

# 一类增长率依赖输出的非线性系统的输出反馈输出跟踪控制

王兴平<sup>1†</sup>, 朱泓霖<sup>2</sup>, 程兆林<sup>3</sup>

(1. 海军航空工程学院 系统科学与数学研究所, 山东 烟台 264001;

2. 海军航空工程学院 研究生管理大队, 山东 烟台 264001; 3. 山东大学 数学学院, 山东 济南 250100)

**摘要:** 研究一类增长率依赖输出非线性系统的输出反馈输出跟踪控制问题. 利用系统结构特点, 构造出系统实现输出跟踪时内部状态的渐近轨迹. 通过建立状态与渐近轨迹偏差的动态方程, 将输出跟踪问题转化为偏差系统的镇定问题, 然后通过设计偏差系统的输出反馈镇定控制器给出输出反馈输出跟踪控制器. 最后以仿真实例验证本文结论.

**关键词:** 非线性系统; 输出反馈; 输出跟踪; 观测器; 反步方法

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Output feedback output tracking of a class of nonlinear systems with output dependent incremental rate

WANG Xing-ping<sup>1†</sup>, ZHU Hong-lin<sup>2</sup>, CHENG Zhao-lin<sup>3</sup>

(1. Institute of Systems Science and Mathematics, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China;

2. Graduate Students' Brigade, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China;

3. School of Mathematics, Shandong University, Jinan Shandong 250100, China)

**Abstract:** The paper addresses the output feedback output tracking control of a class of nonlinear systems with output dependent incremental rate. According to the structure characteristic of the systems, the asymptotic trajectories of internal states are constructed in the case when the output asymptotically tracks the reference. By establishing the dynamics that governs the deviations between the states and the asymptotic trajectories, the output tracking problem is converted to the stabilization problem of the deviation system. Therefore, the output feedback tracking controller is designed by constructing the output feedback stabilizing controller for the deviation system. Finally, a simulation example is given to illustrate the conclusion.

**Key words:** nonlinear system; output feedback; output tracking; observer; backstepping

### 1 引言及问题描述(Introduction and problem formulation)

设计控制器使系统输出跟踪给定的参考信号这一问题广泛出现在机器人控制、船舶控制、飞行器控制等诸多应用领域<sup>[1-4]</sup>, 一直受到控制理论研究的关注, 尤其非线性系统的跟踪控制问题是近十余年的研究重点.

应用非线性系统的几何理论, 文[5]解决了最小相位非线性系统的输出跟踪控制问题. 这一方法在文[6]得到推广, 文中研究具有外界扰动的非线性系统的输出跟踪问题, 提出并解决了非线性系统带干扰抑制的输出跟踪问题. 当非线性系统的不可观状态以系数依赖输出的线性形式出现时, 文[7]研究这类系统的输出反馈输出跟踪问题. 最近的文[8]则研究一类具

有三角结构非线性系统的输出反馈输出跟踪问题, 文中对非线性项提出了一个新的增长条件, 给出了基于系统降维观测器的跟踪控制器, 这一控制器具有动态增益. 近来实用跟踪控制问题受到重视, 它要求设计控制器使得系统输出与给定参考信号的渐近误差小于给定的数, 文[9-10]分别研究了非线性系统的输出反馈实用跟踪问题.

研究控制系统的输出反馈控制首先涉及系统状态观测器设计. 与线性系统具有系统的观测器理论不同, 现有的非线性系统的观测器只针对几类严格限制的非线性系统<sup>[11]</sup>. 文[12]在非线系统满足线性增长性条件下建立了高增益的系统状态观测器. 文[13-14]分别在系统的非线性项满足Lipshitz条件、单调性条件的前提下研究了系统状态观测器设计问题. 文[15]

针对一类增长率依赖输出的非线性系统给出了一个新的观测器, 其中的反馈增益由一个依赖输出的动态方程确定. 与文[13]相比, 这一系统不仅要求非线性项关于不可度量状态满足Lipshitz条件, 且允许相应的Lipshitz系数依赖输出变量.

