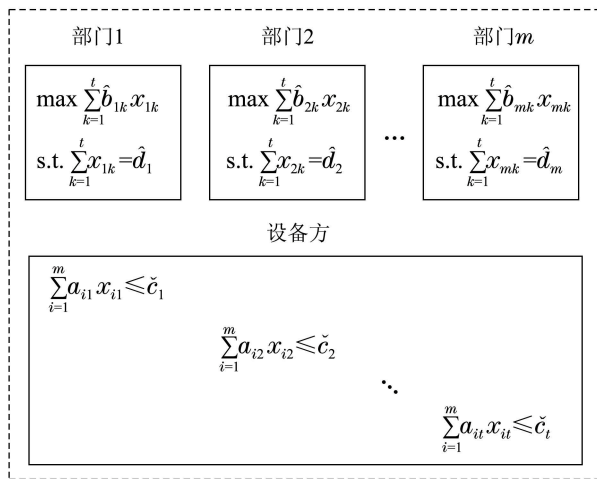


图1 问题框架

Fig. 1 Problem framework

图1中的 d_i 为产品 i 的需求; x_{ik} 为部门 i 要求的 k 时段中生产产品 i 的数量; y_{ik} 为设备方计划的 k 时段中生产产品 i 的数量; b_{ik} 为 k 时段中产品 i 的单位收益; c_k 为 k 时段中加工设备的能力; a_{ik} 为 k 时段中单位产品 i 的加工时间, 随机变量; “ \sim ”表示该参数为部门 i 的私人信息; “ \sim ”表示该参数为设备方的私人信息.

3 问题求解(Problem solving)

由于分布式企业中各部门与设备方均有各自的决策者, 所以本文采用协商的方法对问题进行求解. 针对各部门与设备方各自问题中的两大难点: 随机产品加工时间与私人信息, 本文采取先将模型清晰化再处

理私人信息的顺序加以解决, 详情如下.

3.1 能力约束清晰化(Crisp equivalent of capacity constraint)

在本文研究背景下, 问题求解的一个难点是随机产品加工时间的存在. 本文通过引入置信水平 $\lambda (> 95\%)$ 来刻画随机能力约束. 如果时段 $k (k \in T)$ 中所有产品的加工时间总和不超过设备加工能力的概率大于等于置信水平 λ , 即 $P(\sum_{i=1}^m a_{ik} x_{ik} \leq \check{c}_k) \geq \lambda$ 时, 笔者就认为随机能力约束成立. 由于此处置信水平 λ 是由决策者结合自身偏好事先给出的, 所以与常见的使用随机变量的平均值进行决策的清晰化方法相比, 本文所用方法会使模型更具柔性.

本文假设 a_{ik} 服从正态分布 $N(\mu_{ik}, \sigma_{ik}^2)$ 且 a_{ik} 相互独立, 其中: $i \in M, k \in T$ (为了便于表达, 本文仅考虑了服从正态分布且相互独立的随机产品加工时间, 此类产品加工时间在生产实际中比较常见, 如半导体制造等. 对于服从其它类型连续随机分布的产品加工时间, 同样可以利用随机规划的知识将其清晰化). 利用概率知识可知

$$\sum_{i=1}^m a_{ik} x_{ik} \sim N(\sum_{i=1}^m \mu_{ik} x_{ik}, \sum_{i=1}^m x_{ik}^2 \sigma_{ik}^2),$$

进而可以得到随机能力约束的等价类

$$\Phi^{-1}(\lambda) \sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ik}^2 \sigma_{ik}^2} + \sum_{i=1}^m \mu_{ik} x_{ik} \leq \check{c}_k, \quad (1)$$

其中 $\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega$.

至此, 本文所考虑的能力分配问题转化为确定性问题的. 问题框架如图2所示.

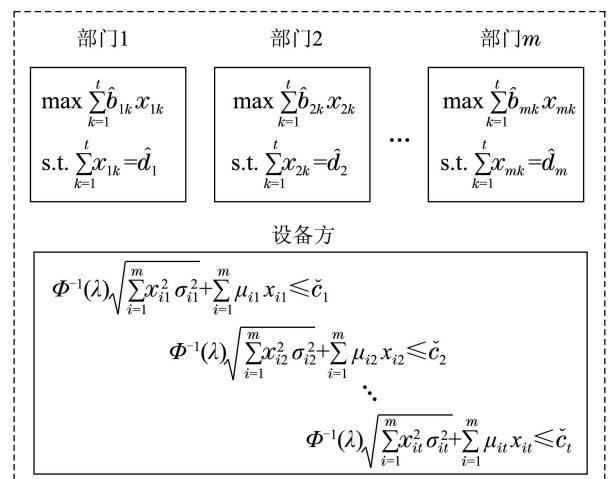


图2 确定性问题框架

Fig. 2 Deterministic problem framework

3.2 协商机制设计(Design of the negotiation mechanism)

在本文研究背景下, 各部门中产品的单位收益、需

求信息及加工设备各时段的生产能力均为私人信息,因此协商机制的设计更具有挑战性. Jeong等人^[10]提出的CICA算法是解决带有私人信息与耦合约束问题的一种十分有效的方法,目前在供应链管理中已得到广泛应用^[11-12]. 本文受其启发,将各部门看作耦合个体,将设备方看作被耦合独立组织进行协商机制设计. 图3给出了协商机制的框架.

