

基于部分稳定性方法的离散时间多智能体系统的一致性

陈阳舟^{1†}, 盖彦荣^{1,2}, 宋学君²

(1. 北京工业大学 电子信息与控制工程学院, 北京 100124;

2. 河北师范大学 物理科学与信息工程学院, 河北 石家庄 050024)

摘要: 研究有向信息拓扑下离散时间线性多智能体系统的一致性分析与设计问题. 利用提出的线性变换, 将一致性问题转换为相应线性系统的部分变元渐近稳定性问题. 基于部分变元稳定性理论, 得到有向信息拓扑下离散时间线性多智能体系统达到渐近一致的基于矩阵Schur稳定性的充要条件和状态一致函数的解析表达式. 同时设计了反馈增益矩阵. 最后数值实例验证了所得理论的有效性.

关键词: 离散时间系统; 多智能体系统; 部分稳定性; 一致性判据; 状态一致函数

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Partial-stability-based approach to consensus problem in discrete-time multi-agent systems

CHEN Yang-zhou^{1†}, GE Yan-rong^{1,2}, SONG Xue-jun²

(1. College of Electronic Information and Control Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;

2. College of Physics Science and Information Engineering, Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei 050024, China)

Abstract: Consensus analysis and design problem for discrete-time linear multi-agent systems (DLMAS) under directed information topology is investigated. A proper linear transformation is proposed to transform the consensus problem to the partial stability problem of a corresponding linear system. Then, a new consensus criterion in terms of Schur stability of matrices for DLMAS achieving consensus under directed information topologies and a state consensus function in analytical formulae are given. Moreover, a design process to determine the feedback gain matrix in the consensus protocol is proposed. Numerical examples are given to validate the above theoretical results.

Key words: discrete-time systems; multi-agent systems; partial stability; consensus criterion; state consensus function

1 引言(Introduction)

多智能体系统的一致性问题是多智能体协调控制中的典型问题之一, 受到了众多领域学者的广泛关注^[1]. 多智能体系统一致性问题的研究包含分析和设计两个方面: 问题分析, 即在给定条件下得到多智能体系统一致性判据和系统达到一致时的状态一致函数; 问题设计, 即设计参数, 从而使得多智能体系统达到一致.

文献[1–10]采用不同的方法研究了一阶积分多智能体系统的一致性判据和一致函数问题. 文献[1]基于矩阵特征向量得到一阶积分系统的状态一致值(平衡点). 文献[2–7]引入非一致函数研究一致性协议的收敛性问题, 得到多智能体系统达到平均一致的充要条件是信息拓扑是连通平衡拓扑结构, 而且多智能体系

统最终收敛于系统初始状态的平均值. 文献[8]基于随机矩阵理论将多智能体系统达到一致的充要条件扩展为信息拓扑存在有向生成树. 文献[9]利用图论和线性代数理论得到非平衡拓扑结构的多智能体系统的一致状态是初始状态的凸组合. 文献[10]研究了固定信息拓扑和时变信息拓扑下离散时间多智能体系统信息一致的平衡点问题. 这些文献研究的均为一阶系统问题, 但实际的多智能体系统多为高阶系统, 文献[11–14]研究了高阶多智能体系统的一致性. 其中文献[11–12]研究了离散时间高阶多智能体系统可一致性的问题, 给出了系统达到一致的充要条件. 文献[13]基于状态空间分解, 得到了连续时间高阶多智能体系统达到状态一致的充要条件和状态一致函数. 文献[14]基于邻居相对输出信息, 设计了高阶离散时

收稿日期: 2013–07–05; 录用日期: 2014–01–15.

通信作者. E-mail: yzchen@bjut.edu.cn; Tel.: +86 10-67391632.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61079001, 61273006); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20111103110017); 国家高技术研究发展计划(“863”计划)资助项目(2011AA110301); 河北省科学技术研究与发展计划资助项目(10203548D); 河北省科技计划资助项目(13210807); 河北省科技条件建设资助项目(11963546D).

间多智能系统的观测器类型的控制协议.

在上述关于多智能系统的成果中, 达到一致的判据均需要事先得到信息拓扑的图Laplacian矩阵的特征值; 在求得一致函数时, 需要利用信息拓扑的图Laplacian矩阵0特征值的左特征向量. 针对上述问题, 本文利用适当的线性变换^[15], 将有向信息拓扑下的离散时间线性多智能系统(discrete-time linear multi-agent system, DLMAS)的一致性问题的部分变元渐近稳定性问题. 利用部分变元稳定性理论^[16], 得到有向信息拓扑下DLMAS一致性判据和系统达到一致时的状态一致函数. 同时设计了反馈增益矩阵, 使得DLMAS可以达到一致. 相比于已有文献, 本文具有如下优点: 第一, 提出的线性变换矩阵构造简单, 推理过程简洁易懂; 第二, 利用该线性变换, 将一致性问题转换为渐近稳定性问题的思想, 适用于高维同构和异构线性多智能体动态系统以及非线性多智能体动态系统, 固定和切换信息拓扑以及系统存在通信时滞的情况, 因此更具一般性; 第三, 本文得到的一致性判据更容易验证, 只需要判断一个实数矩阵的Schur稳定性即可; 第四, 一致函数的得到无需事先计算信息拓扑的图Laplacian矩阵的特征值和0特征值的左特征向量, 从而减少了计算量.

