第31卷第8期
2014年8月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 31 No. 8
Aug. 2014

DOI: 10.7641/CTA.2014.31281

用区间直觉模糊集方法对属性权重未知的群求解其多属性决策

陈志旺, 陈 林†, 杨 七, 白 锌, 赵方亮

(燕山大学 工业计算机控制工程河北省重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 本文首先提出群区间直觉模糊有序加权几何(group interval-valued intuitionistic fuzzy ordered weighted geometric, GIVIFOWG)算子和群区间直觉模糊有序加权平均(group interval-valued intuitionistic fuzzy ordered weighted averaging, GIVIFOWA)算子. 利用GIVIFOWG算子或GIVIFOWA算子聚集群的决策矩阵以获得方案在属性上的综合区间直觉模糊决策矩阵(collective interval-valued intuitionistic fuzzy decision-matrix, CIVIFDM). 然后定义了一个考虑犹豫度的区间直觉模糊熵(interval-valued intuitionistic fuzzy entropy, IVIFE); 通过熵衡量每个属性所含的信息来求解属性权重. 最后, 提出基于可能度的接近理想解的区间排序法(interval technique for order preference by similarity to an ideal solution, ITOPSIS)和区间得分函数法. 在ITOPSIS法中, 依据区间距离公式计算候选方案和理想方案的属性加权区间距离, 进而采用ITOPSIS准则对各方案进行排序; 在区间得分函数法中, 算出CIVIFDM中各方案的得分值以及精确值, 然后利用区间得分准则对各方案进行排序. 实验结果验证了决策方法的有效性和可行性.

关键词: 区间直觉模糊集; 区间直觉模糊熵; TOPSIS; 得分函数; 多属性群决策; 动态多属性决策

中图分类号: TP18 **文献标识码**: A

Interval-valued intuitionistic fuzzy set method for group multi-attribute decision-making with unknown attribute weights

CHEN Zhi-wang, CHEN Lin†, YANG Qi, BAI Xin, ZHAO Fang-liang

(Key Lab of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: We introduce the group interval-valued intuitionistic fuzzy ordered weighted geometric (GIVIFOWG) operator and the group interval-valued intuitionistic fuzzy ordered weighted averaging (GIVIFOWA) operator. All the decision matrices of group are integrated into a collective interval-valued intuitionistic fuzzy decision matrix (CIVIFDM) by GIVIFOWG or GIVIFOWA operator. Next, the interval-valued intuitionistic fuzzy entropy (IVIFE) with hesitancy degree is defined and used to calculate attribute weights according to the information of every attribute. Finally, the interval technique for order preference by similarity to an ideal solution (ITOPSIS) method and the interval score function method both based on possibility degree are presented. In the ITOPSIS method, the attribute weighted interval distance between every alternative and the ideal-positive alternative is calculated by the interval distance formula; then, the ITOPSIS criterion is applied to determine the ranking order of all the alternatives. In the method of interval score function, the score values and accuracy values of all the alternatives in CIVIFDM are calculated, and the ranking order of all the alternatives is determined through the interval score criterion. The simulation shows the validity and feasibility of the proposed decision-making method.

Key words: interval-valued intuitionistic fuzzy set; interval-valued intuitionistic fuzzy entropy; TOPSIS; score function; multi-attribute group decision-making; dynamic multi-attribute decision-making

1 引言(Introduction)

自从直觉模糊集被提出以来, 一些学者提出了不同的模糊集[1–2]来求解不确定性问题. 其中区间直觉模糊集理论[2]将隶属度、非隶属度以及犹豫度扩展成区间数, 提高了直觉模糊集处理不确定信息的能力. 在实际决策中, 由于决策者的局限性和事物的复杂性, 许多决策问题必须考虑不同时段的原始决策信息, 这类问题称为动态多属性决策问题. 同时也存在单一决策者无法对多属性决策问题进行准确、全面分析的情况, 因此需要多个决策专家参与决策的多属性群决策问题. 前者中有时间群, 后者中有专家群, 因此本文统称为群多属性决策问题. 目前, 区间直觉模糊集理论在群多属性决策问题上的应用已取得了一定的成果[3–5].

针对群多属性决策问题中的群集成算子, Xu等[5]引入了求解各类决策问题的集成算子, 进而讨论了这

收稿日期: 2013–12–06; 录用日期: 2014–04–28.
†通信作者. E-mail: chlnor@163.com.
基金项目: 河北省自然科学基金青年基金资助项目(F2014203099); 燕山大学青年教师自主研究计划课题资助项目(13LGA006).

些算子在多属性群决策以及动态多属性决策中的应用[5–7]; Wang对Xu等提出的算子进行了综合分析, 进而提出了基于爱因斯坦几何算子的区间直觉模糊集运算法则, 并用其求解群决策问题[8–9]. 针对属性权重未知的多属性决策问题, Szimidt等[10]利用直觉模糊集的几何解释, 提出了直觉模糊熵公式; 魏等[11]提出构造熵时考虑犹豫度更符合客观事实, 随后相继有不同形式的直觉和区间直觉模糊熵公式[3,11–14]被提出.

针对群多属性决策的排序问题, 目前有TOPSIS (technique for order preference by similarity to an ideal solution)法和得分函数两种典型方法: 1) Lai等[15]提出基于TOPSIS法求解多属性决策问题的思路; Jahanshahloo等在文献[16]中拓展了TOPSIS法并将其应用到求解属性值为区间数的多属性决策问题. 随后又有许多学者相继提出改进的TOPSIS法[3,17–18], 但上述TOPSIS法都是最终将区间直觉模糊集转化成确定数进行排序; 2) Chen和Tan提出了基于得分函数的排序方法[19]. Hong和Choi[20]提出了精确函数的定义, 完善了文献[19]中的得分函数排序理论. Liu和Wang等相继提出几种得分函数[21–22], 但是利用上述函数排序有时会出现与现实不符合的结果. 综上可知, 现存的得分函数都有其缺陷和局限性, 本文将其归纳为两点: 1) 定义得分函数的思路是把区间数转化为确定数, 有可能造成重要信息的丢失从而得到错误的排序结果; 2) 在定义得分函数时没有考虑犹豫度对决策结果的影响. 纵观国内外学者在区间直觉模糊集框架下对群多属性决策方面的研究, 大多数文献[3,5–7,16–22]都是将区间数确定化, 而这样则会造成区间信息不同程度的丢失. 鉴于此, 本文在区间直觉模糊集理论的基础上, 提出了群区间直觉模糊集成算子, 区间直觉模糊熵, 并给出了两种决策方法. 最后研究比较了两种决策方法的有效性和适应范围.

2 基础理论(Fundamental theory)

2.1 区间直觉模糊集(Interval intuitionistic fuzzy sets)

定义 1[2] 设X为一非空集合, $D[0,1]$代表区间$[0,1]$上所有闭子集的集合, X在$\hat{A}$上的区间直觉模糊集表示为

$$\hat{A}=\{(x,\bar{\mu}_{\hat{A}}(x),\bar{\nu}_{\hat{A}}(x))|x\in X\},\tag{1}$$

其中:

$$\begin{aligned}&\bar{\mu}_{\hat{A}}(x)\subseteq D[0,1],\ \ \bar{\nu}_{\hat{A}}(x)\subseteq D[0,1],\\&\bar{\mu}_{\hat{A}}(x)=[\mu^{\rm L}_{\hat{A}}(x),\ \ \mu^{\rm R}_{\hat{A}}(x)],\bar{\nu}_{\hat{A}}(x)=[\nu^{\rm L}_{\hat{A}}(x),\nu^{\rm R}_{\hat{A}}(x)],\end{aligned}\tag{2}$$