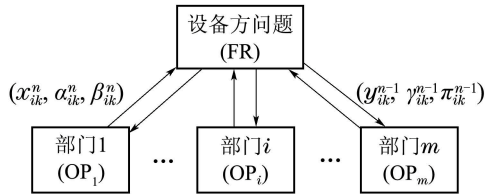


图3 协商机制框架

Fig. 3 Negotiation mechanism framework

图3中 $(x_{ik}^n, \alpha_{ik}^n, \beta_{ik}^n)$ 是第 n 次协商过程中,部门 i 传递给设备方的信息向量,其中: x_{ik}^n 是部门 i 要求在 k 时段生产产品 i 的数量, α_{ik}^n 和 β_{ik}^n 是当设备方给出的解与 x_{ik}^n 发生偏差时部门 i 提出的边际惩罚.

$(y_{ik}^{n-1}, \gamma_{ik}^{n-1}, \pi_{ik}^{n-1})$ 是第 n 次协商过程中,设备方传递给部门 $i(i \in M)$ 的信息向量,其中: y_{ik}^{n-1} 是设备方计划在 k 时段生产产品 i 的数量, γ_{ik}^{n-1} 和 π_{ik}^{n-1} 是当部门方要求的生产量与 y_{ik}^{n-1} 发生偏差时设备方提出的边际惩罚.

对于给定的信息向量 $(x_{ik}^n, \alpha_{ik}^n, \beta_{ik}^n)(i \in M)$,设备方的问题是在能力约束下最小化与各部门最优目标值的偏差;对于给定的信息向量 $(y_{ik}^{n-1}, \gamma_{ik}^{n-1}, \pi_{ik}^{n-1})$,各部门的问题是在需求约束下使自己的利润最大化. 下面笔者给出各部门与设备方具体的问题模型及信息向量中边际惩罚的计算方法.

3.2.1 部门 i 的问题(Problem of the organization i)

定理 1 本文对于给定的信息向量 $(y_{ik}^{n-1}, \gamma_{ik}^{n-1}, \pi_{ik}^{n-1})$,部门 i 的决策模型为

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=1}^t \hat{b}_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^t (\gamma_{ik}^{n-1} \max(0, y_{ik}^{n-1} - x_{ik}) + \pi_{ik}^{n-1} \max(0, x_{ik} - y_{ik}^{n-1})), \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^t x_{ik} = \hat{d}_i. \end{aligned} \quad (2)$$

证 部门方的目标是最大化自己的利润. 利用拉格朗日松弛方法,可得到部门 i 的等价问题如下:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=1}^t \hat{b}_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^t \theta_k (\check{c}_k - \Phi^{-1}(\lambda) \sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ik}^2 \sigma_{ik}^2} - \sum_{i=1}^m \mu_{ik} x_{ik}), \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^t x_{ik} = \hat{d}_i, \end{aligned}$$

其中 θ_k 为 k 时段对能力约束的拉格朗日乘子.

定义如下符号:

$$\begin{aligned} X_i &= (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{it})^T, Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{it})^T, \\ X &= (X_1^T, X_2^T, \dots, X_m^T)^T, Y = (Y_1^T, Y_2^T, \dots, Y_m^T)^T, \\ H(X) &= \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^t \theta_k (\check{c}_k - \Phi^{-1}(\lambda) \sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ik}^2 \sigma_{ik}^2} - \sum_{i=1}^m \mu_{ik} x_{ik}),$$

则函数 $H(X)$ 在 $X = Y$ 处的泰勒一阶展开式等价于

$$H(X) = H(Y) + \nabla^T H(Y)(X - Y). \quad (3)$$

式(3)等价于

$$\begin{aligned} H(X) &= H(Y) - \nabla^T H(Y) \max(\mathbf{0}, Y - X) + \nabla^T H(Y) \max(\mathbf{0}, X - Y). \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $\max(\mathbf{0}, Y - X) = (\max(0, y_{ik} - x_{ik}))_{m \times t \times 1}, i \in M, k \in T$. 式(4)可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} H(X) &= H(Y) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^t (\gamma_{it} \max(0, y_{ik} - x_{ik}) + \pi_{it} \max(0, x_{ik} - y_{ik})), \end{aligned} \quad (5)$$