为便于描述, 给出如下定义: 上标“T”表示矩阵的转置, 上标“-1”和“H”分别表示方阵的逆和共轭转置. \mathbb{R}^n 和 $\mathbb{R}^{n \times m}$ 分别表示 n 维实数向量和 $n \times m$ 维的实数矩阵. I 和 $\mathbf{0}$ 分别表示合适维数的单位矩阵和零矩阵. $\mathbf{1}_N$ 表示所有元素为1的列向量. \otimes 表示矩阵或向量的Kronecker积^[17], Kronecker积的两个性质:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD,$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C.$$

2 问题描述(Problem statement)

考虑 N 个智能体构成的DLMAS, 假定第 i 个智能体的动态方程为

$$\mathbf{x}_i^+ = A\mathbf{x}_i + B\mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{i0}, \quad (1)$$

其中: i 为智能体的标号, $i \in \{1, \dots, N\}$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(k) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别为当前时刻 k 的状态和控制输入, $\mathbf{x}_i^+ = \mathbf{x}_i(k+1)$ 表示下一时刻的状态. A 和 B 是合适维数的矩阵.

控制输入 \mathbf{u}_i 的建立基于智能体 i 可以得到的信息, 用 \mathcal{N}_i 表示给智能体 i 发送信息的邻居智能体集合. 集合 $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_i\}$ 称为DLMAS(1)的信息拓扑. 实际情况下, 信息传递是有向的. 众所周知, 可以用有向加权图 $G = (V, E, W)$ 来表示信息拓扑 \mathcal{N} , 其中顶点 $V = \{1, \dots, N\}$ 是 N 个智能体的集合, $E \subseteq V \times V$ 是描述智能体间信息交互的有向边集, 即 $(j, i) \in E \Rightarrow j \in \mathcal{N}_i$. 权值矩阵 $W = [w_{ij}]_{N \times N}$, 当 $j = i$ 时, 元素 $w_{ij} =$

0, 当 $j \neq i$ 时, 如果 $j \in \mathcal{N}_i$, 则 $w_{ij} > 0$; 如果 $j \notin \mathcal{N}_i$, 则 $w_{ij} = 0$. 相应的加权入度矩阵和加权图Laplacian矩阵分别定义为

$$D_w = \text{diag}\{\text{deg}_1, \dots, \text{deg}_N\}, L_w = D_w - W,$$

其中 $\text{deg}_i = \sum_{j=1}^N w_{ij}$ 是顶点 i 的加权入度.

给定有向信息拓扑 \mathcal{N} 下的控制协议为

$$\mathbf{u}_i = K \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

其中 K 是增益矩阵.

DLMAS(1)在协议(2)下的矢量形式如下:

$$\mathbf{x}^+ = \Psi \mathbf{x}, \quad (3)$$

其中: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_N^T)^T$, $\mathbf{x}(0) = (\mathbf{x}_{10}^T, \dots, \mathbf{x}_{N0}^T)^T$,

$$\Psi = I_N \otimes A - L_w \otimes BK. \quad (4)$$

定义 1 给定有向信息拓扑 \mathcal{N} , 如果存在依赖于初始状态 $\mathbf{x}_i(0)$ 的 n 维向量函数 $\xi(k)$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(k) - \xi(k)\| = 0,$$

则称DLMAS(1)在协议(2)下达到渐近状态一致. 函数 $\xi(k)$ 称为状态一致函数.

本文主要研究的问题有两个, 一是在给定的有向信息拓扑 \mathcal{N} 和增益矩阵 K 下, 得到DLMAS(1)在协议(2)下达到渐近状态一致的充要条件; 如果DLMAS(1)在协议(2)下可以达到渐近状态一致, 求得达到一致时的状态一致函数; 二是在给定的有向信息拓扑 \mathcal{N} 下, 设计增益矩阵 K , 使得DLMAS(1)在协议(2)下达到渐近状态一致.

3 状态一致性分析(State consensus analysis)

下面将研究DLMAS(1)在协议(2)下的渐近状态一致性问题. 第3.1节选取合适的线性变换, 等价地将DLMAS的状态一致性问题转换为相应系统的部分变元渐近稳定性问题; 第3.2节依据部分变元稳定性理论, 得到DLMAS(1)在协议(2)下达到渐近状态一致的充要条件和状态一致函数.