满足条件: $0\leqslant\mu^{\rm R}_{\hat{A}}(x)+\nu^{\rm R}_{\hat{A}}(x)\leqslant1$, $\forall x\in X$, 其中: $\mu^{\rm L}_{\hat{A}}(x)$和$\mu^{\rm R}_{\hat{A}}(x)$分别表示X中元素属于$\hat{A}$的隶属度的上下边界; $\nu^{\rm L}_{\hat{A}}(x)$和$\nu^{\rm R}_{\hat{A}}(x)$分别表示X中元素属于$\hat{A}$的非隶属度的上下边界. 因此式(2)整理为

$$\hat{A}=\{(x,[\mu^{\rm L}_{\hat{A}}(x),\mu^{\rm R}_{\hat{A}}(x)],[\nu^{\rm L}_{\hat{A}}(x),\nu^{\rm R}_{\hat{A}}(x)])|x\in X\}.\tag{3}$$

令$\Delta\mu_{\hat{A}}(x)=\mu^{\rm R}_{\hat{A}}(x)-\mu^{\rm L}_{\hat{A}}(x)$, $\Delta\nu_{\hat{A}}(x)=\nu^{\rm R}_{\hat{A}}(x)-\nu^{\rm L}_{\hat{A}}(x)$, $p\subseteq[0,1]$, 式(3)可表示为

$$\begin{aligned}\hat{A}=\{(x,\mu^{\rm L}_{\hat{A}}(x)+p\Delta\mu_{\hat{A}}(x),\nu^{\rm L}_{\hat{A}}(x)+\\p\Delta\nu_{\hat{A}}(x))|x\in X\},\end{aligned}\tag{4}$$

即X中属于元素$\hat{A}$的不确定度或者犹豫度表示为

$$\begin{aligned}\pi_{\hat{A}}(x)=1-\mu^{\rm L}_{\hat{A}}(x)-\nu^{\rm L}_{\hat{A}}(x)-\\p(\Delta\mu_{\hat{A}}(x)+\Delta\nu_{\hat{A}}(x)).\end{aligned}\tag{5}$$

2.2 区间数的相关运算(The related operations of interval numbers)

定义 2 对区间数

$$\bar{a}=[a^{\rm L},a^{\rm R}],\ \ a^c=\frac{a^{\rm L}+a^{\rm R}}{2},\ \ a^r=\frac{a^{\rm R}-a^{\rm L}}{2},$$

则称a^c, a^r分别为区间数$\bar{a}$的中点、半径.

设$\bar{a}=[a^{\rm L},a^{\rm R}]$和$\bar{b}=[b^{\rm L},b^{\rm R}]$为两区间数, $0\leqslant a^{\rm L}\leqslant a^{\rm R}$, $0\leqslant b^{\rm L}\leqslant b^{\rm R}$, 则两区间数的运算法则详见文献[23]. 本文为了比较上述两区间数的占优关系, 基于两区间数可能存在的6种位置情况[24], 提出区间数可能度公式(6).

$$P(\bar{a}\leqslant\bar{b})=\begin{cases}0, & b^{\rm R}\leqslant a^{\rm L},\\ \dfrac{(b^{\rm R}-a^{\rm L})^2}{8\,a^r\,b^r}, & b^{\rm L}<a^{\rm L}<b^{\rm R}<a^{\rm R},\\ \dfrac{b^c-a^{\rm L}}{2\,a^r}, & a^{\rm L}<b^{\rm L}<b^{\rm R}\leqslant a^{\rm R},\\ 1-\dfrac{(a^{\rm R}-b^{\rm L})^2}{8\,a^r\,b^r}, & a^{\rm L}\leqslant b^{\rm L}<a^{\rm R}<b^{\rm R},\\ \dfrac{b^{\rm R}-a^c}{2\,b^r}, & b^{\rm L}\leqslant a^{\rm L}<a^{\rm R}\leqslant b^{\rm R},\\ 1, & a^{\rm R}\leqslant b^{\rm L},\end{cases}\tag{6}$$

文献[24]中在论述公式(6)可能度性质时曾指出: 可能度为0.5的情况下两区间数完全相等, 这条性质存在反例: 设$\bar{a}=[0.1,0.4]$, $\bar{b}=[0.2,0.3]$, 则$P(\bar{a}\leqslant\bar{b})=0.5$, 但$\bar{a}\neq\bar{b}$. 因此上述性质修正如下: 若$P(\bar{a}\leqslant\bar{b})=0.5$, 则$a^c=b^c$且$a^{\rm L}-b^{\rm L}=b^{\rm R}-a^{\rm R}$.

3 群多属性决策问题及决策方法(Group multi-attribute decision-making problem and decision method)

在群多属性决策问题中, 各属性的权重常常是未知的, 因此本文重点研究属性权重未知的群多属性决策问题.

3.1 数学描述(Mathematical description)

设$D=\{D_{T1},D_{T2},\cdots,D_{Tn}\}$为$n$个决策者(若

为动态多属性决策, 则D_{Ti}为第i时段; 若为多属性群决策, 则D_{Ti}为第i专家)决策矩阵集合, 其中各决策者的权重$\boldsymbol{\lambda}=\{\lambda_{T1},\lambda_{T2},\cdots,\lambda_{Tn}\}^{\mathrm{T}}$; 满足$\lambda_{Ti}\geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_{Ti}=1(i=1,2,\cdots,n)$; $Z=\{Z_1,Z_2,\cdots,Z_m\}$为方案集; $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_k\}$为属性集(属性权重未知); D_{Ti}关于方案集Z在属性集C上的决策矩阵为

$$D_{Ti}=\begin{bmatrix}\xi_{11}^{Ti} & \xi_{12}^{Ti} & \cdots & \xi_{1k}^{Ti}\\ \xi_{21}^{Ti} & \xi_{22}^{Ti} & \cdots & \xi_{2k}^{Ti}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \xi_{m1}^{Ti} & \xi_{m2}^{Ti} & \cdots & \xi_{mk}^{Ti}\end{bmatrix}, \tag{7}$$

其中: $\xi_{jl}^{Ti}=\{[a_{jl}^{TiL},a_{jl}^{TiR}],[b_{jl}^{TiL},b_{jl}^{TiR}]\}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m;\ l=1,2,\cdots,k)$是第$i$个决策者对方案$Z_j$属性$c_l$的区间直觉模糊集(定义1).

3.2 群区间直觉模糊集成算子(Group interval-valued intuitionistic fuzzy aggregated operator)

由文献[8]可知"爱因斯坦和与爱因斯坦积"是严格阿基米德t-norms中的特殊算子, 因此Wang等将爱因斯坦算子扩展到区间直觉模糊集上, 并提出了区间直觉模糊集运算法则详见参考文献[8–9]. 本文在区间运算法则[8–9]的基础上定义了群区间直觉模糊有序加权几何算子和群区间直觉模糊有序加权平均算子, 用以聚集各时段或各专家的区间直觉模糊集.

定义 3 设$\alpha_j=\{[a_j^{\mathrm{L}},a_j^{\mathrm{R}}],\ [b_j^{\mathrm{L}},b_j^{\mathrm{R}}]\}(j=1,2,\cdots,n)$为第$j$个决策者的区间直觉模糊数, 若

$$\mathrm{GIVIFOWG}_{\lambda,w}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\hat{\alpha}_{\sigma(1)}^{w_1}\times\hat{\alpha}_{\sigma(2)}^{w_2}\times\cdots\times\hat{\alpha}_{\sigma(n)}^{w_n}, \tag{8}$$

其中: $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$是与函数GIVIFOWG相关联的位置向量(指数加权向量), $w_j\in[0,1]$, $\sum\limits_{j=1}^{n}w_j=1$. $\hat{\alpha}_{\sigma(j)}$是指加权的区间直觉模糊数$\hat{\alpha}_i(i=1,2,\cdots n)$中第$i$个最大的元素, 其中: $\hat{\alpha}_i=\alpha_i^{n\lambda_{Ti}}$, $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_{T1},\lambda_{T2},\cdots,\lambda_{Tn})^{\mathrm{T}}$是各决策者$\alpha_j$的权重向量, $\lambda_{Ti}\in[0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_{Ti}=1$, n是平衡因子. 则称函数GIVIFOWG为群区间直觉模糊有序加权几何算子.