其中:

$$\begin{aligned} \gamma_{ik} &= - \frac{\partial H(X)}{\partial x_{ik}} \Big|_{x_{ik}=y_{ik}-\Delta} = \\ & \theta_k [\Phi^{-1}(\lambda) \frac{\sigma_{ik}^2 y_{ik}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m y_{ik}^2 \sigma_{ik}^2}} + \mu_{ik}], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ik} &= \frac{\partial H(X)}{\partial x_{ik}} \Big|_{x_{ik}=y_{ik}+\Delta} = \\ & -\theta_k [\Phi^{-1}(\lambda) \frac{\sigma_{ik}^2 y_{ik}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m y_{ik}^2 \sigma_{ik}^2}} + \mu_{ik}], \end{aligned} \quad (7)$$

$H(Y)$ 为常数项不影响优化过程可省略,故定理1得证. 证毕.

上述证明过程中给出了惩罚项 γ_{ik} 和 π_{ik} 的计算方法. 不难看出, γ_{ik} 和 π_{ik} 分别代表 x_{ik} 与 y_{ik} 相比少于或多于 Δ 时

$$\sum_{k=1}^t \theta_k (\check{c}_k - \Phi^{-1}(\lambda) \sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ik}^2 \sigma_{ik}^2} - \sum_{i=1}^m \mu_{ik} x_{ik})$$

的变化量,所以,传递 γ_{ik} 和 π_{ik} 给部门 i ,相当于提供了部分能力信息给部门 i . 这样经过一轮又一轮的传递,全局信息的缺失可得到某种程度上的补偿.

3.2.2 设备方的问题(Problem of the facility)

定理 2 对于给定的信息向量 $(x_{ik}^n, \alpha_{ik}^n, \beta_{ik}^n)$,加工设备的决策模型为

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=1}^t \sum_{i=1}^m (\alpha_{ik}^n \max(0, x_{ik}^n - y_{ik}) + \beta_{ik}^n \max(0, y_{ik} - x_{ik}^n)), \\ \text{s.t.} \quad & \Phi^{-1}(\lambda) \sqrt{\sum_{i=1}^m y_{ik}^2 \sigma_{ik}^2} + \sum_{i=1}^m \mu_{ik} y_{ik} \leq \check{c}_k, k \in T. \end{aligned} \quad (8)$$

证 设备方的目标是最小化与部门方最优目标值的偏差. 因部门方的问题是最大化问题, 所以, 利用拉格朗日松弛方法, 可得到设备方的等价问题如下:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^t (\hat{b}_{ik} y_{ik} + \rho_i (\hat{d}_i - \sum_{k=1}^t y_{ik})), \\ \text{s.t. } \quad & \Phi^{-1}(\lambda) \sqrt{\sum_{i=1}^m y_{ik}^2 \sigma_{ik}^2 + \sum_{i=1}^m \mu_{ik} y_{ik}} \leq \check{c}_k, \quad k \in T, \end{aligned}$$

其中 ρ_i 为 k 时段对应需求约束的拉格朗日乘子.

记

$$G_i(Y_i) = \sum_{k=1}^t \hat{b}_{ik} y_{ik} + \rho_i (\hat{d}_i - \sum_{k=1}^t y_{ik})$$

则与式(3)类似, 笔者可以得到 $G_i(Y_i)$ 在 $Y_i = X_i$ 处的泰勒一阶展开式为

$$G_i(Y_i) = G_i(X_i) + \nabla^T G_i(Y_i)(Y_i - X_i). \quad (9)$$

式(9)等价于

$$\begin{aligned} G_i(Y_i) = G_i(X_i) - \nabla^T G_i(Y_i) \max(\mathbf{0}, X_i - Y_i) + \\ \nabla^T G_i(Y_i) \max(\mathbf{0}, Y_i - X_i), \end{aligned} \quad (10)$$

其中: $\max(\mathbf{0}, X_i - Y_i) = (\max(0, x_{ik} - y_{ik}))_{t \times 1}$, $k \in T$. 式(10)可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} G_i(Y_i) = G_i(X_i) + \sum_{k=1}^t (\alpha_{ik} \max(0, x_{ik} - y_{ik}) + \\ \beta_{ik} \max(0, y_{ik} - x_{ik})), \end{aligned} \quad (11)$$

其中:

$$\alpha_{ik} = - \frac{\partial G_i(Y_i)}{\partial y_{ik}} \Big|_{y_{ik}=x_{ik}-\Delta} = -(\hat{b}_{ik} - \rho_i), \quad (12)$$

$$\beta_{ik} = \frac{\partial G_i(Y_i)}{\partial y_{ik}} \Big|_{y_{ik}=x_{ik}+\Delta} = \hat{b}_{ik} - \rho_i, \quad (13)$$

$G_i(X_i)$ 为常数, 不影响优化过程, 故定理2得证.