3.1 问题转换(Problem transformation)

本文选取线性变换的思想同文献[15]. 为了简单起见, 选取的线性变换矩阵 T 为

$$T = [T_1 \ \dots \ T_{N-1} \ T_N]^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \otimes I_n = \begin{bmatrix} \tilde{T}_0 \\ \mathbf{1}_N^T \end{bmatrix} \otimes I_n. \quad (5)$$

相应的逆矩阵 T^{-1} 为

$$T^{-1} = [\bar{T}_1 \dots \bar{T}_{N-1} \bar{T}_N] = \begin{bmatrix} \bar{T}_{11} & \dots & \bar{T}_{1,N-1} & N^{-1}I_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{T}_{N-1,1} & \dots & \bar{T}_{N-1,N-1} & N^{-1}I_n \\ \bar{T}_{N,1} & \dots & \bar{T}_{N,N-1} & N^{-1}I_n \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} N-1 & N-2 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & N-2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -2 & \dots & -(N-1) & 1 \end{bmatrix} \otimes I_n = [\hat{T}_0 \ N^{-1}\mathbf{1}_N] \otimes I_n. \tag{6}$$

利用线性变换矩阵(5)对系统(3)进行线性变换

$$\bar{\mathbf{x}} = T\mathbf{x}, \tag{7}$$

得到如下形式:

$$\bar{\mathbf{x}}^+ = T\Psi T^{-1}\bar{\mathbf{x}}, \tag{8}$$

其中: $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}_1^T, \dots, \bar{\mathbf{x}}_N^T)^T, \Psi = I_N \otimes A - L_w \otimes BK$. 令 $\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T, \mathbf{y} = (\bar{\mathbf{x}}_1^T, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{N-1}^T)^T, \mathbf{z} = \bar{\mathbf{x}}_N$, 则式(8)可以写成如下两个方程的形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^+ &= (\tilde{T}_0 \otimes I_n)\Psi(\hat{T}_0 \otimes I_n)\mathbf{y} + N^{-1}(\tilde{T}_0 \otimes I_n)\Psi(\mathbf{1}_N \otimes I_n)\mathbf{z}, \\ \mathbf{z}^+ &= (\mathbf{1}_N^T \otimes I_n)\Psi(\hat{T}_0 \otimes I_n)\mathbf{y} + N^{-1}(\mathbf{1}_N^T \otimes I_n)\Psi(\mathbf{1}_N \otimes I_n)\mathbf{z}. \end{aligned} \tag{9}$$

定义 2^[16] 如果对于任意的初始状态 $\bar{\mathbf{x}}(0)$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}(k) = 0$ 成立, 则称线性系统(8)相对于部分变元 \mathbf{y} 渐近稳定(简称为 \mathbf{y} -渐近稳定).

引理 1 给定有向信息拓扑 \mathcal{N} 和增益矩阵 K , DLMAS(1)在协议(2)下达到渐近状态一致的充要条件是线性系统(8)的平衡点 $\bar{\mathbf{x}} = 0$ 是 \mathbf{y} -渐近稳定的. 而且, DLMAS的状态一致函数为

$$\xi(k) = N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i(k) = N^{-1} \bar{\mathbf{x}}_N(k).$$

证 首先证明必要性. 如果DLMAS(1)在协议(2)下达到渐近状态一致, 则存在 $\xi(k)$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(k) - \xi(k)\| = 0$$

成立, 其中 $i = 1, \dots, N$. 由于 $\bar{\mathbf{x}}_i$ 可以表示成为 $\bar{\mathbf{x}}_i = T_i(\mathbf{x} - \mathbf{1}_N \otimes \xi)$, $i = 1, \dots, N$, 从而得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{x}}_i(k)\| = 0, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

即线性系统(8)的平衡点 $\bar{\mathbf{x}} = 0$ 是 \mathbf{y} -渐近稳定的.

其次证明充分性. 由于线性系统(8)的平衡点 $\bar{\mathbf{x}} = 0$ 是 \mathbf{y} -渐近稳定的, 所以有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{x}}_i(k)\| = 0, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

由于

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{N-1} \bar{T}_{ij} \bar{\mathbf{x}}_j + N^{-1} \bar{\mathbf{x}}_N, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

所以存在 $\xi(k) = N^{-1} \bar{\mathbf{x}}_N(k)$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(k) - \xi(k)\| = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

即DLMAS(1)在协议(2)下达到渐近状态一致, 其中 $\xi(k) = N^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i(k) = N^{-1} \bar{\mathbf{x}}_N(k)$. 证毕.

3.2 一致性判据和状态一致函数(Consensus criterion and state consensus function)

引理1建立了DLMAS的一致性问题和部分变元稳定性问题的桥梁. 现在研究线性系统(9)的 \mathbf{y} -渐近稳定性, 可以验证下面的引理.