定义 4 设$\alpha_j=\{[a_j^{\mathrm{L}},a_j^{\mathrm{R}}],\ [b_j^{\mathrm{L}},b_j^{\mathrm{R}}]\}(j=1,2,\cdots,n)$为第$j$个决策者的区间直觉模糊数, 则群区间直觉模糊有序加权平均算子表示如下:

$$\mathrm{GIVIFOWA}_{\lambda,w}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\hat{\alpha}_{\sigma(1)}^{w_1}+\hat{\alpha}_{\sigma(2)}^{w_2}+\cdots+\hat{\alpha}_{\sigma(n)}^{w_n}, \tag{9}$$

其中: $\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$是与函数GIVIFOWA相关联的位置向量(指数加权向量), $w_j\in[0,1]$, $\sum\limits_{j=1}^{n}w_j=1$. $\hat{\alpha}_{\sigma(j)}$是指加权的区间直觉模糊数$\hat{\alpha}_i(i=1,2,\cdots n)$中第$i$个最大的元素, 其中$\hat{\alpha}_i=\alpha_i^{n\lambda_{Ti}}$, $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_{T1},\lambda_{T2},\cdots,\lambda_{Tn})^{\mathrm{T}}$是各决策者$\alpha_j$的权重向量, $\lambda_{Ti}\in[0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_{Ti}=1$, n是平衡因子.

设$\hat{\alpha}_{\sigma(j)}=\{[\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}},\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}}],[\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}},\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}}]\}$, 则参考区间运算法则[23]可将式(8)(9)整理如下:

$$\begin{aligned}&\mathrm{GIVIFOWG}_{\lambda,w}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\\&\{[\frac{2\prod\limits_{j=1}^{n}(\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(2-\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}+\prod\limits_{j=1}^{n}(\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}},\\&\frac{2\prod\limits_{j=1}^{n}(\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(2-\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}+\prod\limits_{j=1}^{n}(\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}}],\\&[\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}-\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}+\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}},\\&\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}-\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}+\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}}]\},\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{GIVIFOWA}_{\lambda,w}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,,\alpha_n)=\\&\{[\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}-\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}+\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}},\\&\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}-\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(1+\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}+\prod\limits_{j=1}^{n}(1-\hat{a}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}}],\\&[\frac{2\prod\limits_{j=1}^{n}(\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(2-\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}+\prod\limits_{j=1}^{n}(\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{L}})^{w_j}},\\&\frac{2\prod\limits_{j=1}^{n}(\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}}{\prod\limits_{j=1}^{n}(2-\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}+\prod\limits_{j=1}^{n}(\hat{b}_{\sigma(j)}^{\mathrm{R}})^{w_j}}]\}.\end{aligned} \tag{11}$$

3.3 区间直觉模糊熵(Interval-valued intuitionistic fuzzy entropy)

本文借鉴文献[11]的思路, 在Ye等[14]工作的基础上定义了考虑犹豫度的区间直觉模糊熵.

定义 5[14] 对任意的$\hat{A},\hat{B}\in\mathrm{IVIFS}(X)$, 设$\mu_{\hat{A}}=\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\mu_{\hat{A}}(x)$, $\nu_{\hat{A}}=\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\nu_{\hat{A}}(x)$, $\mu_{\hat{B}}=\mu_{\hat{B}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\mu_{\hat{B}}(x)$, $\nu_{\hat{B}}=\nu_{\hat{B}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\nu_{\hat{B}}(x)$, $p\subseteq[0,1]$. 如果E满足下面的条件, 则称映射: $E:\mathrm{IVIFS}(X)\rightarrow[0,1]$为区间直觉模糊集的区间直觉模糊熵.

1) $E(\hat{A})=0$当且仅当$\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=0, \nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=1$或者$\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=1, \nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=0$;

2) $E(\hat{A})=1$当且仅当$[\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x),\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)]=[\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x),\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)]$;

3) $E(\hat{A})=E(\hat{A}^c)$;

4) 如果$\forall x\in X$, 任意$p\subseteq[0,1]$, 当$\mu_{\hat{B}}\geqslant\nu_{\hat{B}}$且有$\mu_{\hat{A}}\geqslant\mu_{\hat{B}}$和$\nu_{\hat{A}}\leqslant\nu_{\hat{B}}$或者当$\mu_{\hat{B}}\leqslant\nu_{\hat{B}}$时, 且有$\mu_{\hat{A}}\leqslant\mu_{\hat{B}}$和$\nu_{\hat{A}}\geqslant\nu_{\hat{B}}$, 则$E(\hat{A})\leqslant E(\hat{B})$.

在此基础上定义区间直觉模糊集$\hat{A}$的区间直觉模糊熵$E(\hat{A})$如下:

$$E(\hat{A})=\cos(\frac{|(\mu_{\hat{A}}-\nu_{\hat{A}})(1-\pi_{\hat{A}})|}{2}\pi). \tag{12}$$

由于$\pi_{\hat{A}}=1-\mu_{\hat{A}}-\nu_{\hat{A}}$, 式(12)可整理为

$$E(\hat{A})=\cos(\frac{|\mu_{\hat{A}}^2-\nu_{\hat{A}}^2|}{2}\pi). \tag{13}$$

证 由$\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}\leqslant\mu_{\hat{A}}\leqslant\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}$, 即$\mu_{\hat{A}}\subseteq[0,1]$, 同理$\nu_{\hat{A}}\subseteq[0,1]$, 因此$|\mu_{\hat{A}}^2-\nu_{\hat{A}}^2|\subseteq[0,1]$则$0\leqslant\frac{|\mu_{\hat{A}}^2-\nu_{\hat{A}}^2|}{2}\pi\leqslant\frac{\pi}{2}$, 把其代入式(12)得$0\leqslant E(\hat{A})\leqslant 1$, 因此满足$\mathrm{IVIFS}(X)\to[0,1]$.

1) 假设$E(\hat{A})=0$, 由式(13), 得$(\mu_{\hat{A}}^2-\nu_{\hat{A}}^2)=\pm1$. 则$\mu_{\hat{A}}^2=1, \nu_{\hat{A}}^2=0$或$\mu_{\hat{A}}^2=0$, $\nu_{\hat{A}}^2=1$. 若$\mu_{\hat{A}}^2=1$, $\nu_{\hat{A}}^2=0$则$\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\mu_{\hat{A}}(x)=1$, $\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\nu_{\hat{A}}(x)=0$, 因为$p\subseteq[0,1]$, 对于任意$p$则有$\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=1$, $\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=0$. 同理可推出, 当$\mu_{\hat{A}}^2=0$, $\nu_{\hat{A}}^2=1$时, 有$\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=0, \nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=1$,

设$\hat{A}$满足: $\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=1, \nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=0$或$\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=0, \nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)=1$成立. 综合式(5)和式(13)得$E(\hat{A})=0$.

2) 假设$E(\hat{A})=1$, 由式(13)可得

$$\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\mu_{\hat{A}}(x)=\pm(\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\nu_{\hat{A}}(x)),$$

又因为$\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\mu_{\hat{A}}(x)\subseteq[0,1]$, $\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\nu_{\hat{A}}(x)\subseteq[0,1]$则$\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\mu_{\hat{A}}(x)=\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)+p\Delta\nu_{\hat{A}}(x)$. 对于任意$p$则有$\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)=\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x)$, $p\Delta\mu_{\hat{A}}(x)=p\Delta\nu_{\hat{A}}(x)$, 因此可以推出$[\mu_{\hat{A}}{}^{\mathrm{L}}(x),\mu_{\hat{A}}{}^{\mathrm{R}}(x)]=[\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x),\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)]$.