上述证明过程中给出了惩罚项 α_{ik} 和 β_{ik} 的计算方法, 且由证明过程可以看出 α_{ik} 和 β_{ik} 分别代表 y_{ik} 与 x_{ik} 相比少于或多于 Δ 时 $\sum_{k=1}^t \hat{b}_{ik} y_{ik} + \rho_i (\hat{d}_i - \sum_{k=1}^t y_{ik})$ 的变化量, 所以, 传递 α_{ik} 和 β_{ik} 给设备方相当于提供部分需求与局部目标值信息. 经过一轮又一轮的传递, 全局信息的缺失可得到某种程度上的补偿.

将式(6)-(7)(12)-(13)分别代入式(2)与式(8)中, 部门 i 及设备方的问题可化为如下等价线性规划问题:

部门 i 问题(OP _{i}):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=1}^t (\hat{b}_{ik} - \theta_k^{n-1} (\Phi^{-1}(\lambda) \times \\ & \frac{\sigma_{ik}^2 y_{ik}^{n-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (y_{ik}^{n-1})^2 \sigma_{ik}^2}} + \mu_{ik})) x_{ik}, \quad (14) \\ \text{s.t. } \quad & \sum_{k=1}^t x_{ik} = \hat{d}_i. \end{aligned}$$

设备方问题(FP):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^t (\hat{b}_{ik} - \rho_i^n) y_{ik}, \quad (15) \\ \text{s.t. } \quad & \Phi^{-1}(\lambda) \sqrt{\sum_{i=1}^m y_{ik}^2 \sigma_{ik}^2 + \sum_{i=1}^m \mu_{ik} y_{ik}} \leq \check{c}_k, \quad k \in T. \end{aligned}$$

3.3 协商参数更新法则(Update rule of negotiation parameters)

协商参数更新的实质是拉格朗日乘子的更新. 现有的算法(例如CICA算法)中拉格朗日乘子的更新法则多数都基于次梯度方法. 这种方法的弊端是若当前次梯度与上一次迭代时的次梯度成钝角, 则两次的迭代点会很接近, 导致收敛速度减慢. 针对上述弊端, 本文对CICA算法中的拉格朗日乘子更新法则进行改进, 给出了一种信息需求量少、能减少协商次数的基于偏转次梯度^[13]的协商参数更新法则, 详情如下.

给定 y_{ik}^{n-1} , ρ_i^n 的更新公式如下:

$$\rho_i^n = \rho_i^{n-1} - t_i^{n-1} g_i^n. \quad (16)$$

本文用 s_i^{n-1} 表示当前次梯度方向 $d_i - \sum_{k=1}^t y_{ik}^{n-1}$,

记 $h_i^{n-1} = |\sum_{k=1}^t b_{ik} x_{ik}^n - b_{ik} y_{ik}^{n-1}|$, 则偏转次梯度方向更新如下:

$$g_i^n = s_i^{n-1} + \delta_i^n g_i^{n-1}, \quad (17)$$

$$\delta_i^n = \begin{cases} -\eta_i^n \iota_i^{n-1}, & s_i^{n-1} g_i^{n-1} < 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (18)$$

$$\eta_i^n = \begin{cases} 1.5, & \frac{\iota_i^{n-1}}{\|s_i^{n-1}\|^2} = -1, \\ 2 + \frac{\iota_i^{n-1}}{\|s_i^{n-1}\|^2}, & \frac{\iota_i^{n-1}}{\|s_i^{n-1}\|^2} \in (-1, 0), \end{cases} \quad (19)$$

其中 $\iota_i^{n-1} = s_i^{n-1} g_i^{n-1} / \|g_i^{n-1}\|^2$.

步长因子更新如下:

$$t_i^{n-1} = \frac{\psi_i^{n-1} h_i^{n-1}}{\|s_i^{n-1}\|^2}, \quad (20)$$

$$\psi_i^{n-1} = \begin{cases} \psi_i^{n-2}, & R_x^{n-1} \leq R_x^{n-2}, \\ \frac{\psi_i^{n-2} R_x^{n-2}}{R_x^{n-1}}, & \text{其他,} \end{cases} \quad (21)$$

其中: $R_x^{n-1} = \frac{h_i^{n-1}}{\|s_i^{n-1}\|^2}$, $R_x^{n-2} = \frac{h_i^{n-2}}{\|s_i^{n-1}\|^2}$.