本文研究一类增长率依赖输出非线性系统的输出反馈输出跟踪问题. 这类系统的输出反馈镇定问题在文[15]得到研究, 文中在动态增益状态观测器基础上, 利用观测器反步方法(observer backstepping)<sup>[16]</sup>设计了输出反馈镇定控制器. 输出跟踪控制问题则在文[8]中得到研究. 本文采取了一个新方法研究这一问题. 利用系统结构特点, 本文构造了系统实现输出跟踪时内部状态的渐近轨迹, 建立了系统状态与渐近轨迹偏差的动态方程, 将跟踪问题直接变成偏差动态系统的镇定问题. 本文借鉴文[15]的方法设计了偏差系统的输出反馈镇定控制器, 从而解决了系统的输出反馈输出跟踪控制问题. 本文比文[8, 15]更充分地利用了下三角结构非线性系统的特点, 所得结论可看作是文[15]中结论的推广.

为简洁起见, 本文研究如下形式的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \\ \dot{x}_n = u + f_n(x_1, \dots, x_n), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (1)$$

这里:  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  是系统状态,  $u \in \mathbb{R}$  是系统控制输入,  $y = x_1 \in \mathbb{R}$  是系统输出, 函数  $f_i (i = 1, \dots, n)$  均为光滑函数.

称系统(1)是增长率依赖输出的是指系统(1)的非线性项  $f_i$  满足如下假设:

**假设 1** 存在恒正光滑函数  $\gamma(x_1)$ , 使对任意  $i = 1, \dots, n$ ,

$$|f_i(x_1, x_2 + z_2, \dots, x_i + z_i) - f_i(x_1, z_2, \dots, z_i)| \leq \gamma(x_1)(|z_2| + \dots + |z_i|). \quad (2)$$

本文研究非线性系统(1)的输出反馈输出跟踪控制问题: 在系统(1)满足假设1的条件下, 对任意给定的有界参考信号  $y_r(t)$ ,  $t \geq 0$ , 其从1到n阶导数存在且连续有界, 设计如下形式的输出反馈控制器

$$\dot{\chi} = \psi(t, \chi, y), \quad u = \varphi(t, \chi, y), \quad (3)$$

当  $x$  从  $\mathbb{R}^n$  任一点出发而  $\chi$  从某一范围出发, 闭环系统(1)-(3)的输出  $y(t)$  满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0$ , 同时系统内部状态是有界的.

## 2 跟踪控制器设计及结论(Tracking controller design and conclusion)

对给定的参考信号  $y_r(t)$ , 如果系统(1)在某一控制

下从某一初值出发的系统输出  $y(t)$  恰好就是  $y_r(t)$ , 即  $x_1(t) \equiv y_r(t)$ , 则根据系统方程(1), 可推出其系统内部状态  $x_1, \dots, x_n$  的轨迹分别为

$$\begin{cases} p_1(t) = y_r(t), \\ p_2(t) = \dot{p}_1(t) - f_1(p_1(t)), \\ \vdots \\ p_n(t) = \dot{p}_{n-1}(t) - f_{n-1}(p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)), \end{cases} \quad (4)$$

如系统输出  $y = x_1$  渐近趋于参考信号  $p_1(t)$ , 则系统状态  $x_i(t)$  应以  $p_i(t)$  为渐近轨迹, 即

$$x_i(t) - p_i(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

反之, 如式(5)成立, 则必有  $y(t) - y_r(t) \rightarrow 0$ . 这样系统(1)的输出反馈输出跟踪问题变成关于  $x_i(t) - p_i(t)$  的输出反馈镇定问题. 本文遵循这一思路解决系统(1)的输出反馈输出跟踪问题.

令  $\tilde{x}_i = x_i - p_i$ . 利用动态方程(1)及关系式(4), 对  $1 \leq i < n$  计算  $\dot{\tilde{x}}_i$  得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i &= x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i) - \dot{p}_i = \\ &\tilde{x}_{i+1} + f_i(\tilde{x}_1 + p_1, \dots, \tilde{x}_i + p_i) - f_i(p_1, \dots, p_i). \end{aligned}$$

对  $i = n$  计算  $\dot{\tilde{x}}_n$  得

$$\dot{\tilde{x}}_n = u - \dot{p}_n + f_n(\tilde{x}_1 + p_1, \dots, \tilde{x}_n + p_n).$$

于是, 得到  $\tilde{x}_i$  的动态方程

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + f_1(\tilde{x}_1 + p_1) - f_1(p_1), \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 + f_2(\tilde{x}_1 + p_1, \tilde{x}_2 + p_2) - f_2(p_1, p_2), \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n = u - \dot{p}_n + f_n(\tilde{x}_1 + p_1, \dots, \tilde{x}_n + p_n). \end{cases} \quad (6)$$

定义函数

$$\begin{aligned} g_i(t, \xi_1, \dots, \xi_i) &= \\ &f_i(\xi_1 + p_1, \dots, \xi_i + p_i) - f_i(p_1, \dots, p_i), \end{aligned} \quad (7)$$

并设  $u = v + \dot{p}_n - f_n(p_1, \dots, p_n)$ ,  $\tilde{y} = \tilde{x}_1$ .