引理 2 线性系统(9)具有下面的形式:

$$\mathbf{y}^+ = \bar{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n(N-1)}, \tag{10a}$$

$$\mathbf{z}^+ = \bar{C}\mathbf{y} + \bar{D}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \tag{10b}$$

其中: $\bar{A} = I_{N-1} \otimes A - \tilde{T}_0 L_w \hat{T}_0 \otimes BK, \bar{C} = -\mathbf{1}_N^T L_w \hat{T}_0 \otimes BK, \bar{D} = A$.

证 在线性系统(9)中, 本文令 $\bar{A} = (\tilde{T}_0 \otimes I_n)\Psi(\hat{T}_0 \otimes I_n), \bar{B} = N^{-1}(\tilde{T}_0 \otimes I_n)\Psi(\mathbf{1}_N \otimes I_n), \bar{C} = (\mathbf{1}_N^T \otimes I_n)\Psi(\hat{T}_0 \otimes I_n), \bar{D} = N^{-1}(\mathbf{1}_N^T \otimes I_n)\Psi(\mathbf{1}_N \otimes I_n)$.

根据线性变换矩阵 T 和图Laplacian矩阵的性质, 得到下述3个条件:

$$\begin{cases} L_w \mathbf{1}_N = 0, \\ \mathbf{1}_N^T \hat{T}_0 = 0, \\ \tilde{T}_0 \mathbf{1}_N = 0. \end{cases}$$

利用这3个条件和Kronecker积的两个性质, 同时根据 $\Psi = I_N \otimes A - L_w \otimes BK$, 得到 $\bar{A} = I_{N-1} \otimes A - \tilde{T}_0 L_w \hat{T}_0 \otimes BK, \bar{B} = 0, \bar{C} = -\mathbf{1}_N^T L_w \hat{T}_0 \otimes BK$ 和 $\bar{D} = A$.

因此系统(9)具有系统(10)的形式. 证毕.

由于 $\bar{B} = 0$, 所以线性系统(10)的 \mathbf{y} -渐近稳定的辅助系统^[16]即为式(10a). 综合引理1和引理2, 得到如下定理.

定理 1 给定有向信息拓扑 \mathcal{N} 和增益矩阵 K , DLMAS(1)在协议(2)下达到渐近状态一致的充要条件是系统(10)的矩阵 \bar{A} 是Schur稳定的. 而且状态一致函数为

$$\xi(k) = N^{-1} \left(\left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j \bar{C} \bar{A}^{k-1-j} \right) (\tilde{T}_0 \otimes I_n) + \mathbf{1}_N^T \otimes A^k \right) \mathbf{x}(0). \tag{11}$$

证 充要条件可以直接利用引理1和引理2验证, 下面主要计算状态一致函数. 从式(10a)得到 $\mathbf{y}(k) = \bar{A}^k \mathbf{y}(0)$. 从式(10b)得到

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= \bar{C}\mathbf{y}(k-1) + \bar{D}\mathbf{z}(k-1) = \\ &\bar{C}\mathbf{y}(k-1) + \bar{D}\bar{C}\mathbf{y}(k-2) + \dots + \end{aligned}$$

$$\bar{D}^{k-1}\bar{C}\mathbf{y}(0) + \bar{D}^k\mathbf{z}(0).$$

将 $\mathbf{y}(k) = \bar{A}^k\mathbf{y}(0)$, $\mathbf{y}(0) = (\tilde{T}_0 \otimes I_n)\mathbf{x}(0)$, $\bar{D} = A$ 和 $\mathbf{z}(0) = (\mathbf{1}_N^T \otimes I_n)\mathbf{x}(0)$ 代入上式, 得到

$$\mathbf{z}(k) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} (A^j \bar{C} \bar{A}^{k-1-j}) (\tilde{T}_0 \otimes I_n) + \mathbf{1}_N^T \otimes A^k \right) \mathbf{x}(0).$$

根据引理1, 可以得到式(11)中的状态一致函数. 证毕.

推论 1 给定无向连通或有向强连通平衡的信息拓扑 \mathcal{N} 和增益矩阵 K , DLMAS(1) 在协议(2)下达到渐近状态一致的充要条件是系统(10)的矩阵 \bar{A} 是 Schur 稳定的. 而且 DLMAS 的状态一致函数为

$$\boldsymbol{\xi}(k) = N^{-1}(\mathbf{1}_N^T \otimes A^k)\mathbf{x}(0). \quad (12)$$

证 充要条件可以直接利用引理1和引理2验证, 下面主要计算状态一致函数. 当信息拓扑 \mathcal{N} 为无向连通图或有向强连通平衡图时, $\bar{C} \equiv 0$, 代入式(11), 可以很容易地得到 DLMAS 的状态一致函数 $\boldsymbol{\xi}(k) = N^{-1}(\mathbf{1}_N^T \otimes A^k)\mathbf{x}(0)$. 证毕.