若$[\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x),\mu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)]=[\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{L}}(x),\nu_{\hat{A}}^{\mathrm{R}}(x)]$, 则$\mu_{\hat{A}}=\nu_{\hat{A}}$, 代入式(13)可得$E(\hat{A})=1$.

3) 由文献[8]容易得到$E(\hat{A})=E(\hat{A}^c)$.

4) 假设$E(\hat{A})\leqslant E(\hat{B})$, 则

$$\cos(\frac{|(\mu_{\hat{A}}^2-\nu_{\hat{A}}^2)|}{2}\pi)\leqslant\cos(\frac{|(\mu_{\hat{B}}^2-\nu_{\hat{B}}^2)|}{2}\pi),$$

由$y=\cos x$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上是单调递减函数, 因此可推出$|\mu_{\hat{A}}^2-\nu_{\hat{A}}^2|\geqslant|\mu_{\hat{B}}^2-\nu_{\hat{B}}^2|$. 由$\mu_{\hat{A}}\geqslant\mu_{\hat{B}}, \nu_{\hat{A}}\leqslant\nu_{\hat{B}}$, $\mu_{\hat{B}}\geqslant\nu_{\hat{B}}$可得$\mu_{\hat{A}}^2\geqslant\mu_{\hat{B}}^2\geqslant\nu_{\hat{B}}^2\geqslant\nu_{\hat{A}}^2$, 显然$|\mu_{\hat{A}}^2-\nu_{\hat{A}}^2|\geqslant|\mu_{\hat{B}}^2-\nu_{\hat{B}}^2|$成立. 因此对于任意的$x\in X$都有$E(\hat{A})\leqslant E(\hat{B})$.

同理对于任意的$x\in X$, 在$\mu_{\hat{A}}\leqslant\mu_{\hat{B}}, \nu_{\hat{A}}\geqslant\nu_{\hat{B}}$, $\mu_{\hat{B}}\leqslant\nu_{\hat{B}}$的条件下, 有$E(\hat{A})\leqslant E(\hat{B})$.

从式(13)可以看出, 该熵公式不仅考虑了区间直觉模糊集中的隶属度和非隶属度, 而且还考虑了犹豫度, 因此式(13)计算的结果可以充分反映区间直觉模糊集的模糊程度.

3.4 区间数距离公式及ITOPSIS法(Interval distance formula and ITOPSIS method)

现有的距离公式基本都是将两区间数距离转化成一个确定数. 由文献[25]可知, 用一个实数表示两个区间数之间的距离, 很容易丢失有用的信息, 即会严重影响排序结果. 因此本文采用区间距离值为区间数的距离公式ITOPSIS法.

设j维空间上的区间数$\bar{a}_j=[a_j^{\mathrm{L}},a_j^{\mathrm{R}}]$, $\bar{b}_j=[b_j^{\mathrm{L}},b_j^{\mathrm{R}}]$, 由定义2转化为$\bar{a}_j=[a_j^c-a_j^r,a_j^c+a_j^r]$, $\bar{b}_j=[b_j^c-b_j^r,b_j^c+b_j^r]$, 即在维度$j$上两区间数的距离表示为$D_j=[D_{j\min},D_{j\max}]$, 计算公式[25]如下:

$$\begin{cases} D_{j\min}= \\ \begin{cases} |a_j^c-b_j^c|-a_j^r-b_j^r, & |a_j^c-b_j^c|-a_j^r-b_j^r\geqslant 0, \\ 0, & |a_j^c-b_j^c|-a_j^r-b_j^r<0, \end{cases} \\ D_{j\max}=|a_j^c-b_j^c|+a_j^r+b_j^r. \end{cases} \tag{14}$$

则$\bar{a}_j$与$\bar{b}_j(j=1,2,\cdots,d)$的区间加权距离$D(\bar{a},\bar{b})=[D_{\bar{a}\min},D_{\bar{a}\max}]$可表示为

$$D_{\bar{a}\min}=\sqrt{\sum_{j=1}^{d}D_{j\min}^2},\ D_{\bar{a}\max}=\sqrt{\sum_{j=1}^{d}D_{j\max}^2}. \tag{15}$$

从式(15)可以看出, 区间加权距离仍是一个区间数, 因此可以比较全面地表示各种可能的距离值.

任选两个区间直觉模糊集

$$\hat{A}=\{(x,\bar{\mu}_{\hat{A}}(x),\bar{\nu}_{\hat{A}}(x))|x\in X\},$$
$$\hat{B}=\{(x,\bar{\mu}_{\hat{B}}(x),\bar{\nu}_{\hat{B}}(x))|x\in X\}.$$

利用式(14)分别计算$\hat{A}$与$\hat{B}$中隶属度, 非隶属度及犹豫度3个维度上的区间数距离$D_\mu=[D_{\mu\min},D_{\mu\max}]$, $D_\nu=[D_{\nu\min},D_{\nu\max}]$, $D_\pi=[D_{\pi\min},D_{\pi\max}]$, 进而利用公式(15)得到$\hat{A}$与$\hat{B}$的区间加权距离$D(\hat{A},\hat{B})=[D_{\hat{A}\min},D_{\hat{A}\max}]$. 其中:

$$\begin{cases} D_{\hat{A}\min}=\sqrt{D_{\mu\min}^2+D_{\nu\min}^2+D_{\pi\min}^2}, \\ D_{\hat{A}\max}=\sqrt{D_{\mu\max}^2+D_{\nu\max}^2+D_{\pi\max}^2}. \end{cases} \tag{16}$$

由式(16)知区间加权距离值的形式为区间数, 而区间数无法像确定数那样比较两个数的绝对大小, 因此本文基于式(6)改进TOPSIS法, 提出ITOPSIS法来比较方案占优关系.

设区间直觉模糊理想方案为$A^+=\{(x,\bar{\mu}_{A^+}(x),\bar{\nu}_{A^+}(x))|x\in X\}$, 则两区间直觉模糊集$\hat{A}=\{(x,\bar{\mu}_{\hat{A}}(x),\bar{\nu}_{\hat{A}}(x))|x\in X\}$和$\hat{B}=\{(x,\bar{\mu}_{\hat{B}}(x),\bar{\nu}_{\hat{B}}(x))|x\in X\}$与理想方案$A^+$的区间加权距离分别为$D(\hat{A},A^+)$和$D(\hat{B},A^+)$.

1) 若$P(D(\hat{A},A^+)\leqslant D(\hat{B},A^+))>0.5$, 则$\hat{A}$占优$\hat{B}$, 记作$\hat{A}>\hat{B}$.

2) 若$P(D(\hat{A},A^+)\leqslant D(\hat{B},A^+))=0.5$, 则$\hat{A}$和$\hat{B}$相等, 记作$\hat{A}=\hat{B}$.

3) 若$P(D(\hat{A},A^+)\leqslant D(\hat{B},A^+))<0.5$, 则$\hat{A}$劣于$\hat{B}$, 记作$\hat{A}<\hat{B}$.