方程(6)可写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + g_1(t, \tilde{x}_1), \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 + g_2(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_n = v + g_n(t, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n), \\ \tilde{y} = \tilde{x}_1. \end{cases} \quad (8)$$

解决系统(8)的输出反馈镇定问题即可解决系统(1)的输出反馈输出跟踪问题. 下面先验证系统(8)满足增长率依赖输出条件, 然后利用文[15]的方法设计系统(8)的动态增益状态观测器, 进而利用观测器反步方法设计(8)的输出反馈镇定控制器. 本文先证明一个引理.

**引理 1** 假设定义在  $t \geq 0$  上的函数满足  $|y_r(t)| \leq M$ ,  $M$  是一个已知常数. 还假设  $\gamma(x)$  是一个非负函数. 则存在光滑函数  $\tilde{\gamma}(x)$ , 使对任意  $x \in \mathbb{R}$  和  $t \geq 0$ , 有

$$\gamma(x + y_r(t)) \leq \tilde{\gamma}(x). \quad (9)$$

**证** 选取光滑单调上升函数  $\beta(x)$  使当  $x \geq 0$  时,

$$\beta(x) \geq \max\{\gamma(x), \gamma(-x)\}.$$

定义  $\tilde{\beta}(x) = \beta((x^2 + 1)/2)$ , 则对任意  $x \in \mathbb{R}$  均有

$$\tilde{\beta}(x) = \beta\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) \geq \beta(|x|) \geq \gamma(x),$$

且当  $x \geq 0$ ,  $\tilde{\beta}(x)$  单调上升, 当  $x \leq 0$  时,  $\tilde{\beta}(x)$  单调下降.

取  $\tilde{\gamma}(x) = \tilde{\beta}(M+x) + \tilde{\beta}(-M+x)$ . 当  $x + y_r(t) \geq 0$  时,  $x + M > x + y_r(t) \geq 0$ , 由  $\tilde{\beta}$  的单调性,  $\tilde{\beta}(x + y_r(t)) \leq \tilde{\beta}(x + M)$ . 当  $x + y_r(t) < 0$  时,  $x - M < x + y_r(t) < 0$ , 同样有  $\tilde{\beta}(x + y_r(t)) \leq \tilde{\beta}(x - M)$ . 所以无论  $x + y_r(t)$  正负, 均有  $\gamma(x + y_r(t)) \leq \tilde{\beta}(x + y_r(t)) \leq \tilde{\beta}(x + M) + \tilde{\beta}(x - M) = \tilde{\gamma}(x)$ .

证毕.

利用这个引理, 可验证非线性系统(8)是增长率依赖输出的. 注意函数  $f_i$  满足假设1, 计算

$$\begin{aligned} & g_i(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + z_2, \dots, \tilde{x}_i + z_i) - \\ & g_i(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_i) = \\ & f_i(\tilde{x}_1 + p_1, \tilde{x}_2 + p_2 + z_2, \dots, \tilde{x}_i + p_i + z_i) - \\ & f_i(\tilde{x}_1 + p_1, \tilde{x}_2 + p_2, \dots, \tilde{x}_i + p_i) \leq \\ & \gamma(\tilde{x}_1 + p_1)(|z_2| + \dots + |z_i|). \end{aligned}$$

由引理1, 存在  $\tilde{\gamma}(x)$  使得  $\gamma(\tilde{x}_1 + p_1) \leq \tilde{\gamma}(\tilde{x}_1)$ , 所以

$$\begin{aligned} & |g_i(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + z_2, \dots, \tilde{x}_i + z_i) - \\ & g_i(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_i)| \leq \\ & \tilde{\gamma}(\tilde{x}_1)(|z_2| + \dots + |z_i|), \end{aligned}$$

即系统(8)也满足假设1.

