

有色量测噪声下的改进求容积卡尔曼滤波器

王思思[†], 齐国清

(大连海事大学 信息科学技术学院, 辽宁 大连 116026)

摘要: 为解决标准求容积卡尔曼滤波器在有色量测噪声条件下滤波精度退化的问题, 提出改进求容积卡尔曼滤波器及其平方根形式. 首先利用一阶马尔科夫模型白化非线性离散随机系统有色量测噪声, 将有色量测噪声下非线性离散随机系统转化为白噪声下非线性时滞系统. 然后根据所得非线性时滞系统推导其高斯域的贝叶斯滤波框架, 最后基于3度Spherical-Radial规则将该滤波框架近似为改进的求容积卡尔曼滤波器及其平方根形式. 机动目标跟踪仿真试验结果表明两种改进求容积卡尔曼滤波算法在标准白噪声条件下与标准求容积卡尔曼滤波算法的估计精度相同, 而在有色量测噪声背景下滤波精度和鲁棒性更优.

关键词: 卡尔曼滤波; 有色噪声; 容积准则; 目标跟踪; 非线性滤波

中图分类号: V556; TP13 **文献标识码:** A

Improved cubature Kalman filters with colored measurement noise

WANG Si-si[†], QI Guo-qing

(College of Information Science and Technology, Dalian Maritime University, Dalian Liaoning 116026, China)

Abstract: To solve the estimation accuracy degradation of standard cubature Kalman filter with colored measurement noise, an improved cubature Kalman filter and its square root form are presented in the paper. Firstly, the first-order Markov model is used to whiten colored measurement noise in nonlinear discrete stochastic system, and then the nonlinear discrete stochastic system with colored measurement noise is transformed into a nonlinear time-delay system with normal white noise. Secondly, the frame of recursive Bayesian filter in Gaussian domain is derived based on the whitened nonlinear time-delay system. Finally, third-degree Spherical-Radial cubature rule is applied in above frame to deduce the improved Cubature Kalman filter and its square root form. The maneuvering target tracking simulation results demonstrate the improved cubature Kalman filters have the same accuracy as standard ones in the system with normal white Gaussian noise, and can achieve better accuracy and robustness when the measurement noise is colored.

Key words: Kalman filters; colored noise; cubature rule; target tracking; nonlinear filtering

1 引言(Introduction)

求容积卡尔曼滤波器(cubature Kalman filter, CKF)是2009年提出的一种能较好解决高维非线性状态估计问题的非线性滤波器. 研究成果表明在相同运算量的前提下, CKF算法可获得比粒子滤波器(particle filter, PF)和无迹卡尔曼滤波器(unscented Kalman filter, UKF)等非线性估计方法更高的滤波精度^[1]. 因此, CKF在机动目标跟踪领域都有着不错的应用前景. 当随机序列 $\{\tau_k\}$ 满足式(1)所示的统计特性, 就称为零均值白噪声序列.

$$\begin{cases} E[\tau_k] = 0, \\ E[\tau_k \tau_j^T] = \mathbf{M} \delta_{kj}. \end{cases} \quad (1)$$

凡不满足式(1)的噪声序列称为有色噪声序列^[2-3]. 目

前针对CKF展开的研究大都假设系统的量测噪声统计特性如式(1)所示^[4-9]. 而机动目标跟踪中, 当雷达的数据采样率较高时, 比如在量测采样频率高于0.2 Hz的边扫描边跟踪雷达系统或在连续跟踪雷达系统中, 其量测噪声的时间相关性不可忽略^[10]. 上述情况中, 量测噪声已不再满足式(1), 为有色噪声. 又因为CKF算法本质是一种近似线性最小方差估计的次优滤波算法^[1]. 而根据标准卡尔曼滤波算法原理可知, 只有当过程和量测噪声全为白噪声序列时, 标准卡尔曼滤波器才能保持为线性最小方差估计的最优滤波算法^[2-3]. 因此, 有色量测噪声条件下, CKF算法滤波精度必然会受到影响. 如果受到影响, CKF如何改进, 文献[1]并未讨论.