本更新规则中采用 h_i^{n-1} 作为衡量设备方和部门间是否已经获得协商一致解的判断标准, 有效地避免了使用全局可行解. h_i^{n-1} 的值越小, 说明部门要求的生产量与设备方能提供的生产量越接近; 当 $h_i^{n-1} = 0$ 时, 从式(20)可以看出拉格朗日乘子不再更新, 算法终止. 式(21)中, ψ_i^{n-1} 的作用是如果 h_i^{n-1} 与前一次迭代相比较没有减少, 那么 ψ_i^{n-1} 就会下降.

相似的,在第 n 次迭代时,假设部门 i 传递的值为 x_{ik}^n, θ_k^n 的更新公式如下:

$$\theta_k^n = \max(0, \theta_k^{n-1} - p^n w^n). \quad (22)$$

用 l^n 表示当前次梯度方向

$$c_k - \sum_{i=1}^m \mu_{ik} x_{ik}^n - \Phi^{-1}(\lambda) \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_{ik}^n \sigma)_{ik}^2},$$

则偏转次梯度方向 w^n 更新为

$$w^n = l^n + \zeta^n w^{n-1}, \quad (23)$$

$$\zeta^n = \begin{cases} -\sigma^n l^n \varphi^{n-1}, & l^n w^{n-1} < 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (24)$$

$$\sigma^n = \begin{cases} 1.5, & \frac{l^n \varphi^{n-1}}{\|l^n\|^2} = -1, \\ 2 + \frac{l^n \varphi^{n-1}}{\|l^n\|^2}, & \frac{l^n \varphi^{n-1}}{\|l^n\|^2} \in (-1, 0), \end{cases} \quad (25)$$

其中 $\varphi^n = w^{n-1} / \|w^{n-1}\|^2$.

步长因子更新如下:

$$p^n = \frac{\tau^n |\hat{Z}_{CA}^n|}{\sum_{k=1}^t \|l^n\|^2}, \quad (26)$$

$$\tau^n = \begin{cases} \tau^{n-1}, & R_y^n \leq R_y^{n-1}, \\ \tau^{n-1} \left(\frac{R_y^{n-1}}{R_y^n} \right), & \text{其他}, \end{cases} \quad (27)$$

其中: $R_y^n = \frac{|\hat{Z}_{CA}^n|}{\sum_{k=1}^t \|l^n\|^2}$, $R_y^{n-1} = \frac{|\hat{Z}_{CA}^{n-1}|}{\sum_{k=1}^t \|l^{n-1}\|^2}$.

在式(22)中,设备方更新 θ_k^n 时也仅仅使用了自己可以获得的信息,即其能力约束信息.在步长更新公式(26)中,笔者用 $|\hat{Z}_{CA}^n|$ 代替传统公式中的 $|Z_n - Z^*|$,有效地避免了使用全局可行解,其中 $|\hat{Z}_{CA}^n|$ 是式(8)中设备方的最优目标值.如果 $|\hat{Z}_{CA}^n| = 0$,意味着设备方同意了所有部门提出的任意时段的加工数量,这样,拉格朗日乘子 θ_k^n 也就不会继续再变化.如果 $|\hat{Z}_{CA}^n| \neq 0$,即全局解和局部解不同,那么拉格朗日乘子将继续更新.当与上一次迭代相比, $|\hat{Z}_{CA}^n|$ 没有改进时,式(27)就会起作用来缩小步长.

为了避免次梯度方法在求解一般规划问题时可行解容易在可行域的顶点附近震荡的问题,本文引入一个凸组合规则^[10]来定义部门与设备方的初始解.具体讲,在第 n 次迭代时,部门 i 的初始解 $X_i^n (i \in M)$ 与设备方初始解 Y^n 的定义如下:

$$X_i^n = \sum_{j=1}^n X_i^j / n, \quad Y^n = \sum_{j=1}^n Y^j / n, \quad (28)$$

其中 X_i^j 和 Y^j 分别表示在第 j 次迭代时式(2)和式(8)的解.通过上面的公式,笔者可以知道,第 n 次迭代时部门 i 和设备方的初始解实际上就是前 n 次解的平均值.

3.4 问题求解算法(Problem solution algorithm)

综上所述,考虑随机加工时间和私人信息的单机能力分配问题求解方法可归纳如下:

步骤 1 根据公式(1)清晰化能力约束.

步骤 2 设置最大迭代次数 N ,设置 $\gamma_{ik}^0 = \pi_{ik}^0 = y_{ik}^0 = 0, \forall i, k; p^0 = t_i^0 = 0, \theta^0 = \rho_i^0 = 0, \psi_i^0 = \tau^0 = 2, \forall i; n = 1$.