利用文[15]的观测器设计方法, 构造系统(8)如下形式的状态观测器:

$$\begin{cases} \dot{r} = r\ell(r, \tilde{y}), \\ \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + g_1(t, \tilde{y}) + k_1 r [\tilde{y} - \hat{x}_1], \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + g_{n-1}(t, \tilde{y}, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}) + \\ \quad k_{n-1} r^{n-1} [\tilde{y} - \hat{x}_1], \\ \dot{\hat{x}}_n = v + g_n(t, \tilde{y}, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + k_n r^n [\tilde{y} - \hat{x}_1]. \end{cases} \quad (10)$$

按照文[15], 这里的设计参数  $k_1, \dots, k_n$  和函数  $\ell(r, \tilde{y})$  如下选取:

选取  $k_1, \dots, k_n$  使得下面多项式

$$\phi(\lambda) = \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \dots + k_{n-1} \lambda + k_n$$

的全部特征值的是负实部的, 这样矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & & & \\ & \vdots & & I \\ & & -k_{n-1} & \\ & & & -k_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

是稳定阵. 解关于矩阵变量为  $Q$ , 数值变量为  $a, q$  的线性矩阵不等式:

$$A^T Q + Q A < -a I, \quad q I < Q < I, \quad q > 0, \quad a > 0. \quad (11)$$

对解得的  $Q$ , 取  $b$  为满足

$$-b Q \leq Q D + D Q \leq b Q \quad (12)$$

的正实数, 其中  $D = \text{diag}\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . 根据求得的  $a, q, b$  做函数

$$\ell(r, \tilde{y}) = -\frac{1}{3b} \left[ a(r-1) - \frac{6}{\sqrt{q}} (n-1) \tilde{\gamma}(\tilde{y}) \right], \quad (13)$$

其中  $\tilde{\gamma}(\cdot)$  由引理1确定, 它与  $\gamma(\cdot)$  满足关系式(9).

像所有基于状态观测器的控制设计一样, 下面先建立  $\hat{x}_i$  对  $\tilde{x}_i$  的观测误差的方程. 引入变换

$$e_i = \frac{1}{r^{i+b-1}} (\tilde{x}_i - \hat{x}_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (14)$$

其中  $b$  由式(12)确定的. 这个  $e_i$  可以看作是描述  $\hat{x}_i$  对  $\tilde{x}_i$  的观测误差的量. 对  $1 \leq i \leq n-1$ , 计算  $\dot{e}_i$  并整理得,

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= \frac{1}{r^{i+b-1}} (\dot{\tilde{x}}_i - \dot{\hat{x}}_i) - (i+b-1) \frac{\dot{r}}{r^{i+b}} (\tilde{x}_i - \hat{x}_i) = \\ & r e_{i+1} - k_i r e_1 - (i+b-1) \ell(r, \tilde{y}) e_i + \tilde{g}_i. \end{aligned}$$

计算  $\dot{e}_n$  并整理得

$$\begin{aligned} \dot{e}_n &= \frac{1}{r^{n+b-1}} (\dot{\tilde{x}}_n - \dot{\hat{x}}_n) - (n+b-1) \frac{\dot{r}}{r^{n+b}} (\tilde{x}_n - \hat{x}_n) = \\ & -k_n r e_1 - (n+b-1) \ell(r, \tilde{y}) e_n + \tilde{g}_n. \end{aligned}$$

在以上式子中:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_i &= \frac{1}{r^{i+b-1}} (g_i(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_i) - \\ & g_i(t, \tilde{y}, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_i)), \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

令

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{g}_2 \\ \vdots \\ \tilde{g}_n \end{pmatrix}.$$

利用前面定义的矩阵  $A, D$ , 可将上面  $e_i$  的动态方程整理成如下形式:

$$\dot{e} = r A e - (D + b I) \ell(r, \tilde{y}) e + \tilde{G}. \quad (15)$$

取 Lyapunov 函数

$$V_1(e) = e^T Q e. \quad (16)$$

其中  $Q$  由式(11)确定并与  $b$  一同满足式(12), 直接重复

文[15]的方法可以证明: 只要 $r(t) \geq 1$ 就有

$$\overbrace{e^T Q e} \leq -a e^T Q e. \quad (17)$$

这表明: 在任何输入 $v$ 的作用下, 系统(8)的观测器(10)给出的观测值 $\hat{x}_i$ 都指数收敛到 $\tilde{x}_i$ . 下面对观测器系统应用反步设计方法, 求式(8)的输出反馈镇定控制器.