国内外非白噪声条件下非线性滤波算法主要分为

以下3类. 第1类将对系统噪声的统计特性无要求的理论和非线性滤波方法结合形成各种非线性滤波方法, 例如Li W. L.等提出无迹 H_∞ 滤波算法, 并应用于分散信息融合系统^[11]; 第2类将各种自适应滤波理论和非线性滤波方法结合, 实时更新噪声统计参数或滤波模型参数, 如Li W.等将强跟踪滤波器应用于有色噪声条件下的非线性时变系统^[12], 赵琳等提出的自适应UKF算法^[13]; 第3类利用有色噪声模型白化有色量测噪声后, 再进行非线性滤波. 例如熊伟、王小旭等利用一阶马尔科夫有色噪声模型, 提出了有色量测噪声条件下的UKF算法^[14-15].

目前专门针对有色噪声条件下的改进CKF算法的研究尚未见到. 而其他非标准白噪声条件下的改进CKF算法的研究主要属于上述的第1类和第2类方法: 丁家琳等将Sage-Husa极大后验估值器与标准CKF算法相结合, 在线估计和修正不准确或未知的噪声的统计特性^[16]; 史岳鹏等通过在新息协防差的平方根矩阵和状态量测互协方差矩阵中引入自适应因子自适应减小不确定性的系统噪声对标准容积卡尔曼滤波的影响^[17]; 当量测噪声和过程噪声统计相关时, 由于新息协方差难于计算或线性化近似的误差较大, Ge Q. B.等为避免计算新息协方差, 将标准CKF算法转化为基于相关噪声的容积信息滤波器^[18]; Chandra等为处理非高斯噪声背景下非线性系统的滤波问题, 将标准CKF引入非线性 H_∞ 滤波器框架, 提出容积 H_∞ 滤波器^[19]. 这些改进CKF算法的性能各有所长, 但基本上只是已有的线性滤波技术在CKF算法上的应用, 并未从高斯域的贝叶斯滤波器的角度, 在本质上探讨非标准白噪声对CKF造成的影响.

因此本文根据标准CKF算法的推导过程, 重新推导两种在白色和有色量测噪声条件下均可使用的改进CKF算法. 本文后续部分内容安排如下: 第1部分建立有色量测噪声条件下的非线性离散随机系统的动态模型, 并定义模型中的各参数. 第2部分利用一阶马尔科夫有色噪声模型将有色量测噪声条件下的非线性离散随机系统转化为标准白噪声条件下的非线性时滞随机系统. 第3部分在高斯域推导该时滞系统的贝叶斯滤波框架. 第4部分利用3度Spherical-Radial准则, 将所推导的贝叶斯滤波框架转化为有色量测噪声条件下的改进CKF和其平方根形式. 第5部分将本文提出有色量测噪声条件下的改进CKF及其平方根形式和文献[1]提出的标准CKF、标准平方根CKF在机动目标仿真试验中进行性能比较, 并分析仿真结果, 最后得到研究结论.

2 问题陈述(Problem formulation)

2.1 系统描述(System description)

考虑如下一类非线性离散随机系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\omega}_k, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ 为第 k 次采样的系统状态向量; $\mathbf{f}(\cdot)$ 和 $\mathbf{h}(\cdot)$ 分别为非线性系统函数和量测函数; $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ 为量测向量; \mathbf{v}_{k-1} 为独立的高斯系统过程噪声序列, 且其均值和方差满足

$$E(\mathbf{v}_{k-1}) = \mathbf{q}_{k-1}, \text{cov}(\mathbf{v}_{k-1}) = \mathbf{Q}_{k-1}, \quad (3)$$

$\boldsymbol{\omega}_k$ 为有色量测噪声序列, 可用一阶马尔科夫序列描述^[2-3, 10, 14-15]

$$\boldsymbol{\omega}_k = \phi_{k,k-1} \boldsymbol{\omega}_{k-1} + \boldsymbol{\xi}_{k-1}, \quad (4)$$

其中相关系数

$$\phi_{k,k-1} = \exp(-\beta T), 0 \leq \phi_{k,k-1} \leq 1. \quad (5)$$

式(5)中 β 为反相关时间, T 为采样时间间隔. 式(4)中 $\boldsymbol{\xi}_{k-1}$ 为与 \mathbf{v}_{k-1} 不相关的高斯白噪声序列, 且方差 \mathbf{R}_{k-1} 满足

$$\mathbf{R}_{k-1} = \text{cov}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}) = \frac{1}{2\beta} (1 - \phi_{k,k-1}^2) \mathbf{r}_\xi, \quad (6)$$