注 1 本文可以从式(10)中 \bar{A} 的 Schur 稳定性可得: 如果 A 不是 Schur 稳定的, DLMAS 达到渐近状态一致的必要条件是向信息拓扑存在有向生成树^[8]. 文中有向生成树条件等价于矩阵 $-\tilde{T}_0 L_w \hat{T}_0$ 的 Hurwitz 稳定性. 矩阵 $-\tilde{T}_0 L_w \hat{T}_0$ 的 Hurwitz 稳定性的判定比较容易实现. 如果有向信息拓扑不存在有向生成树, 意味着矩阵 $-\tilde{T}_0 L_w \hat{T}_0$ 有一个零特征值. 这种情况下, 本文将矩阵 \bar{A} 变换为其约当标准型, 利用矩阵 $U \otimes I_n$, 其中 U 是使得 $U^{-1} \tilde{T}_0 L_w \hat{T}_0 U = J$ 成为约当标准型的矩阵, 这样本文得到

$$(U^{-1} \otimes I_n) \bar{A} (U \otimes I_n) = I_{N-1} \otimes A - J \otimes BK. \quad (13)$$

本文可以验证 A 的特征值是矩阵 \bar{A} 的特征值的成员, 这样如果 A 不是 Schur 稳定的, 那么 \bar{A} 也不是 Schur 稳定的. 另一方面, 如果 A 是 Schur 稳定的, 本文可以令 $K = 0$ 使得 DLMAS(1) 达到渐近状态一致, 其中隐含着: 对于任意的初始状态, 所有的智能体总是收敛到平衡点0.

定理 2 给定有向信息拓扑 \mathcal{N} 和增益矩阵 K , DLMAS(1) 在协议(2)下达到渐近状态一致的充要条件是所有矩阵 $A - \lambda_i BK$ 都是 Schur 稳定的, 其中 $i = 1, \dots, N - 1$, λ_i 是矩阵 $\tilde{T}_0 L_w \hat{T}_0$ 的特征值. 而且状态一致函数为

$$\boldsymbol{\xi}(k) = (\boldsymbol{\eta}^T \otimes A^k)\mathbf{x}(0), \quad (14)$$

其中 $\boldsymbol{\eta}$ 满足 $\boldsymbol{\eta}^T L_w = 0$ 和 $\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{1}_N^T = 1$.

证 通过把矩阵 \bar{A} 变为它的 Jordan 标准型, 很容易验证矩阵 \bar{A} 的 Schur 稳定性等价于所有矩阵 $A - \lambda_i BK$ 的 Schur 稳定性, 其中 $i = 1, \dots, N - 1$. 本文主要关注状态一致函数的计算. 重写系统(3)为 $\mathbf{x}^+ = (I_N \otimes A - L_w \otimes BK)\mathbf{x}$. 考虑到图 Laplacian 矩阵 L_w 对应于0特征值的左特征向量 $\boldsymbol{\eta}$ 具有特性 $\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{1}_N^T = 1$,

本文得到 $(\boldsymbol{\eta}^T \otimes I_n)\mathbf{x}^+ = A(\boldsymbol{\eta}^T \otimes I_n)\mathbf{x}$. 当 DLMAS 达到状态一致时, 有 $\boldsymbol{\xi}(k) = (\boldsymbol{\eta}^T \otimes I_n)\mathbf{x}$, 这样状态一致函数为 $\boldsymbol{\xi}(k) = A^k(\boldsymbol{\eta}^T \otimes I_n)\mathbf{x}(0)$. 该式可以写成式(14)的形式. 证毕.

4 反馈增益矩阵设计(Design of the feedback gain matrix)

由定理2得到: 如果有向信息拓扑 \mathcal{N} 已经给定, 且满足 $-\tilde{T}_0 L_w \hat{T}_0$ 是 Hurwitz 稳定的, 只需设计增益矩阵 K , 使得所有矩阵 $A - \lambda_i BK$ 都是 Schur 稳定的, 则 DLMAS(1) 在协议(2)下达到渐近状态一致.

引理 3^[12] 假定矩阵 A 不是 Schur 稳定的, (A, B) 可镇定, 那么存在一个临界值 $\delta_c \in (0, 1]$ 使得对于满足 $0 < \delta < \delta_c$ 的任意实数 δ , 改进的 Riccati 不等式

$$A^T P A - P - (1 - \delta^2) A^T P B (B^T P B)^{-1} B^T P A < 0 \quad (15)$$

有正定解 P , 其中 δ_c 依赖于矩阵 A 的不稳定特征值.

定义函数

$$\delta_i(\omega) = 1 - \omega \lambda_i, \quad \delta(\omega) = \max_{i \in \{1, \dots, N-1\}} |\delta_i(\omega)|.$$

受到文献[12]的启发, 得到下面的定理.