对系统(10)做一个变量变换

$$\tilde{y} = \hat{x}_1 + r^b e_1, \quad (18)$$

计算整理可得 $\dot{\tilde{y}} = \hat{x}_2 + r^{b+1} e_2 + g_1(\tilde{y})$ , 于是系统(10)可以表示为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}} = \hat{x}_2 + r^{b+1} e_2 + g_1(t, \tilde{y}), \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + k_2 r^{b+2} e_1 + g_2(t, \tilde{y}, \hat{x}_2), \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + k_{n-1} r^{b+n-1} e_1 + \\ \quad g_{n-1}(t, \tilde{y}, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}), \\ \dot{\hat{x}}_n = v + k_n r^{b+n} e_1 + g_n(t, \tilde{y}, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), \\ \dot{r} = r \ell(r, \tilde{y}), \end{cases} \quad (19)$$

这里 $g_i$ 由其定义式(7)可得, 对任意 $t \geq 0, g_i(t, 0, \dots, 0) = 0$ .

系统(19)是一个典型的下三角形形式的非线性系统, 应用标准的反步设计程序, 可以递归求得 $n$ 个函数 $\alpha_i(t, r, \tilde{y}, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_i)$ 满足 $\alpha_i(r, 0, \dots, 0) = 0$ . 当

$$v = \alpha_n(t, r, \tilde{y}, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \quad (20)$$

时, 只要 $r(t) \geq 1$ , 就有

$$\begin{aligned} & \overbrace{\tilde{y}^2 + \sum_{i=2}^n (\hat{x}_i - \alpha_{i-1}(t, r, \tilde{y}, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{i-1}))^2 + e^T Q e} \leq \\ & -\tilde{y}^2 - \frac{a}{2} e^T Q e - \\ & \sum_{i=2}^n (\hat{x}_i - \alpha_{i-1}(t, r, \tilde{y}, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{i-1}))^2. \end{aligned}$$

这些递归过程的实施细节可参见文[15]或文[16], 这里因篇幅限制省略.

根据 $r(t)$ 方程, 当 $r(t) > 1$ 且接近1时,  $\dot{r}(t) > 0$ 总成立, 即 $r(t)$ 增加. 故只要 $r(0) > 1$ , 则 $r(t) > 1$ 对所有 $t \geq 0$ 成立. 直接重复文[15]的方法, 本文可证明: 闭环系统(8)-(10)从 $(0, \infty) \times \mathbb{R}^{2n}$ 出发的解 $(r(t), \tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_n(t))$ 一致收敛到平衡点 $(r^*, 0, \dots, 0)$ , 其中 $r^* = 1 + 6(n-1)\tilde{\gamma}(0)/a\sqrt{q}$ .

由上面解的收敛结论, 可以得到系统状态 $r(t), \hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_n(t)$ 是有界的, 进一步由 $p_i$ 的有界性, 可得状态 $x_i(t) = \tilde{x}_i(t) + p_i(t)$ 也是有界的. 注意 $\tilde{x}_1 = x_1 - p_1$ 趋于0即 $y(t) - y_r(t)$ 趋于0, 可得本文结论:

**定理 1** 对给定参考信号 $y_r(t)$ , 输出反馈控制器

$$\begin{cases} \dot{r} = r \ell(r, y - y_r), \\ \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + k_1 r (y - y_r - \hat{x}_1) + g_1(t, y - y_r), \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + k_{n-1} r^{n-1} (y - y_r - \hat{x}_1) + \\ \quad g_{n-1}(t, y - y_r, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n-1}), \\ \dot{\hat{x}}_n = \alpha_n(t, r, y - y_r, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + k_n r^n \times \\ \quad (y - y_r - \hat{x}_1) + g_n(t, y - y_r, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n), \\ u = \alpha_n(t, r, y - y_r, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) + \\ \quad \dot{p}_n - f_n(p_1, \dots, p_n), \end{cases} \quad (21)$$

式中:  $k_1, \dots, k_n$ 使多项式 $\phi(\lambda) = \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \dots + k_n$ 的全部特征值是负实部的, 函数 $p_i$ 由式(4)确定, 函数 $\ell(\cdot, \cdot)$ 由式(13)确定, 函数 $g_i$ 由式(7)定义,  $\alpha_n$ 由反步方法确定且满足式(21), 只要 $r(t)$ 的初值 $r(0) > 1$ , 闭环系统(1)-(21)的输出 $y$ 渐近跟踪参考信号 $y_r(t)$ , 即当 $t \rightarrow \infty$ 时,  $y(t) - y_r(t) \rightarrow 0$ . 同时闭环系统内部状态保持有界.