其中 \mathbf{r}_ξ 是对应连续一阶马尔科夫过程中激励噪声 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 的方差强度. 初始状态 \mathbf{x}_0 与 \mathbf{v}_k , $\boldsymbol{\omega}_k$ 互不相关, 且其均值和相应误差协方差满足

$$E(\mathbf{x}_0) = \hat{\mathbf{x}}_{0|0}, \text{cov}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{P}_{0|0}. \quad (7)$$

2.2 问题分析(Problem analysis)

为保证量测噪声始终为白噪声序列, 在滤波之前必须预白化有色量测噪声 $\boldsymbol{\omega}_k$. 由于状态增广法会使式(2)系统新量测噪声的方差矩阵为零矩阵, 使滤波无法继续. 因此有色量测噪声白化常用的处理方法为观测增广法(差分法). 通过增广观测向量 \mathbf{z}_k , 量测函数 $\mathbf{h}(\cdot)$ 和量测噪声 $\boldsymbol{\omega}_k$, 将系统(2)中量测方程转化成新的量测方程(8):

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{h}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k) - \phi_{k+1,k} \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \\ &\quad \phi_{k+1,k} \mathbf{z}_k + \boldsymbol{\xi}_k, \end{aligned} \quad (8)$$

其中因为 $\mathbf{h}(\cdot)$ 为非线性函数, 则利用扩展卡尔曼滤波器中的线性化方法, 分别得到解析表达式 $\mathbf{h}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k) \approx \mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k)$ 和 $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_k$, 于是可将式(8)转化为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{H}_{k+1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k) - \phi_{k+1,k} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_k + \\ &\quad \phi_{k+1,k} \mathbf{z}_k + \boldsymbol{\xi}_k, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{H}_{k+1} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right|_{\mathbf{x}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}$. 若设

$$\begin{cases} \check{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_{k+1} - \phi_{k+1,k} \mathbf{z}_k, \\ \boldsymbol{\omega}_k^* = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\xi}_k, \\ \mathbf{h}^*(\mathbf{x}_k) = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \phi_{k+1,k} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_k. \end{cases} \quad (10)$$

方程(9)被转化为量测方程的标准形式(11):

$$\tilde{z}_k = \mathbf{h}^*(\mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\omega}_k^*. \quad (11)$$

根据式(11), 可得新量测噪声 $\boldsymbol{\omega}_k^*$ 的均值、方差分别为

$$\begin{cases} E[\boldsymbol{\omega}_k^*] = \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{q}_k, \\ E[(\boldsymbol{\omega}_k^* - \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{q}_k)(\boldsymbol{\omega}_j^* - \mathbf{H}_{j+1}\mathbf{q}_j)^\top] = \\ \mathbf{H}_{k+1}E[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^\top]\mathbf{H}_{j+1}^\top + \mathbf{R}_k - \mathbf{H}_{k+1}\mathbf{q}_k\mathbf{q}_j^\top\mathbf{H}_{j+1}^\top, \end{cases} \quad (12)$$

$\boldsymbol{\omega}_k^*$ 与系统过程噪声 \mathbf{v}_k 的互协方差函数为

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}_k(\boldsymbol{\omega}_j^* - \mathbf{H}_{j+1}\mathbf{q}_j)^\top] &= \\ E[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_j^\top]\mathbf{H}_{j+1}^\top - \mathbf{q}_k\mathbf{q}_j^\top\mathbf{H}_{j+1}^\top. \end{aligned} \quad (13)$$

由式(12)–(13)可知由于 $\boldsymbol{\omega}_k^*$ 的均值不为0, 方差取决于过程噪声 \mathbf{v}_k , 因此 $\boldsymbol{\omega}_k^*$ 仍为有色噪声, 且与过程噪声 \mathbf{v}_k 相关. 可见对系统(2), 若采用标准量测增广法, 在白化过程中会引入雅可比矩阵的计算, 且白化后的量测噪声会与过程噪声相关, 后续还要进行噪声的去相关运算.

因此对系统(2), 采用标准量测增广法并不可行, 需要采用新的白化方法. 如何在保持CKF算法无微分运算的优点的前提下, 获得有色和白色量测噪声条件下均具有较高滤波精度的有色量测噪声条件下的CKF算法(CKF with colored measurement noise, CKF-CMN)是本文要研究的问题.