3.5 区间得分函数以及区间精确函数(Interval score function and interval accuracy function)

本文在文献[19–20]的基础上, 按照区间直觉模糊集中隶属度、非隶属度、犹豫度三者之间的原有比例对犹豫度进行k次分解, 并在此基础上添加一个犹豫系数ξ, 当$k\to\infty$时, 得到$\hat{A}$的区间得分函数$IS(\hat{A})$(式(17))和区间精确函数$IH(\hat{A})$(式(18)).

$$IS(\hat{A})=\frac{(\bar{\mu}_{\hat{A}}(x)-\bar{\nu}_{\hat{A}}(x))}{1-\xi(\bar{\mu}_{\hat{A}}(x)+\bar{\nu}_{\hat{A}}(x))\bar{\pi}_{\hat{A}}(x)},\quad 0\leqslant\xi\leqslant 1, \tag{17}$$

$$IH(\hat{A})=\frac{(\bar{\mu}_{\hat{A}}(x)+\bar{\nu}_{\hat{A}}(x))}{1-\xi(\bar{\mu}_{\hat{A}}(x)+\bar{\nu}_{\hat{A}}(x))\bar{\pi}_{\hat{A}}(x)},\quad 0\leqslant\xi\leqslant 1. \tag{18}$$

当$\xi=0$时, 式(17)–(18)为没有考虑犹豫度的区间得分函数和区间精确函数, 当$0<\xi\leqslant 1$时, 式(17)–(18)为考虑犹豫度的区间得分函数和区间精确函数.

3.6 区间得分准则(Interval score criteria)

本文将区间直觉模糊集的得分函数和精确函数扩展为区间数, 而区间数无法像确定数那样比较两个数的绝对大小, 因此本文采用式(6)计算区间得分函数、区间精确函数的可能度, 在此基础上定义基于可能度的区间得分准则如下:

设两区间直觉模糊数$\hat{A}=\{(x,\bar{\mu}_{\hat{A}}(x),\bar{\nu}_{\hat{A}}(x))|x\in X\}$和$\hat{B}=\{(x,\bar{\mu}_{\hat{B}}(x),\bar{\nu}_{\hat{B}}(x))|x\in X\}$的区间得分函数分别为$IS(\hat{A})$和$IS(\hat{B})$, 精确得分函数分别为$IH(\hat{A})$和$IH(\hat{B})$, 则

1) 若$P(IS(\hat{A})\geqslant IS(\hat{B}))>0.5$, 则$\hat{A}$占优$\hat{B}$, 记作$\hat{A}>\hat{B}$.

2) 若$P(IS(\hat{A})\geqslant IS(\hat{B}))=0.5$, 则

① 若$P(IH(\hat{A})\geqslant IH(\hat{B}))=0.5$, 则$\hat{A}$和$\hat{B}$相等, 记作$\hat{A}=\hat{B}$.

② 若$P(IH(\hat{A})\geqslant IH(\hat{B}))<0.5$, 则$\hat{A}$劣于$\hat{B}$, 记作$\hat{A}<\hat{B}$.

③ 若$P(IH(\hat{A})\geqslant IH(\hat{B}))>0.5$, 则$\hat{A}$占优$\hat{B}$, 记作$\hat{A}>\hat{B}$.

3) 若$P(IS(\hat{A})\geqslant IS(\hat{B}))<0.5$, 则$\hat{A}$劣于$\hat{B}$, 记作$\hat{A}<\hat{B}$.

根据文献[24]中可能度公式性质可以知道, 利用式(6)分别求解式(16)–(18)所得区间数间的概率矩阵都是互补判断矩阵[6].

定义 6[26] 对于互补判断矩阵$P=(p_{ij})_{n\times n}$, 可利用如下公式对其进行排序:

$$\delta_i=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}+\dfrac{n}{2}-1}{n(n-1)},\ i=1,2,\cdots,n. \tag{19}$$

由文献[26]可知, δ_i越大, 则代表方案越好.

4 属性权重未知的群多属性决策(Group multi-attribute decision-making with unknown attribute weights)

4.1 未知属性权重的求解(The method of calculating the unknown attribute weights)

步骤 1 用$\mathrm{GIVIFOWG}_{\lambda,w}$或$\mathrm{GIVIFOWA}_{\lambda,w}$算子(式(10)–(11))计算各决策矩阵$D_{Ti}$的综合区间直觉模糊决策矩阵$D_{m\times k}$,

$$D_{m\times k}=\begin{bmatrix}\xi_{11}&\xi_{12}&\cdots&\xi_{1k}\\ \xi_{21}&\xi_{22}&\cdots&\xi_{2k}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \xi_{m1}&\xi_{m2}&\cdots&\xi_{mk}\end{bmatrix}. \tag{20}$$

步骤 2 利用式(13)计算区间直觉模糊综合决策矩阵$D_{m\times k}$的熵矩阵$E_{m\times k}$,

$$E_{m\times k}=\begin{bmatrix}E_{11}&E_{12}&\cdots&E_{1k}\\ E_{21}&E_{22}&\cdots&E_{2k}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ E_{m1}&E_{m2}&\cdots&E_{mk}\end{bmatrix}. \tag{21}$$

步骤 3 对熵矩阵$E_{m\times k}$进行归一化处理得$\bar{E}_{m\times k}$,

$$\bar{E}_{m\times k}=\begin{bmatrix}\bar{E}_{11}&\bar{E}_{12}&\cdots&\bar{E}_{1k}\\ \bar{E}_{21}&\bar{E}_{22}&\cdots&\bar{E}_{2k}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \bar{E}_{m1}&\bar{E}_{m2}&\cdots&\bar{E}_{mk}\end{bmatrix}, \tag{22}$$

其中: $\bar{E}_{jl}=\dfrac{E_{jl}}{\max\{E_{1l},E_{2l,\cdots},E_{ml}\}}(j=1,2,\cdots,m;\ l=1,2,\cdots,k)$.

步骤 4 计算属性权重ω_l,

$$\omega_l=\frac{KC-\beta_l}{k*KC-T}, \tag{23}$$

其中: $\beta_l=\sum\limits_{t=1}^{m}\bar{E}_{tl}$, $T=\sum\limits_{l=1}^{k}\beta_l$; KC为常数, 通常取为1, 也可根据权重关系进行适当调整. 对客观权重而言,

原则上, 指标最大权重与最小权重应该在1倍之内, 如果差距太大, 可适当调节KC[27].

4.2 群多属性决策ITOPSIS法(ITOPSIS method for group multi-attribute decision-making)

本节基于利用TOPSIS法排序的思想[15], 提出基于可能度的ITOPSIS群多属性决策排序法, 决策过程如下:

步骤 1 利用GIVIFOWG$_{\lambda,w}$或GIVIFOWA$_{\lambda,w}$算子(式(10)–(11))计算各决策矩阵D_{Ti}的综合区间直觉模糊决策矩阵$D_{m\times k}$.

步骤 2 利用式(23)计算属性权重ω_l.

步骤 3 确定区间直觉模糊理想方案$A^+=\{[1,1],[0,0]\}$, 利用式(14)计算各方案中各属性与A^+的区间加权距离$D(\xi_{jl},A^+)=[D_{\xi_{jl}\min},D_{\xi_{jl}\max}]$.

步骤 4 计算各方案的属性加权区间距离

$$D(Z_j)=[D_{Zj\min},D_{Zj\max}],$$

$$D_{Zj\min}=\sum_{l=1}^{k}\omega_l D_{\xi_{jl}\min},\ D_{Zj\max}=\sum_{l=1}^{k}\omega_l D_{\xi_{jl}\max}.$$

步骤 5 利用式(6)求出$D(Z_j)$之间的概率占优矩阵$P(D)$.

$$P(D)=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm}\end{bmatrix}.$$

步骤 6 利用式(19)求出$P(D)$对应的δ_j^D并进行排序, 最终确定最优方案.

4.3 群多属性决策区间得分函数法(Score function method for group multi-attribute decision-making)

本节利用区间得分函数, 提出基于可能度的区间得分准则法, 决策过程如下:

步骤 1 利用GIVIFOWG$_{\lambda,w}$或GIVIFOWA$_{\lambda,w}$算子(式(10)–(11))计算各决策矩阵D_{Ti}的综合区间直觉模糊决策矩阵$D_{m\times k}$.

步骤 2 利用式(23)计算属性权重ω_l.