### 3 数值仿真(Numeric simulation)

考虑系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u + x_1 + \frac{1}{2} x_1^2 \cos x_2, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (22)$$

取 $\gamma(x) = x^2/2$ , 可验证系统满足增长率依赖输出条件. 给定参考信号 $y_r(t) = (1 + \sin(3t)) \sin(5t)$ , 计算

$$p_1 = (1 + \sin(3t)) \sin(5t),$$

$$p_2 = -\sin(2t) + 4 \sin(8t) + 5 \cos(5t).$$

取 $k_1 = 19, k_2 = 90$ , 解线性矩阵不等式(11)及关系式(12), 得出 $a = 18, q = 0.8, b = 2.4154$ ,

$$Q = \begin{pmatrix} 0.9009 & -0.0489 \\ -0.0489 & 0.0053 \end{pmatrix}.$$

根据定理1, 输出反馈控制器为

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{r}{3b} (a(r-1) - \frac{3}{\sqrt{q}} ((y-p_1)^2 + 4)), \\ \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + k_1 r (y - p_1 - \hat{x}_1) + f_1(y) - q_1, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \alpha_2 + k_2 r^2 (y - p_1 - \hat{x}_1) + f_2(y, \hat{x}_2 + p_2) - q_2, \\ u &= \alpha_2 + \dot{p}_2 - q_2, \end{aligned}$$

这里 $q_1 = f_1(p_1), q_2 = f_2(p_1, p_2), \alpha_1, \alpha_2$ 由反步方法确定:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{2}{aq} r^{2(b+1)} (\hat{x}_1 - p_1) - \frac{1}{2} (\hat{x}_1 - p_1) - h_1, \\ \alpha_2 &= -\frac{2}{aq} (\hat{x}_2 - \alpha_1) (k_2^2 r^{2b+4} + (\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} r^{b+1})^2 + \frac{aq}{4}) - \\ & \quad (y - p_1 + h_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial r} r \ell - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} (\hat{x}_2 + h_1)), \end{aligned}$$

其中 $h_1 = f_1(y) - q_1, h_2 = f_2(y, \hat{x}_2 + p_2) - q_2$ .

取初值 $x_1(0) = -2$ ,  $x_2(0) = 1$ ,  $\tilde{x}_1(0) = 3$ ,  $\tilde{x}_2(0) = 3$ ,  $r(0) = 2$ , 计算闭环系统的数值解. 系统输出对参考信号的跟踪情况在图1给出, 图2给出系统状态 $x_2$ 的仿真曲线和函数 $p_2$ 的曲线, 动态增益 $r(t)$ 的仿真曲线在图3给出. 仿真结果表明, 在输出反馈跟踪控制器的作用下, 系统输出正确地跟踪了给定的参考信号, 且随着 $t$ 的增加, 状态 $x_2$ 以 $p_2$ 为渐近轨迹, 而 $r(t)$ 渐近于一个常值.

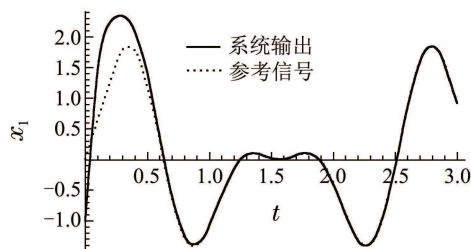


图1 系统输出跟踪参考信号

Fig. 1 Output of the closed-loop system asymptotically tracks the given reference signal