定理 3 假定矩阵 A 不是 Schur 稳定的, (A, B) 可镇定, 给定有向信息拓扑 \mathcal{N} , 使得具有 $N - 1$ 个特征值 λ_i 的矩阵 $-\tilde{T}_0 L_w \hat{T}_0$ 是 Hurwitz 稳定的, 其中 $i = 1, \dots, N - 1$. 那么反馈增益矩阵 $K = \omega (B^T P B)^{-1} B^T P A$ 可以确保 DLMAS(1) 在协议(2)下达到渐近状态一致, 其中 ω 是满足 $\delta = \delta(\omega) < \delta_c$ 的任意常数, P 是代数 Riccati 不等式(15)的正定解.

证 根据定理2, 只需验证 K 确保所有的矩阵 $A - \lambda_i BK$ 是 Schur 稳定的. 显然存在 ω , 使得 $|\delta_i(\omega)| \leq \delta(\omega) < \delta_c$. 验证下面的系统

$$\boldsymbol{\zeta}_i(k+1) = (A - \lambda_i BK)\boldsymbol{\zeta}_i(k), \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

有一个公共 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{\zeta}_i) = \boldsymbol{\zeta}_i^H P \boldsymbol{\zeta}_i$. 实际上, 令 $K = \omega (B^T P B)^{-1} B^T P A$, 得到

$$\begin{aligned} \Delta V(\boldsymbol{\zeta}_i) &= V(\boldsymbol{\zeta}_i(k+1)) - V(\boldsymbol{\zeta}_i(k)) = \\ & \boldsymbol{\zeta}_i^H(k) \left((A - \lambda_i \omega B (B^T P B)^{-1} B^T P A)^H P \times \right. \\ & \left. (A - \lambda_i \omega B (B^T P B)^{-1} B^T P A) - P \right) \boldsymbol{\zeta}_i(k) = \\ & \boldsymbol{\zeta}_i^H(k) \left(A^T P A - P - ((\lambda_i^H + \lambda_i)\omega + \lambda_i^H \lambda_i \omega^2) \times \right. \\ & \left. A^T B (B^T P B)^{-1} B^T P A \right) \boldsymbol{\zeta}_i(k) = \\ & \boldsymbol{\zeta}_i^H(k) \left(A^T P A - P - \right. \\ & \left. (1 - |\delta_i(\omega)|^2) A^T B (B^T P B)^{-1} B^T P A \right) \boldsymbol{\zeta}_i(k) \leq \\ & \boldsymbol{\zeta}_i^H(k) \left(A^T P A - P - \right. \\ & \left. (1 - \delta(\omega)^2) A^T B (B^T P B)^{-1} B^T P A \right) \boldsymbol{\zeta}_i(k) < 0. \end{aligned}$$

即所有矩阵 $A - \lambda_i BK$ 是 Schur 稳定的, $i = 1, \dots, N - 1$. 证毕.

根据定理3,可以得到设计反馈增益矩阵 K 的算法,步骤如下:

步骤 1 判断矩阵 (A, B) 的可镇定性和有向信息拓扑 \mathcal{N} 的连通性. 只要其中一个条件不成立,则算法终止;

步骤 2 计算矩阵 A 的所有特征值,其中包含单位圆内稳定的特征值 $\lambda_i^s(A), i = 1, \dots, n_s$ 和单位圆上以及圆外的不稳定特征值 $\lambda_i^u(A), i = 1, \dots, n_u, n_s + n_u = n$. 如果 $n_u = 0$,则矩阵 A 是Schur稳定的;

步骤 3 计算临界值 $\delta_c \in (0, 1]$;

步骤 4 计算 $\delta(\omega)$ 和 ω 的值;

步骤 5 将 $\delta = \delta(\omega)$ 代入式(15)得正定矩阵 P ;

步骤 6 求得反馈增益矩阵 K .

5 数值实例(Numerical examples)

本节用数值实例来验证DLMAS在不同信息拓扑下的渐近状态一致问题. 假定DLMAS包含6个智能体,第 i 个智能体的动态为

$$\mathbf{x}_i^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} u_i, \quad (16)$$

信息拓扑如图1所示.

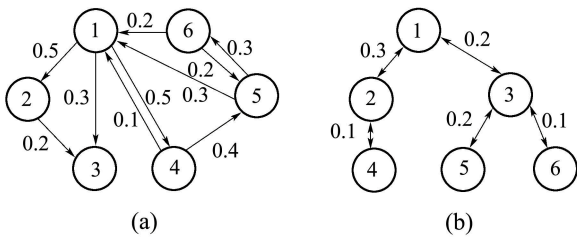


图1 两种信息拓扑

Fig. 1 Two information topologies

图1(a)和图1(b)的加权图Laplacian矩阵分别为

$$L_{wa} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & -0.1 & -0.3 & -0.2 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3 & -0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.6 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$L_{wb} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.3 & -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0.4 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.5 & 0 & -0.2 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

由于矩阵 $-\tilde{T}_0 L_{wa} \hat{T}_0$ 和 $-\tilde{T}_0 L_{wb} \hat{T}_0$ 是Hurwitz稳定的,所以图1(a)-1(b)中的信息拓扑都是连通的. 即图1(a)

为存在有向生成树的有向信息拓扑,图1(b)为有向强连通平衡信息拓扑. 而且 (A, B) 可镇定. 根据反馈增益矩阵的设计步骤可以分别得到 $K_a = [0.2315 \ -0.2292 \ 0.0982]$ 和 $K_b = [0.5556 \ -0.5500 \ 0.2357]$.