3 有色噪声的白化方法(Colored noise whitening method)

本节应用文献[15]的改进观测增广法来实现有色量测噪声的白化. 根据式(2)和式(4)可得

$$\mathbf{z}_k^* = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) - \phi_{k,k-1}\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1}) + \boldsymbol{\xi}_{k-1}, \quad (14)$$

其中 $\mathbf{z}_k^* = \mathbf{z}_k - \phi_{k,k-1}\mathbf{z}_{k-1}$ 为将白化有色量测噪声后得到的第 k 次采样的量测向量. 将系统(2)中的过程噪声向量 \mathbf{v}_k 转化为

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{q}_k + \boldsymbol{\mu}_k, \quad (15)$$

其中 $\boldsymbol{\mu}_k$ 为与 $\boldsymbol{\xi}_k$ 不相关的高斯白噪声序列, 且 $\text{cov}(\boldsymbol{\mu}_k) = \mathbf{Q}_k$. 于是系统(2)转化成标准白噪声背景下的非线性时滞系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}_{k-1} + \boldsymbol{\mu}_{k-1}, \\ \mathbf{z}_k^* = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) - \phi_{k,k-1}\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1}) + \boldsymbol{\xi}_{k-1}, \end{cases} \quad (16)$$

其中初始状态 \mathbf{x}_0 与对应的过程和量测噪声初值 $\boldsymbol{\mu}_0$, $\boldsymbol{\xi}_0$ 互不相关. 若设系统(2)量测向量序列为 $\mathbf{Z}_k = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k\}$, 则标准白噪声条件下的非线性时滞系统(16)的量测向量序列 $\mathbf{Z}_k^* = \{\mathbf{z}_1^*, \mathbf{z}_2^*, \dots, \mathbf{z}_k^*\} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 - \phi_{2,1}\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k - \phi_{k,k-1}\mathbf{z}_{k-1}\}$. 因此, 系统(2)的CKF-CMN算法设计问题就转化为基于系统(16)和量测信息 \mathbf{Z}_k^* 的CKF算法设计问题.

4 高斯域的非线性时滞系统的贝叶斯滤波(Bayesian filtering for nonlinear time-delay system in Gaussian domain)

根据文献[1]的方法, 3度Spherical-Radial容积准则的应用, 需先推导出式(16)对应的高斯滤波器的积分形式. 此时假设似然函数 $p(\mathbf{z}_k^*|\mathbf{Z}_{k-1}^*)$ 、先验概率密度 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_{k-1}^*)$ 均服从高斯分布, 则可知后验概率密度 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k^*)$ 也服从高斯分布, 即

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1}^*) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}), \\ p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_{k-1}^*) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}), \\ p(\mathbf{z}_k^*|\mathbf{Z}_{k-1}^*) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^*; \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^*, \mathbf{P}_{\mathbf{z}_{k,k}^*|k-1}), \\ p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_k^*) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}), \end{cases} \quad (17)$$

其中: $\mathcal{N}(\mathbf{l}; \mathbf{m}, \mathbf{P})$ 为高斯概率密度函数, 若随机变量为 \mathbf{l} , 则其均值为 \mathbf{m} , 对应协方差为 \mathbf{P} . 根据非线性时滞系统(16)自身特点, 基于白噪声的非线性时滞系统的高斯滤波器的积分表达式具体可通过以下步骤实现:

1) 时间更新.

假设 $k-1$ 时刻的概率分布 $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1}^*)$ 及 $\boldsymbol{\mu}_{k-1}$ 的方差和均值均已知, 根据Chapman-Komolgorov等式可得到 k 时刻的状态预测值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 及其协方差 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 的积分表达式为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= E[\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ &\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) \times \\ &\mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})d\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{q}_{k-1}, \quad (18) \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \\ &E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^\top|\mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ &\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{f}^\top(\mathbf{x}_{k-1}) \times \\ &\mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})d\mathbf{x}_{k-1} - \\ &(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{q}_{k-1})(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{q}_{k-1})^\top + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (19) \end{aligned}$$

在系统(16)中, 量测 \mathbf{z}_k^* 是 \mathbf{x}_k 和 \mathbf{x}_{k-1} 的函数, 为了便于简化后续计算过程的表示, 对状态向量进行扩维, 构造一个新的状态变量如式(20)所示:

$$\mathbf{x}_k^e = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

2) 量测更新.