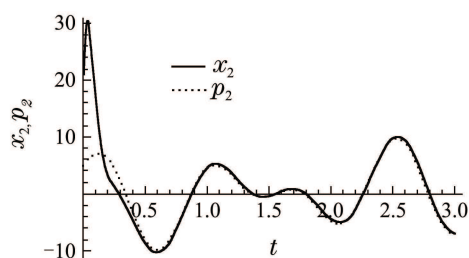


图2 状态 $x_2$ 的仿真轨迹和函数 $p_2$ 的曲线

Fig. 2 Trajectory of  $x_2$  asymptotically tends to the curve of  $p_2$

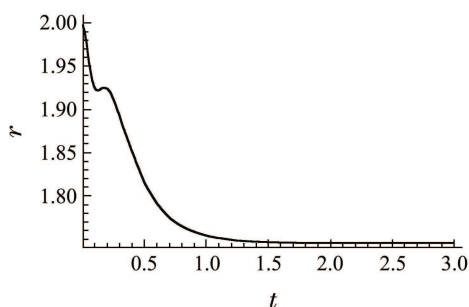


图3 动态增益 $r(t)$ 的仿真轨迹

Fig. 3 Trajectory of the dynamic gain  $r(t)$

#### 4 结语(Conclusions)

本文研究一类增长率依赖输出非线性系统的输出反馈输出跟踪问题. 通过构造系统输出渐近跟踪参考信号时内部状态的渐近轨迹, 并建立描述系统状态和渐近轨迹偏差的动态方程, 将输出反馈输出跟踪问题与偏差系统的输出反馈镇定问题联系起来. 参照相关文献, 本文建立了这个偏差系统的输出反馈镇定控制器, 进而解决了系统输出反馈输出跟踪控制问题. 控制器基于反步方法设计, 具有可构造性. 最后给出仿真实例, 仿真结果表明所设计的跟踪控制器可使系统输出跟踪给定的参考信号.

#### 参考文献(References):

- [1] 吴云洁, 田大鹏, 刘佑民. 飞行仿真转台的完全跟踪控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(3): 414 – 420. (WU Yunjie, TIAN Dapeng, LIU Youmin. Perfect tracking control for flight simulator [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(3): 414 – 420.)
- [2] ZHANG Y, QU W D, XI Y G, et al. Adaptive stabilization and trajectory tracking of airship with neutral buoyancy [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(11): 1437 – 1440.
- [3] 罗伟林, 邹早建, 李铁山. 船舶航向非线性系统鲁棒跟踪控制 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(8): 893 – 895. (LUO Weilin, ZOU Zaojian, LI Tieshan. Robust tracking control of nonlinear ship steering [J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(8): 893 – 895.)
- [4] XU W, CAI C, ZOU Y. PD-based trajectory tracking control in automatic cell injection systems [J]. *Journal Control Theory and Applications*, 2013, 11(2): 207 – 214.
- [5] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems* [M]. London, UK: Springer-Verlag, 1995.
- [6] MARINO R, TOMEI P. Nonlinear output feedback tracking with almost disturbance decoupling [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 1871 – 1877.
- [7] KRISHNAMURTHY P, KHORRAMI F, JIANG Z P. Global output feedback tracking for nonlinear systems in generalized output-feedback canonical form [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(5): 814 – 817.
- [8] ZHANG X, LIN Y. A new approach to global asymptotic tracking for a class of low-triangular nonlinear systems via output feedback [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(12): 3192 – 3196.
- [9] GONG Q, QIAN C. Global practical tracking of a class of nonlinear systems by output feedback [J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 184 – 189.
- [10] ANDRIEU V, PRALY L, ASTOLFI A. Asymptotic tracking of a reference trajectory by output-feedback for a class of nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2009, 58(9): 652 – 663.
- [11] KOKOTOVIC P, ARCAK M. Constructive nonlinear control: a historical perspective [J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 637 – 662.
- [12] QIAN C J, LIN W. Output feedback control of a class of nonlinear systems: a nonseparation principle paradigm [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(10): 1710 – 1715.
- [13] RAJAMANI R. Observers for Lipschitz nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(3): 397 – 401.
- [14] FAN X, ARCAK M. Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities [J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 50(4): 319 – 330.
- [15] PRALY L. Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 1103 – 1108.
- [16] KRSTIĆ M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIĆ P. *Nonlinear and Adaptive Control Design* [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995.

#### 作者简介:

王兴平 (1962–), 男, 副教授, 当前研究方向为非线性系统控制、多智能体控制, E-mail: wangxpyan@aliyun.com;

朱泓霖 (1990–), 男, 硕士研究生, 当前研究方向为系统仿真、系统控制与应用, E-mail: zhuhonglin1989@foxmail.com;

程兆林 (1939–), 男, 教授, 研究方向为奇异系统控制、非线性系统控制, E-mail: zhaolincheng.sdu@gmail.com.