步骤 3 利用式(17)–(18)计算各方案中各属性的区间得分值$IS(\xi_{jl})$和区间精确值$IH(\xi_{jl})$:

$$IS(\xi_{jl})=[IS_{\xi_{jl}\min},IS_{\xi_{jl}\max}],$$

$$IH(\xi_{jl})=[IH_{\xi_{jl}\min},IH_{\xi_{jl}\max}].$$

步骤 4 计算各方案的属性加权得分值与精确值:

$$IS(Z_j)=[IS_{Zj\min},IS_{Zj\max}],$$

$$IH(Z_j)=[IH_{Zj\min},IH_{Zj\max}],$$

$$IS_{Zj\min}=\sum_{l=1}^{k}\omega_l IS_{\xi_{jl}\min},$$

$$IS_{Zj\max}=\sum_{l=1}^{k}\omega_l IS_{\xi_{jl}\max},$$

$$IH_{Zj\min}=\sum_{l=1}^{k}\omega_l IH_{\xi_{jl}\min},$$

$$IH_{Zj\max}=\sum_{l=1}^{k}\omega_l IH_{\xi_{jl}\max}.$$

步骤 5 利用式(6)求出$IS(Z_j)$和$IH(Z_j)$之间的概率占优矩阵.

$$P(IS)=\begin{bmatrix} IS_{11} & IS_{12} & \cdots & IS_{1m}\\ IS_{21} & IS_{22} & \cdots & IS_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ IS_{m1} & IS_{m2} & \cdots & IS_{mm}\end{bmatrix},$$

$$P(IH)=\begin{bmatrix} IH_{11} & IH_{12} & \cdots & IH_{1m}\\ IH_{21} & IH_{22} & \cdots & IH_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ IH_{m1} & IH_{m2} & \cdots & IH_{mm}\end{bmatrix}.$$

步骤 6 利用式(19)求出$P(IS)$和$P(IH)$对应的δ_i^{IS}和δ_i^{IH}并进行排序, 最终确定最优方案.

5 实验与分析(Experiment and analysis)

文献[4]动态多属性决策案例: 考虑某个风险投资公司进行项目投资决策, 有5个可供选择企业$Z=\{Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5\}$, 4个评价属性$C=\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$, 评价属性分别是风险分析、成长分析、社会政治影响分析、环境影响分析. 专家组根据上述4个评价属性对5 个供选择的企业在最近3年的业绩分别进行评估, 并得到区间直觉模糊矩阵$D_{Ti}(i=1,2,3)$, 其中各时间段决策矩阵的权重向量$\boldsymbol{\lambda}=[0.2\ 0.3\ 0.5]^{\mathrm T}$, GIVIFOWG$_{\lambda,w}$(GIVIFOWA$_{\lambda,w}$的位置权重向量$\boldsymbol{w}=(0.2429,0.5142,0.2429)^{\mathrm T}$, 属性权重信息完全未知.

在此首先利用ITOPSIS对文献[4]案例进行排序.

步骤 1 利用GIVIFOWG或GIVIFOWA算子(式(10)–(11))计算近3年的区间直觉模糊决策矩阵$D_{5\times4}$(见表1、表2)或$D^*_{5\times4}$(略).

步骤 2 令$p=0.5$, 利用式(13)计算$D_{5\times4}$或$D^*_{5\times4}$所对应的熵矩阵$E_{5\times4}$或$E^*_{5\times4}$, 并取$KC=1$, 对$E_{5\times4}$或$E^*_{5\times4}$进行归一化, 进而利用式(23)得属性权重如下:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\omega}=[0.2135\ \ 0.3054\ \ 0.2380\ \ 0.2432],\\ \boldsymbol{\omega}^*=[0.2329\ \ 0.3303\ \ 0.2010\ \ 0.2359].\end{cases}\tag{24}$$

步骤 3 确定区间直觉模糊理想方案$A^+=\{[1,1],[0,0]\}$. 利用式(14)计算各方案中各属性与A^+的区间加权距离: $D(\xi_{jl},A^+)=[D_{\xi_{jl}\min},D_{\xi_{jl}\max}]$, $j=1,2,\cdots,5$, $l=1,2,\cdots,4$.

步骤 4 在步骤2和3的基础上, 计算各方案在属性$\boldsymbol{\omega}$或$\boldsymbol{\omega}^*$下的属性加权区间距离$D(Z_j)$或$D^*(Z_l)(j=1,2,\cdots,5)$.

$$D_{T1}=\begin{bmatrix}([0.5,0.6],[0.3,0.4]) & ([0.5,0.6],[0.2,0.3]) & ([0.2,0.3],[0.6,0.7]) & ([0.1,0.2],[0.7,0.8])\\ ([0.6,0.7],[0.2,0.3]) & ([0.7,0.8],[0.1,0.2]) & ([0.7,0.8],[0.1,0.2]) & ([0.3,0.4],[0.4,0.5])\\ ([0.5,0.6],[0.3,0.4]) & ([0.4,0.5],[0.3,0.4]) & ([0.5,0.6],[0.2,0.3]) & ([0.6,0.7],[0.2,0.3])\\ ([0.8,0.9],[0.0,0.1]) & ([0.5,0.6],[0.3,0.4]) & ([0.2,0.3],[0.4,0.5]) & ([0.2,0.3],[0.5,0.6])\\ ([0.6,0.7],[0.2,0.2]) & ([0.3,0.4],[0.4,0.5]) & ([0.7,0.8],[0.0,0.1]) & ([0.5,0.6],[0.3,0.4])\end{bmatrix},$$

$$D_{T2}=\begin{bmatrix}([0.3,0.4],[0.3,0.5]) & ([0.4,0.5],[0.2,0.3]) & ([0.1,0.2],[0.5,0.6]) & ([0.0,0.1],[0.6,0.7])\\ ([0.6,0.7],[0.2,0.3]) & ([0.6,0.7],[0.0,0.1]) & ([0.5,0.6],[0.0,0.1]) & ([0.3,0.4],[0.4,0.5])\\ ([0.5,0.6],[0.2,0.3]) & ([0.3,0.4],[0.3,0.4]) & ([0.4,0.5],[0.1,0.2]) & ([0.5,0.6],[0.1,0.2])\\ ([0.7,0.8],[0.0,0.1]) & ([0.5,0.6],[0.1,0.2]) & ([0.2,0.3],[0.3,0.4]) & ([0.1,0.2],[0.5,0.6])\\ ([0.5,0.6],[0.1,0.2]) & ([0.3,0.4],[0.2,0.3]) & ([0.6,0.8],[0.0,0.1]) & ([0.4,0.5],[0.2,0.3])\end{bmatrix},$$

$$D_{T3}=\begin{bmatrix}([0.3,0.4],[0.5,0.6]) & ([0.5,0.5],[0.4,0.5]) & ([0.1,0.2],[0.7,0.7]) & ([0.0,0.1],[0.8,0.9])\\ ([0.5,0.6],[0.3,0.4]) & ([0.6,0.7],[0.2,0.3]) & ([0.6,0.6],[0.3,0.4]) & ([0.3,0.4],[0.5,0.6])\\ ([0.4,0.4],[0.4,0.5]) & ([0.4,0.5],[0.5,0.5]) & ([0.4,0.5],[0.3,0.4]) & ([0.5,0.6],[0.3,0.4])\\ ([0.7,0.8],[0.1,0.2]) & ([0.5,0.6],[0.4,0.4]) & ([0.2,0.3],[0.5,0.6]) & ([0.1,0.2],[0.6,0.7])\\ ([0.5,0.6],[0.3,0.3]) & ([0.2,0.3],[0.4,0.6]) & ([0.6,0.7],[0.1,0.2]) & ([0.4,0.5],[0.3,0.4])\end{bmatrix}.$$