根据系统(16)的量测方程和式(17), 可得预测量测值 $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^*$ 的积分表达式(21):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^* &= E[\mathbf{z}_k^*|\mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ &\int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \times \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})d\mathbf{x}_k - \\ &\phi_{k,k-1} \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1}) \times \end{aligned}$$

$$N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (21)$$

且预测量测的自协方差 $\mathbf{P}_{z_k^*, k|k-1}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{z_k^*, k|k-1} = \\ E[(z_k^* - \hat{z}_{k|k-1}^*) \times (z_k^* - \hat{z}_{k|k-1}^*)^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*]. \end{aligned} \quad (22)$$

若将系统(16)的量测函数记作 $\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) - \phi_{k,k-1}\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})$, 则根据式(14)可得

$$z_k^* = \mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e) + \xi_{k-1}, \quad (23)$$

则有

$$\begin{aligned} z_k^* - \hat{z}_{k|k-1}^* = \\ \mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e) - E[\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e) | \mathbf{Z}_{k-1}^*] + \xi_{k-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

再根据式(22)–(24)得到预测量测的自协方差 $\mathbf{P}_{z_k^*, k|k-1}$ 的积分表达式如式(25)所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{z_k^*, k|k-1} = \\ E[\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e)(\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e))^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] - \\ \hat{z}_{k|k-1}^* (\hat{z}_{k|k-1}^*)^T + \mathbf{R}_{k-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

由于 $\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e)$ 中同时包含状态向量 \mathbf{x}_k 和 \mathbf{x}_{k-1} , 为了更准确地利用容积准则, 需将式(25)中包含 $\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e)$ 的项进一步展开为式(26)–(29):

$$\begin{aligned} E[\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e)(\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e))^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] + \\ \phi_{k,k-1}^2 E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] - \\ \phi_{k,k-1} E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})^T + \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*], \end{aligned} \quad (26)$$

其中:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^T N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})d\mathbf{x}_k, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})^T \times \\ N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})d\mathbf{x}_{k-1}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} E[\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})^T + \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ \int_{\mathbb{R}^{n_x}} [\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})^T + \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)^T] \times \\ N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})d\mathbf{x}_{k-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

由于 \mathbf{x}_k 与 ξ_{k-1} 互不相关, 若设 $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, $\tilde{z}_k^* = z_k^* - \hat{z}_{k|k-1}^*$, 则可得 \mathbf{x}_k 和 z_k^* 的预测互协方差 $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k z_k^*, k|k-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k z_k^*, k|k-1} = \\ E[\tilde{\mathbf{x}}_k(\tilde{z}_k^*)^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ E[\mathbf{x}_k(\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e))^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}(\hat{z}_{k|k-1}^*)^T, \end{aligned} \quad (30)$$

$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k z_k^*, k|k-1}$ 也包含 $\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e)$ 的项, 因此需将积分表达式类似式(26)–(29)展开, 如式(31)–(33)所示:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}_k \mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e)^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ E[\mathbf{x}_k(\mathbf{h}(\mathbf{x}_k))^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] - \\ \phi_{k,k-1} E[(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}_{k-1})(\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1}))^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}_k(\mathbf{h}(\mathbf{x}_k))^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}_k(\mathbf{h}(\mathbf{x}_k))^T N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})d\mathbf{x}_k, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}_{k-1})\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ \int_{\mathbb{R}^{n_x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}_{k-1})\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})^T \times \\ N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})d\mathbf{x}_{k-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

在测定新的量测值 z_k^* 之后, 根据式(18)–(19)(21)(25)–(33), 再利用式(34)–(35)依次计算 k 时刻的状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和对应的误差协方差 $\mathbf{P}_{k|k}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(z_k^* - \hat{z}_{k|k-1}^*), \\ \mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{z_k^*, k|k-1} \mathbf{K}_k^T, \end{aligned} \quad (34)$$

其中滤波增益

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k z_k^*, k|k-1} \mathbf{P}_{z_k^*, k|k-1}^{-1}. \quad (35)$$

式(18)–(35)构成系统(16)的高斯域的贝叶斯滤波器框架, 即有色量测噪声条件下高斯滤波器. 因为CKF-CMN和标准CKF都是基于对应高斯滤波器应用3度Spherical-Radial容积准则得到, 所以比较式(18)–(35)与文献[1]中白噪声条件下的高斯滤波器, 即可得到这两种算法的本质区别.