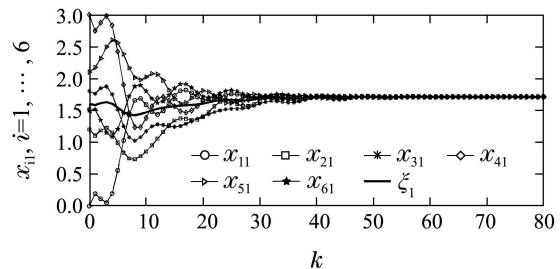
DLMAS(16)在信息拓扑图1(a)和一致性协议(2)下对应的系统(10)的系数矩阵 \bar{A} 是Schur稳定的. 根据定理1得到DLMAS(16)可以达到渐近状态一致. 假定DLMAS(16)的初始状态为

$$\mathbf{x}_1(0) = (0, 0.6, 0.6)^T, \quad \mathbf{x}_2(0) = (1.2, 1.5, 1.8)^T,$$

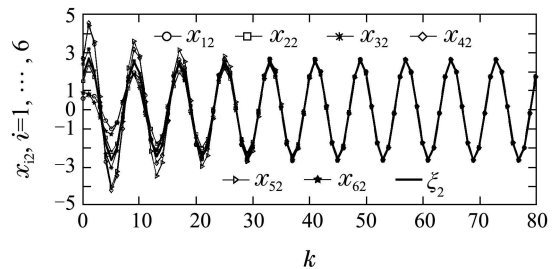
$$\mathbf{x}_3(0) = (1.8, 2.4, 2.1)^T, \quad \mathbf{x}_4(0) = (3.0, 2.7, 3.6)^T,$$

$$\mathbf{x}_5(0) = (2.1, 2.7, 3.6)^T, \quad \mathbf{x}_6(0) = (1.5, 0.9, 0.3)^T,$$

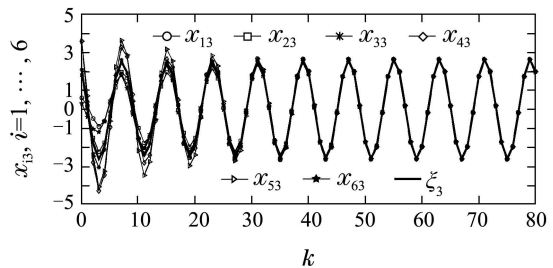
根据式(11)得到DLMAS(16)的状态一致函数为 $\xi(k) = (1.7121, 2.64\sin(0.7071k+1.18), 2.64\cos(0.7071k+1.18))^T$. DLMAS(16)在信息拓扑图1(a)下的状态轨迹和状态一致函数轨迹如图2所示.



(a) x_{i1} 和 ξ_1 的轨迹



(b) x_{i2} 和 ξ_2 的轨迹



(c) x_{i3} 和 ξ_3 的轨迹

图2 DLMAS(16)在图1(a)信息拓扑下的轨迹

Fig. 2 Trajectories of DLMAS (16) under information topology Fig. 1(a)

DLMAS(16)在信息拓扑图1(b)和一致性协议(2)下对应的系统(10)的系数矩阵 \bar{A} 是Schur稳定的. 根据推论1得到DLMAS(16)可以达到渐近状态一致. 假定DLMAS(16)的初始状态与上例相同,根据式(12)可以得到DLMAS(16)的状态一致性的函数为 $\xi(k) =$

$(1.6, 2.6907\sin(0.7071k+1.2602), 2.6907\cos(0.7071k+1.2602))^T$. DLMAS(16)在信息拓扑图1(b)下的状态轨迹和状态一致函数轨迹如图3所示.