步骤 3 部门 $i (i \in M)$:

- 1) 利用定理1得到部门 i 问题OP _{i} (14);
- 2) 求解问题OP _{i} (14);
- 3) 根据式(28)存储部门的初始解;
- 4) 根据式(19)更新因子 η_i^n ;
- 5) 根据式(18)更新因子 δ_i^n ;
- 6) 根据式(17)更新拉格朗日乘子 g_i^n ;
- 7) 根据式(21)更新因子 ψ_i^{n-1} ;
- 8) 根据式(20)更新因子 t_i^{n-1} ;
- 9) 根据式(16)更新拉格朗日乘子 ρ_i^n ;
- 10) 根据式(12)–(13)计算交互因子 $(\alpha_{ik}^n, \beta_{ik}^n)$;
- 11) 将 $(x_{ik}^n, \alpha_{ik}^n, \beta_{ik}^n)$ 的值传递给设备方.

步骤 4 设备方:

- 1) 利用定理2得到设备方问题FP(15);
- 2) 求解问题FP(15);
- 3) 根据式(28)存储设备方的初始解;
- 4) 根据式(25)更新因子 σ^n ;
- 5) 根据式(24)更新因子 ζ^n ;
- 6) 根据式(23)更新拉格朗日乘子 w^n ;
- 7) 根据式(27)更新因子 τ^n ;
- 8) 根据式(26)更新因子 p^n ;
- 9) 根据式(22)更新拉格朗日乘子 θ_k^n ;
- 10) 根据式(6)–(7)计算交互因子 $(\gamma_{ik}^n, \pi_{ik}^n)$;
- 11) 将 $(y_{ik}^n, \gamma_{ik}^n, \pi_{ik}^n)$ 的值传递给部门 i .

步骤 5 如果 $n + 1 > N$ 或 $X^n = Y^n$ 或 $\psi_i^n \leq \varepsilon, \forall i$ 且 $\tau^n \leq \varepsilon$ (ε 为一个自行设定的非常小的正约束值),程序终止;否则,置 $n = n + 1$,转到步骤3.

4 实验分析(Experimental analysis)

在本节中,笔者先考虑信息、方差及置信水平对求解算法性能的影响,然后验证改进算法的有效性.

4.1 评价指标设计(Design of evaluation indicators)

评价算法性能的指标定义如下:

表示 X 违反能力约束的程度及 Y 违反需求约束的程度的CV和DV:

$$CV = \sum_{k=1}^t \max\{\Xi(X) - c_k, 0\} / \sum_{k=1}^t c_k,$$

$$DV = \sum_{i=1}^m |d_i - \sum_{k=1}^t y_{ik}| / \sum_{i=1}^m d_i,$$

其中

$$\Xi(X) = \Phi^{-1}(\lambda) \sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ik}^2 \sigma_{ik}^2 + \sum_{i=1}^m \mu_{ik} x_{ik}}$$

表示 X 和 Y 的值与集中式解的接近程度的 PD_x 和 PD_y ^[10]:

$$PD_x = |Z_x - Z^*|/Z^*, PD_y = |Z_y - Z^*|/Z^*,$$

其中: Z_x, Z_y, Z^* 分别是部门方的最优目标值(各部门最优目标值的总和)、设备方的最优目标值、集中情形下的最优目标值。

表示 X 与 Y 之间的接近程度, 即衡量部门方与设备方之间协商差距的 CG_x 和 CG_y ^[10]:

$$CG_x = |Z_x - Z_y|/Z_x, CG_y = |Z_x - Z_y|/Z_y.$$

4.2 信息对算法性能的影响(Impact of information on the algorithm performance)

考虑一个 $m = 2, t = 4$ 的单机能力分配问题, 其集中情形下的模型如下所示:

$$\begin{aligned} \max & 20x_{11} + 30x_{12} + 10x_{13} + 50x_{14} + \\ & 10x_{21} + 20x_{22} + 40x_{23} + 30x_{24}, \\ \text{s.t.} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 400, \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 400, \\ & P(a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \leq 400) \geq 0.9, \\ & P(a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \leq 400) \geq 0.9, \\ & P(a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} \leq 400) \geq 0.9, \\ & P(a_{14}x_{14} + a_{24}x_{24} \leq 400) \geq 0.9, \end{aligned}$$

其中:

$$a_{ik} \sim N(\mu_{ik}, \sigma_{ik}^2), \forall i, k, \mu = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \sigma_{ik} = 0.1.$$

令 $N = 100, \varepsilon = 0.00001$, 分别考虑两种情形下的求解结果和评价指标数据: 部门 i 对设备方的能力完全未知(情形1); 部门 i 知道设备方各时段的能力, 但无法获知设备方分配给其他部门的能力信息, 即部门 i 不知道 $x_{jk}, j \neq i$ (情形2)。