有色量测噪声的预白化将 $k-1$ 时刻量测噪声对 k 时刻量测噪声造成的影响转化为相关系数 $\phi_{k,k-1}$ 和 $k-1$ 时刻系统状态和量测值对 k 时刻的量测函数 $\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e)$ 和量测值 z_k^* 的影响. 该影响被白噪声条件下的非线性时滞系统的高斯滤波器直接体现在量测更新过程中对预测量测值 $\hat{z}_{k|k-1}^*$, 预测量测协方差 $\mathbf{P}_{z_k^*, k|k-1}$ 和观测互协方差 $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k z_k^*, k|k-1}$ 的求取上, 并通过这3个参数间接影响 k 时刻的状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和相应误差协方差 $\mathbf{P}_{k|k}$.

当 $\phi_{k,k-1} = 0$ 时, 根据式(4)可知, 此时量测噪声 ω_k 为白噪声, 由上述3参数的滤波表达式(21)–(33)可见, 各式中包含相关系数 $\phi_{k,k-1}$ 的积分项都会变为0, 此时式(21)–(33)变的和文献[1]中标准白噪声条件下高斯滤波器表达式完全相同. 因此分别基于这两种高斯滤波器的CKF-CMN与标准CKF在白噪声条件下滤波精度也应完全相同, 后面的仿真试验会进一步证明该结论.

当 $\phi_{k,k-1} \neq 0$ 时, 根据式(4)可知, 此时量测噪声 ω_k 为有色噪声. 随着相关系数 $\phi_{k,k-1}$ 的增大, 量测噪

声 ω_k 的相关性也随之增强, 这种相关性的增强通过 $\phi_{k,k-1}$ 传递到 k 时刻的量测函数 $\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e)$ 和量测值 z_k^* 上. 并最终使非线性时滞系统的高斯滤波器在保持过程噪声和量测噪声均为白噪声的前提下, 将色噪声的相关性体现在对系统状态 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和对应协方差 $\mathbf{P}_{k|k}$ 的估计上. 而标准白噪声条件下的非线性高斯滤波器在不进行噪声预白化的前提下, 在有色量测噪声条件下无法保持其近似线性最小方差的估计精度. 因此有色量测噪声条件下, CKF-CMN 的滤波精度应优于标准 CKF, 后面的仿真实验同样会证明该结论.

5 有色量测噪声条件下的 CKF 算法 (Cubature Kalman filter with colored measurement noise)

5.1 求容积准则和积分变换 (Cubature rule and integral transformation)

文献[1]中的 CKF 算法是基于高斯假设的迭代贝叶斯估计的框架, 根据 3 度 Spherical-Radial 求容积准则, 产生 $2n$ 个等权值的容积点 $\{w_i, \mathbf{A}_i\}$ 来逼近标准的高斯域加权积分. 由此, 非线性函数与高斯概率密度的积分求解问题被转化为容积点的求和问题. 具体转化过程如式(36)所示:

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; 0, \mathbf{I}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{2n} w_i f(\mathbf{A}_i), \quad (36)$$

其中: $I(f)$ 为所求积分, $f(\mathbf{x})$ 为任意函数, \mathbb{R}^n 为积分域. 容积点集 $\{w_i, \mathbf{A}_i\}$ 的取值根据下式进行:

$$\begin{cases} w_i = 1/m, i = 1, 2, \dots, m, m = 2n, \\ \mathbf{A}_i = \sqrt{m/2} [\mathbf{l}]_i, \end{cases} \quad (37)$$

其中: \mathbf{A}_i 为容积点向量, w_i 为对应权重, n 为系统状态向量 \mathbf{x} 的维数, $[\mathbf{l}] \in \mathbb{R}^n$ 为生成算子, 以 $n = 2$ 为例, $[\mathbf{l}]_i$ 表示式(38)所示生成算子的第 i 列元素:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (38)$$

5.2 有色量测噪声条件下的 CKF (Cubature Kalman filter with colored measurement noise)

根据式(18)–(19)(21)(25)–(35), 利用 3 度 Spherical-Radial 准则, 白噪声条件下的非线性时滞系统的高斯滤波器被转化为 CKF-CMN 算法. CKF-CMN 算法可分为时间更新、量测更新两步:

1) 时间更新.