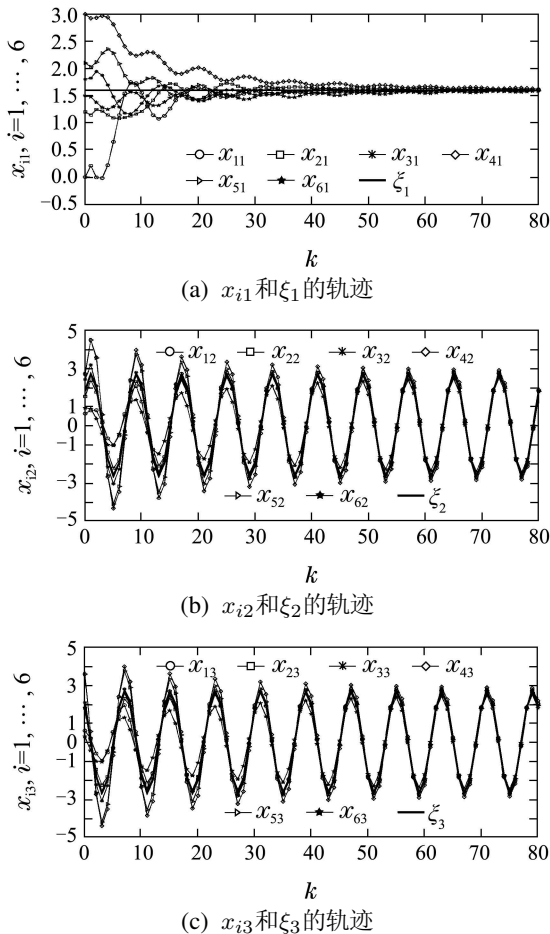


图 3 DLMAS(16)在图1(b)信息拓扑下的轨迹
Fig. 3 Trajectories of DLMAS (16) under information topology Fig. 1(b)

6 结论(Conclusions)

本文提出了一种研究多智能体系统一致性问题新方法. 通过线性变换, 把多智能体系统的渐近状态一致性问题转化为相应线性系统的部分变元渐近稳定性问题. 利用部分变元稳定性理论, 得到离散时间线性多智能体系统在有向信息拓扑下比较容易判断一致性的判断准则和状态一致函数的解析表达式. 同时给出了增益矩阵的设计过程. 不同信息拓扑下的数值实例验证了所提出方法的正确性.

虽然本文只是对固定信息拓扑下离散时间线性多智能体系统进行了研究, 但是该方法可以扩展到信息拓扑为切换信息拓扑, 通信网络存在时延的情况. 对于该方法在不同情况下的拓展研究将是下一步的研究目标.

参考文献(References):

[1] OLFATI-SABER R, FAX J A, MURRAY R M. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems [J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 215 – 233.

[2] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520 – 1533.

[3] XIAO L, BOYD S. Fast linear iterations for distributed averaging [J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 53(1): 65 – 78.

[4] KINGSTON D B, BEARD R W. Discrete-time average consensus under switching network topologies [C] // *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. Minneapolis, Minnesota, USA: IEEE, 2006: 3551 – 3556.

[5] SUN Y G, WANG L, XIE G M. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays [J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(2): 175 – 183.

[6] LI T, ZHANG J F. Consensus conditions of multi-agent systems with time-varying topologies and stochastic communication noises [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(9): 2043 – 2057.

[7] LI T, FU M Y, XIE L H, et al. Distributed consensus with limited communication data rate [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(2): 279 – 292.

[8] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655 – 661.

[9] 谭拂晓, 关新平, 刘德荣. 非平衡拓扑结构的多智能体网络系统一致性协议 [J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(10): 1087 – 1092. (TAN Fuxiao, GUAN Xinping, LIU Derong. Consensus protocol in networked multi-agent systems with non-balanced topology [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(10): 1087 – 1092.)

[10] 李俊兵, 严卫生, 房新鹏. 离散多智能体系统信息一致性的平衡点 [J]. *控制理论与应用*, 2013, 30(4): 513 – 519. (LI Junbing, YAN Weisheng, FANG Xinpeng. Equilibrium of consensus problems for discrete-time multi-agent systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(4): 513 – 519.)

[11] GUG X, MARINOVIC L, LEWIS F L. Consensusability of discrete-time dynamic multiagent systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(8): 2085 – 2089.

[12] YOU K Y, XIE L H. Network topology and communication data rate for consensusability of discrete-time multi-agent systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(10): 2262 – 2275.

[13] XI J X, CAI N, ZHONG Y S. Consensus problems for high-order linear time-invariant swarm systems [J]. *Physica A*, 2010, 389(24): 5619 – 5627.

[14] LI Z K, DUAN Z H, CHEN G R. Consensus of discrete-time linear multi-agent systems with observer-type protocols [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B(DCS-B)*, 2011, 16(2): 489 – 505.

[15] CHEN Y Z, ZHANG Y X, HE Z H, et al. Average dwell-time conditions of switching information topologies for consensus of linear multi-agent systems [C] // *Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference*. Xi'an, China: IEEE, 2013: 7115 – 7120.

[16] VOROTNIKOV V I. *Partial Stability and Control* [M]. Basel Berlin: Birkhauser Boston, 1998.

[17] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 1985.

作者简介:

陈阳舟 (1963-), 男, 教授, 博士生导师, 博士, 研究方向为多智能体协同控制、智能交通系统等, E-mail: yzchen@bjut.edu.cn;

盖彦荣 (1972-), 女, 讲师, 博士研究生, 研究方向为多智能体协同控制、多传感器信息融合等, E-mail: gyryanrong@163.com;

宋学君 (1963-), 女, 副教授, 硕士生导师, 博士, 研究方向为演化硬件、进化算法, E-mail: sxj266@126.com.