情形2中, 第 n 次协商时部门 i 的决策模型为

$$\begin{aligned} \max & \sum_{k=1}^t (\hat{b}_{ik} - \theta_k^{n-1} (\Phi^{-1}(\lambda) \times \\ & \frac{\sigma_{ik}^2 y_{ik}^{n-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (y_{ik}^{n-1})^2 \sigma_{ik}^2}} + \mu_{ik})) x_{ik}, \\ \text{s.t.} & \sum_{k=1}^t x_{ik} = \hat{d}_i, (\Phi^{-1}(\lambda) \sigma_{ik} + \mu_{ik}) x_{ik} \leq c_k. \end{aligned}$$

从表1可以看出, 情形2下所求的结果更接近于集中式下的最优解, 约束的违反程度更小, 部门方与设备方之间的解的偏差也 smaller. 这说明部门 i 获得的信息越多, 本文方法的性能越好。

表1 信息对结果的影响

Table 1 The impact of information on the results

	目标值	CV	DV	PD	PD	PD	
集中情形	28452	0	0	0	N/A	N/A	
情形1	部门方	19040	0.872	0	0.494	0.261	-
	设备方	28008	0	0.733	0.185	-	0.207
情形2	部门方	22502	0.331	0	0.260	0.057	-
	设备方	23857	0	0.702	0.193	-	0.054

4.3 方差对算法性能的影响(Impact of variance on the algorithm performance)

基于4.2节中的算例, 考察方差对算法性能的影响. 从表2可以看出, 在期望不变的情况下, 随着方差的不断变大, 部门方的目标值逐渐变小, 与最优值之间的差距越来越大, 违反能力约束的变化不是很大; 而设备方的目标值变化不大, 但整体上也存在变小的趋势, 与最优值之间的差距有变大的趋势, 违反需求约束的程度变化不大。

表2 方差对结果的影响

Table 2 The impact of variance on the results

σ	部门方			设备方		
	目标值	CV	PD_x	目标值	DV	PD_y
0.1	22502	0.331	0.260	23857	0.702	0.192
0.3	21276	0.245	0.303	23840	0.712	0.163
0.5	19035	0.251	0.428	23818	0.740	0.141
0.7	16872	0.347	0.954	23798	0.763	0.385
0.9	14955	0.376	1.33	23781	0.803	0.468

4.4 置信水平对算法性能的影响(Impact of confidence level on the algorithm performance)

基于第4.2节中的算例, 考察置信水平对算法性能的影响. 从表3可以看出, 在期望与方差不变的情况下, 置信水平的变小, 对设备方的影响不是很大, 但对部门方的影响却很明显. 部门方的目标值随着置信水平的变小逐渐变大, 与最优值之间的差距逐渐缩小, 违反能力约束的程度越来越大; 设备方的目标值随着置信水平的变小而逐渐变大, 但变化程度很小, 以至于与最优解之间差距的变化以及违反需求约束的程度变化都不是太明显。

表3 置信水平对结果的影响

Table 3 The impact of confidence level on the results

λ	部门方			设备方		
	目标值	CV	PD_x	目标值	DV	PD_y
1	21933	0.297	0.280	23604	0.704	0.189
0.95	19922	0.316	0.274	23744	0.702	0.197
0.9	22502	0.331	0.260	23857	0.702	0.193
0.85	23045	0.330	0.240	23889	0.702	0.196
0.8	23698	0.339	0.208	23855	0.665	0.200

4.5 结果对比(Comparison results)

利用一组随机实验,本节测试基于一般次梯度的优化方法(BS)和基于改进偏转次梯度的优化方法(IDS)对问题求解的影响.令 $m = 2, N = 100, \varepsilon \leq 0.00001$.时间区间数、单位收益、加工时间和需求等系数生成方式如表4所示.

表4 参数因子设置

Table 4 Parameters setup

参数描述	情况 1	情况 2
时间区间数	4	8
单位收益	$U(10, 25)$	$U(10, 40)$
加工时间	$N(5, 1)$	$N(5, 4)$
需求	$U(300, 400)$	$U(300, 500)$

注: $U(a, b)$ 表示最小值为 a 与最大值为 b 的均匀随机分布.

共有 2^4 种问题,每种问题随机生成100次,统计它们的求解结果进行分析,程序主要通过MATLAB及其优化工具箱(linprog函数)实现.

从表5不难看出,相对于BS方法,IDS算法在求解结果方面的优异性不是很明显,但收敛速度却好很多.