预测更新状态向量 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ 和预测误差协方差 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 分别如下所示:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{i,k|k-1}^*, \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{i,k|k-1}^* (\mathbf{X}_{i,k|k-1}^*)^T - \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (39)$$

预测容积点 $\mathbf{X}_{i,k|k-1}^*$ 通过分解 $k-1$ 时刻的误差协方差得到:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} (\mathbf{S}_{k-1|k-1})^T, \\ \mathbf{X}_{i,k-1|k-1} = \mathbf{S}_{k-1|k-1} \mathbf{A}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \\ \mathbf{X}_{i,k|k-1}^* = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}) + \mathbf{q}_{k-1}, \end{cases} \quad (40)$$

其中 $k-1$ 时刻的协方差 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 的分解可采用乔列斯基分解或者奇异值分解方法.

2) 量测更新.

分别按照式(34)–(35)计算滤波增益 \mathbf{K}_k , 更新 k 时刻状态向量 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 和误差协方差 $\mathbf{P}_{k|k}$. 其中预测量测值 $\hat{z}_{k|k-1}^*$ 如下式所示:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} (\mathbf{S}_{k|k-1})^T, \\ \mathbf{X}_{i,k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1} \mathbf{A}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \\ \mathbf{Z}_{i,k|k-1}^* = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k|k-1}) - \phi_{k,k-1} \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}), \\ \hat{z}_{k|k-1}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{Z}_{i,k|k-1}^*. \end{cases} \quad (41)$$

式(41)中 k 时刻的预测误差协方差 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 的分解同样可采用乔列斯基分解或者奇异值分解方法.

式(35)中量测误差协方差 $\mathbf{P}_{z_k^*,k|k-1}$ 如式(42)所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{z_k^*,k|k-1} &= \\ & \mathbf{E}[\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e) (\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e))^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] - \\ & \hat{z}_{k|k-1}^* (\hat{z}_{k|k-1}^*)^T + \mathbf{R}_{k-1}, \end{aligned} \quad (42)$$

其中

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e) (\mathbf{h}'(\mathbf{x}_k^e))^T | \mathbf{Z}_{k-1}^*] = \\ & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k|k-1}) \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k|k-1})^T + \\ & \frac{\phi_{k,k-1}^2}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}) \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1})^T - \\ & \frac{\phi_{k,k-1}}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k|k-1}^*) \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1})^T - \\ & \frac{\phi_{k,k-1}}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}) \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k|k-1}^*)^T. \end{aligned} \quad (43)$$

式(35)中量测预测互协方差 $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k z_k^*,k|k-1}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k z_k^*,k|k-1} &= \\ & \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{i,k|k-1} \mathbf{h}^T(\mathbf{X}_{i,k|k-1}) - \\ & \frac{\phi_{k,k-1}}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{i,k|k-1}^* \mathbf{h}^T(\mathbf{X}_{i,k-1|k-1}) - \\ & \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} (\hat{z}_{k|k-1}^*)^T. \end{aligned} \quad (44)$$

5.3 有色量测噪声条件下的平方根CKF (Square root cubature Kalman filter with colored measurement noise)

为了进一步提高CKF-CMN算法的数值稳定性,采用稳定性更高的平方根求容积卡尔曼滤波器(square root cubature Kalman filter, SCKF)算法代替CKF算法构成有色量测噪声条件下的改进平方根求容积卡尔曼滤波器(SCKF with colored measurement noise, SCKF-CMN)算法。

根据文献[1]中SCKF推导过程可知, SCKF与CKF递推的本质区别在于SCKF的递推过程传递的是预测和后验误差协方差的平方根因子矩阵. SCKF中的协方差的分解主要利用了如下定理1.

定理1 任意一个对称的非负定矩阵 P 都可实现如下三角分解:

$$P = SS^T, \quad (45)$$

其中下三角矩阵 S 为 P 的分块平方根转置矩阵 U^T 的QR分解中上三角矩阵 R 的转置矩阵.

证 步骤1 首先,假设 $U = [C \ V]$,并对 U^T 进行QR分解:

当 $U^T = QR$,其中: Q 为正交矩阵, R 为上三角矩阵,则可得 $U = R^T Q^T$.