表 1 区间直觉模糊决策矩阵 $D_{5\times4}$

Table 1 CIVIFDM $D_{5\times4}$

	c_1	c_2
Z_1	([0.3374, 0.4385], [0.3701, 0.5143])	([0.4623, 0.5253], [0.2708, 0.3701])
Z_2	([0.5716, 0.6701], [0.2318, 0.3299])	([0.6703, 0.7617], [0.1044, 0.1947])
Z_3	([0.4724, 0.5716], [0.2825, 0.3843])	([0.3619, 0.4623], [0.3701, 0.4284])
Z_4	([0.7220, 0.8197], [0.0365, 0.1341])	([0.5460, 0.6393], [0.2653, 0.3180])
Z_5	([0.5253, 0.6239], [0.1865, 0.2318])	([0.2703, 0.3722], [0.3004, 0.4429])

表 2 区间直觉模糊决策矩阵 $D_{5\times4}$

Table 2 CIVIFDM $D_{5\times4}$

	c_3	c_4
Z_1	([0.1195, 0.2241], [0.5858, 0.6429])	([0.0000, 0.1195], [0.6897, 0.7997])
Z_2	([0.5751, 0.6373], [0.1267, 0.2263])	([0.3122, 0.4122], [0.4284, 0.5276])
Z_3	([0.4261, 0.5253], [0.1865, 0.2852])	([0.5253, 0.6239], [0.1865, 0.2852])
Z_4	([0.2110, 0.3122], [0.3843, 0.4844])	([0.1195, 0.2241], [0.5276, 0.6278])
Z_5	([0.6239, 0.7682], [0.0365, 0.1341])	([0.4261, 0.5253], [0.2465, 0.3446])

步骤 5 利用式(6)求出$D(Z_j)$和$D^*(Z_j)$之间的概率占优矩阵如下:

$$P(D)=\begin{bmatrix}0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000\\ 1.0000 & 0.5000 & 0.9280 & 0.9981 & 0.8546\\ 1.0000 & 0.0720 & 0.5000 & 0.7572 & 0.4118\\ 1.0000 & 0.0019 & 0.2428 & 0.5000 & 0.1990\\ 1.0000 & 0.1454 & 0.5882 & 0.8010 & 0.5000\end{bmatrix},$$

$$P^*(D)=\begin{bmatrix}0.5000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000\\ 1.0000 & 0.5000 & 0.8918 & 0.9558 & 0.8486\\ 1.0000 & 0.1082 & 0.5000 & 0.6755 & 0.4595\\ 1.0000 & 0.0442 & 0.3245 & 0.5000 & 0.3048\\ 1.0000 & 0.1514 & 0.5405 & 0.6952 & 0.5000\end{bmatrix}.$$

步骤 6 利用式(19)求出$P(D)$和$P^*(D)$对应的δ_j^D和δ_j^{*D}.

δ_j^D=[0.1000 0.2890 0.2121 0.1722 0.2267],

δ_j^{*D}=[0.1000 0.2848 0.2122 0.1837 0.2194].

由δ_j^D和δ_j^{*D}可知, 经过两种算子聚集后的排序结果都为$Z_2 \succ Z_5 \succ Z_3 \succ Z_4 \succ Z_1$, 最佳方案为$Z_2$. 该排序结果与文献[4]中的排序结果完全相同. 但同时需要注意的是两种算子的侧重点是不一样的. 参考文献[4]中D_{T1}, D_{T2}, D_{T3}的相关参数, 对于属性c_1, c_2, Z_4基本优于Z_3, 而对于属性c_3, c_4, Z_3大幅优于Z_4, 进而比较由GIVIFOWG和GIVIFOWA算子分别得到的$p_{34}=0.7572$和${p^*}_{34}=0.6755$, 得知p_{34}

大于p^*_{34}, 因此可以得出结论, GIVIFOWG算子突出属性c_3, c_4的作用, 即更加倾向单个数据的作用, 而GIVIFOWA算子则偏重于强调整体数据的影响(4个属性的整体影响).

此处若对文献[4]案例采用基于可能度的区间得分函数法, 决策过程如下:

步骤 1–2 同ITOPSIS法步骤1–2.

步骤 3 利用式(17)–(18)计算各方案中各属性的区间得分值$IS(\xi_{jl})$和区间精确值$IH(\xi_{jl})$.

步骤 4 在步骤2, 3的基础上计算各方案在属性ω或ω^*下的属性加权得分值$IS(Z_j)$或$IS^*(Z_j)$与精确值$IH(Z_j)$或$IH^*(Z_j)$.

步骤 5 利用式(6)求出区间得分值与精确值之间的概率占优矩阵$P(IS)$和$P(IH)$(略). $P(IS)$结果如下:

$$P(IS)=\begin{bmatrix}0.5000 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1.0000 & 0.5000 & 0.9209 & 1.0000 & 0.7202\\ 1.0000 & 0.0791 & 0.5000 & 0.8547 & 0.2480\\ 1.0000 & 0 & 0.1453 & 0.5000 & 0.0426\\ 1.0000 & 0.2798 & 0.7520 & 0.9574 & 0.5000\end{bmatrix}.$$

步骤 6 利用式(19)求出$P(IS)$和$P^*(IS)$对应的δ_j^{IS}和δ_j^{*IS}并进行排序, 最终确定最优方案.

$$\delta_j^{IS}=[0.1000\ \ 0.2821\ \ 0.2091\ \ 0.1594\ \ 0.2495],$$
$$\delta_j^{*IS}=[0.1000\ \ 0.2892\ \ 0.1913\ \ 0.1815\ \ 0.2380].$$

分别取犹豫系数$\xi=0$或1. 当$\xi=0$时, $IS(Z_2)$, $IS(Z_1)$为$[0.2268, 0.4641]$, $[-0.3842, -0.1277]$, 当$\xi=1$时, 方案2和1得分值为$[0.2244, 0.5318]$和$[-0.4612, -0.1195]$. 因此可以得到结论: 在隶属度大于非隶属度的情况下, 随着犹豫度系数ξ的增大, 方案的区间(精确)得分值变好; 在隶属度小于非隶属度的情况下, 随着犹豫度系数ξ的增大, 方案的区间(精确)得分值变差.

综合概率占优矩阵$\delta_j^D, \delta_j^{*D}, \delta_j^{IS}, \delta_j^{*IS}$可以看出, 在5个备选的风投企业中, 企业2在风险分析、成长分析、社会政治影响分析、环境影响分析等方面近年的综合表现优于其他4个企业, 因此, 风险投资公司在进行风险项目的投资时, 应首选企业2, 其次依次是企业5和企业3, 企业4和企业1不予考虑.

此外本文对文献[3]中的多属性群决策问题应用本文设计的方法进行排序, 所得结果与文献[3]排序结果完全一致. 综合对文献[3]多属性群决策案例和文献[4]动态多属性决策案例排序结果可知, 利用ITOPSIS法或区间得分函数法都能有效地求解群多属性决策问题. 但需要注意的是, 在ITOPSIS法中需要设定一个理想方案, 本文以$A^+=\{[1,1],[0,0]\}$作为理想方案(即A^+的犹豫度为$[0,0]$), 因此该方法实际是把犹豫度当成非隶属度处理, 结合式(16)可以知道, 方案的犹豫度越大, 与理想方案的距离越大, 即该方法侧重求解决策问题中所有方案相对于理想方案的排序, 适用于已知理想方案的排序问题. 相反, 在区间得分函数法中不需要决策者设定理想方案, 利用式(17)–(18)把犹豫度进一步按比例进行分解, 会使好的方案变的更优, 劣的方案变的更差, 有利于选出最优方案, 尤其适用于在没有理想方案的前提下选最优方案的问题(此处以文献[4]案例为例说明, 企业2是最好的企业, 而企业4是不予考虑的, 进而从$P(D)$中看出$p_{24}=0.9981$小于$P(IS)$中的$p_{24}=1$).