表5 两种算法结果对比

Table 5 Results comparison of two algorithms

	PD _x	PD _y	CV	DV	CG _x	CG _y	NI
BS	min	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	32
	avg	0.04	0.06	0.08	0.20	0.09	85
	max	0.45	0.58	0.54	0.81	0.81	100
IDS	min	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	28
	avg	0.03	0.05	0.08	0.13	0.06	62
	max	0.35	0.64	0.50	0.66	0.74	100

注: NI表示迭代次数

5 结论(Conclusions)

针对产品单位收益、需求信息及加工设备各时段的生产能力为私人信息且产品加工时间为随机变量时的单机能力分配问题,本文提出了一种基于协商的问题求解方法.该求解方法首先利用随机规划理论将模型清晰化,然后结合拉格朗日松弛和泰勒展开方法进行了协商机制设计,紧接着给出了基于偏转次梯度的协商参数更新法则,最后通过大量实验验证了本文所提方法的有效性.

文中方法不仅可以用来解决生产能力分配问题,而且可用于仓储能力分配问题和供应链环境下的供需问题等具有类似性质的分配问题求解,具有广泛的应用前景.但由于现实中的生产结构不仅局限于单机,复杂生产结构(多机、生产线等)更为常见,因此,研究复杂生产结构下的能力分配问题更有意义.复杂生产结构下的能力分配问题除计算更复杂外,最大的特点在于需考虑各机器之间的调度问题,因此,在未来的工作中,笔者将重点研究随机环境下考虑机器调度的带有私人信息的复杂生产结构下的能力分配问题.

参考文献(References):

- [1] GEORGIADIS P, ATHANASIOU E. The impact of two-product joint lifecycles on capacity planning of remanufacturing networks [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 202(2): 420 – 433.
- [2] HUANG M, SONG M, LEON V, et al. Decentralized capacity allocation of a single-facility with fuzzy demand [J]. *Journal of Manufacturing Systems*, 2014, 33(1): 7 – 15.
- [3] 潘常春, 杨根科, 孙凯, 等. 带最小批量约束的计划问题及其拉格朗日松弛算法 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(2): 133 – 138. (PAN Changchun, YANG Genke, SUN Kai, et al. A Lagrange relaxation algorithm for capacitated lot-size problem (CLSP) with minimum lot-size constraint [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(2): 133 – 138.)
- [4] LI H Y, HENDRY L D, TEUNTER R. A strategic capacity allocation model for a complex supply chain: formulation and solution approach comparison [J]. *International Journal of Production Economics*, 2009, 121(2): 505 – 518.
- [5] CHIANG A H, CHOU Y C, CHEN W H. A capacity evaluation and trading model for semiconductor foundry manufacturing [J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2011, 54(1–4): 1 – 10.
- [6] MATHUR P P, SHAH J. Supply chain contracts with capacity investment decision: two-way penalties for coordination [J]. *International Journal of Production Economics*, 2008, 114(1): 56 – 70.
- [7] JEONG I, LEON V. Distributed allocation of the capacity of a single-facility using cooperative interaction via coupling agents [J]. *International Journal of Production Research*, 2003, 41(1): 15 – 30.
- [8] ÖZER Ö, RAZ G. Supply chain sourcing under asymmetric information [J]. *Production and Operations Management*, 2011, 20(1): 92 – 115.
- [9] 李丹, 唐加福. 信息不对称的收益共享寄售系统协调 [J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(10): 1480 – 1484. (LI Dan, TANG Jiafu. Coordination of consignment system with revenue-sharing under information asymmetry [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(10): 1480 – 1484.)
- [10] JEONG I J, LEON V J. Decision-making and cooperative interaction via coupling agents in organizationally distributed systems [J]. *IIE Transactions*, 2002, 34(9): 789 – 802.
- [11] CHU C L, LEON V J. Single-vendor multi-buyer inventory coordination under private information [J]. *European Journal of Operational Research*, 2008, 191(2): 485 – 503.
- [12] CHU C L, LEON V J. Scalable methodology for supply chain inventory coordination with private information [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 195(1): 262 – 279.
- [13] CAMERINI P M, FRATTA L, MAFFIOLI F. On improving relaxation methods by modified gradient techniques [J]. *Mathematical Programming Study*, 1975, 3: 26 – 34.

作者简介:

黄敏 (1968–), 女, 博士, 教授, 博士生导师, 研究领域为物流与供应链管理、现代集成制造系统、智能建模、优化与决策等, E-mail: mhuang@mail.neu.edu.cn;

宋敏 (1982–), 女, 博士, 研究领域为供应链管理、生产与运作, E-mail: bingning1982330@126.com;

周宁宁 (1985–), 男, 硕士, 研究领域为分布式优化、供应链管理, E-mail: n.z.n@163.com;

王兴伟 (1968–), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究领域为分布式优化与决策、计算机网络、分布式多媒体系统等, E-mail: wangxw@mail.neu.edu.cn.