另外通过Matlab仿真得到利用ITOPSIS法和区间得分函数法求解文献[4]的时间分别为0.0086 s和0.0095 s, 求解文献[3]的时间分别为0.0097 s和0.011 s. 通过上述数据比较可以知道, ITOPSIS法的运算效率略高于区间得分函数法, 并且随着决策者数量的增加, 运算时间也会随之略微增大.

6 结论(Conclusions)

本文首先基于爱因斯坦几何算子提出了两种新的聚集算子: GIVIFOWG和GIVIFOWA, 总结了两算子在聚集区间直觉模糊集时的3个特点并通过文献[4]案例中的数据对其进行解释说明; 其次在考虑犹豫度的前提下, 提出了区间直觉模糊熵, 利用该公式得到的属性权重充分的反映了区间直觉模糊集中的犹豫度; 进而提出了两种排序方法, 这两种方法可以有效避免区间直觉模糊数中的区间数转化成确定数从而造成区间信息丢失的情况发生; 最后指出了上述两种方法的优缺点和适用范围.

参考文献(References):

[1] 赵涛, 肖建. 二型直觉模糊集 [J]. 控制理论与应用, 2012, 29(9): 1215 – 1222.
(ZHAO Tao, XIAO Jian. Type-2 intuitionistic fuzzy sets [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(9): 1215 – 1222.)

[2] ATANASSOV K T. Interval valued intuitionistic fuzzy sets [M] //*Intuitionistic Fuzzy Sets*. Heideberg: Physica-Verlag HD, 1999: 139 – 177.

[3] 张英俊, 马培军, 苏小红, 等. 属性权重不确定条件下的区间直觉模糊多属性决策 [J]. 自动化学报, 2012, 38(2): 220 – 228.
(ZHANG Yingjun, MA Peijun, SU Xiaohong, et al. Multi-attribute decision making with uncertain attribute weight information in the framework of interval-valued intuitionistic fuzzy set [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(2): 220 – 228.)

[4] 刘勇, 刘思峰, 赵焕焕, 等. 基于区间直觉模糊的动态多属性灰色关联决策方法 [J]. 控制与决策, 2013, 28(9): 1303 – 1308
(LIU Yong, LIU Sifeng, ZHAO Huanhuan, et al. Dynamic multiple attribute grey incidence decision making mothed based on interval valued intuitionisitc fuzzy number [J]. *Control and Decision*, 2013, 28(9): 1303 – 1308.)

[5] 徐泽水. 直觉模糊信息集成理论及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2008: 1 – 208.
(XU Zeshui. *Intuitionistic Fuzzy Information Aggregation Theory and Application* [M]. Beijing: Science Press, 2008: 1 – 208.)

[6] XU Z S. A deviation-based approach to intuitionistic fuzzy multiple attribute group decision making [J]. *Group Decision and Negotiation*, 2010, 19(1): 57 – 76.

[7] XU Z S. Approaches to multiple attribute group decision making based on intuitionistic fuzzy power aggregation operators [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2011, 24(6): 749 – 760.

[8] WANG W, LIU X. The multi-attribute decision making method based on interval-valued intuitionistic fuzzy Einstein hybrid weighted geometric operator [J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2013, 66(10): 1845 – 1856.

[9] WANG W, LIU X. Interval-valued intuitionistic fuzzy hybrid weighted averaging operator based on Einstein operation and its application to decision making [J]. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 2013, 25(2): 279 – 290.

[10] SZMIDT E, KACPRZYK J. Entropy for intuitionistic fuzzy sets [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 118(3): 467 – 477.

[11] 魏翠萍, 高志海, 郭婷婷. 一个基于三角函数的直觉模糊熵公式 [J]. 控制与决策, 2012, 27(4): 571 – 574.
(WEI Cuiping, GAO Zhihai, GUO Tingting. An intuitionistic fuzzy entropy measure based on trigonometric function [J] . *Control and Decision*, 2012, 27(4): 571 – 574.)

[12] YE J. Two effective measures of intuitionistic fuzzy ertropy [J]. *Computing*, 2010, 87(1/2): 55 – 62.

[13] ZHANG H M, YU L Y. MADM method based on cross-entropy and extended TOPSIS with interval-valued intuitionistic fuzzy sets [J]. *Knowledge-Based Systems*, 2012, 30(1): 115 – 120.

[14] YE J. Multiple attribute group decision-making methods with completely unknown weights in intuitionistic fuzzy setting and interval-valued intuitionistic fuzzy setting [J]. *Group Decision and Negotiation*, 2013, 22(2): 173 – 188.

[15] LAI Y J, LIU T Y, HWANG C L. Topsis for MODM [J]. *Europeen Journal of Operational Research*, 1994, 76(3): 486 – 500.

[16] JAHANSHAHLOO G R, HOSSEINZADEH LOTFI F, DAVOODI A R. Extension of TOPSIS for decision-making problems with interval data: interval efficiency [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2009, 49(5): 1137 – 1142.

[17] DYMOVA L, SEVASTJANOV P, TIKHONENKO A. A direct interval extension of TOPSIS method [J]. *Expert Systems with Applications*, 2013, 40(12): 4841 – 4847.

[18] LIU S, CHAN F T S, RAN W. Multi-attribute group decision-making with multi-granularity linguistic assessment information: an improved approach based on deviation and TOPSIS [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, 37(24): 10129 – 10140.

[19] CHEN S M, TAN J M. Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 67(2): 163 – 172.

[20] HONG D H, CHOI C H, Multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 114(1): 103 – 113.

[21] LIU H W, WANG G J. Multi-criteria decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets [J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 179(1): 220 – 233.

[22] WANG J, LI J. Multi-criteria fuzzy decision-making method based on cross entropy and score functions [J]. *Expert Systems with Applications*, 2011, 38(1): 1032 – 1038.

[23] 孙海龙, 姚卫星. 区间数排序方法评述 [J]. 系统工程学报, 2010, 25(3): 304 – 312
(SUN Hailong, YAO Weixing. Comments on methods for ranking interval numbers [J]. *Journal of Systems Engineering*, 2010, 25(3): 304 – 312.)

[24] Jiang C. *Theories and algorithms of uncertain optimization based on interval* [D]. Changsha: Hunan University, 2008.

[25] 彭宇, 罗清华, 彭喜元. UIDK-means: 多维不确定性测量数据聚类算法 [J]. 仪器仪表学报, 2011, 32(6): 1201 – 1207.
(PENG Yu, LUO Qinghua, PENG XiYuan. UIDK-means: a multi-dimensional uncertain measurement data clustering algorithm [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2011, 32(6): 1201 – 1207.)

[26] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法 [J]. 系统工程学报, 2001, 16(4): 311 – 314.
(XU Zeshui. Algorithm for priority of fuzzy complementary judgment matrix [J]. *Journal of Systems Engineering*, 2001, 16(4): 311 – 314.)

[27] 刘培德, 王娅姿. 一种属性权重未知的区间概率风险型混合多属性决策方法 [J]. 控制与决策, 2012, 27(2): 276 – 280.
(LIU Peide, WANG Yazi. Method of hybrid multi-attribute decision-making with risk of interval probability under attribute weight unknown [J]. *Control and Decision*, 2012, 27(2): 276 – 280.)

作者简介:

陈志旺　(1978–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为预测控制、区间数优化, E-mail: czwaaron@ysu.edu.cn;

陈　林　(1989–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为区间数优化、多目标优化, E-mail: chlnor@163.com;

杨　七　(1988–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为区间数优化、神经网络, E-mail: 303138806@qq.com;

白　锌　(1988–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为区间数优化、遗传算法, E-mail: 565141916@qq.com;

赵方亮　(1989–), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为工程优化技术, E-mail: 1072170896@qq.com.