步骤2 已知

$$P = UU^T = [C \ V] \begin{bmatrix} C^T \\ V^T \end{bmatrix}. \quad (46)$$

步骤3 得到

$$P = UU^T = R^T Q^T QR = R^T R = SS^T. \quad (47)$$

定理1得证.

有色量测噪声背景下的SCKF-CMN算法递推过程同样分为两步,如下所示:

1) 时间更新.

① 根据式(39)–(40)计算,预测状态容积点 $X_{i,k|k-1}^*$ 和估计预测状态 $\hat{x}_{k|k-1}$.

② 根据定理1,对预测误差协方差的平方根因子矩阵进行QR分解.根据式(19)和式(40)可知:若设预测误差协方差

$$P_{k|k-1} = \chi_{k|k-1}^* (\chi_{k|k-1}^*)^T, \quad (48)$$

其中

$$\chi_{k|k-1}^* = \frac{1}{\sqrt{m}} [X_{1,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1} \quad X_{2,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1} \quad \cdots \\ X_{m,k|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1} \quad \sqrt{m} S_{Q,k-1}], \quad (49)$$

其中系统噪声方差 $Q_{k-1} = S_{Q,k-1} S_{Q,k-1}^T$ 则预测误

差协方差 $P_{k|k-1}$ 的平方根因子 $S_{k|k-1}$ 为

$$S_{k|k-1} = [\text{Tria}((\chi_{k|k-1}^*)^T)]^T, \quad (50)$$

其中 $\text{Tria}(\cdot)$ 表示矩阵QR分解,并得到上三角矩阵.

2) 量测更新.

① 按照式(41)估计容积点 $X_{i,k|k-1}$,预测量测容积点 $Z_{i,k|k-1}^*$ 以及预测量测值 $\hat{z}_{k|k-1}^*$.

② 根据式(51)–(53),估计新息协方差矩阵的平方根因子 $S_{z_k^*,k|k-1}$.

为简化计算,取 $X_{i,k|k-1}^* \approx X_{i,k|k-1}$,这样量测预测自协方差分解为

$$P_{z_k^*,k|k-1}^* = \zeta_{k|k-1}^* (\zeta_{k|k-1}^*)^T, \quad (51)$$

其中

$$\zeta_{k|k-1}^* = \frac{1}{\sqrt{m}} [Z_{1,k|k-1}^* - \hat{z}_{k|k-1}^* \quad Z_{2,k|k-1}^* - \hat{z}_{k|k-1}^* \\ \cdots \quad Z_{m,k|k-1}^* - \hat{z}_{k|k-1}^* \quad \sqrt{m} S_{R,k-1}], \quad (52)$$

其中量测噪声方差 $R_{k-1} = S_{R,k-1} S_{R,k-1}^T$,则新息协方差 $P_{z_k^*,k|k-1}^*$ 的平方根因子为

$$S_{z_k^*,k|k-1}^* = [\text{Tria}((\zeta_{k|k-1}^*)^T)]^T. \quad (53)$$

③ 与 $S_{z_k^*,k|k-1}^*$ 定义类似,取 $X_{i,k|k-1}^* \approx X_{i,k|k-1}$,则可得 $P_{x_k z_k^*,k|k-1}$ 为

$$P_{x_k z_k^*,k|k-1} = \chi_{k|k-1} \zeta_{k|k-1}^T, \quad (54)$$

其中:

$$\chi_{k|k-1} = \frac{1}{\sqrt{m}} [X_{1,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1} \quad X_{2,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1} \\ \cdots \quad X_{m,k|k-1} - \hat{x}_{k|k-1}], \quad (55)$$

$$\zeta_{k|k-1} = \frac{1}{\sqrt{m}} [Z_{1,k|k-1}^* - \hat{z}_{k|k-1}^* \quad Z_{2,k|k-1}^* - \hat{z}_{k|k-1}^* \\ \cdots \quad Z_{m,k|k-1}^* - \hat{z}_{k|k-1}^*]. \quad (56)$$

④ 滤波增益为

$$K_k = (P_{x_k z_k^*,k|k-1} / S_{z_k^*,k|k-1}^T) / S_{z_k^*,k|k-1}. \quad (57)$$

⑤ 根据新的观测值 z_k^* ,滤波增益 K_k ,预测量测值 $\hat{z}_{k|k-1}^*$ 和状态向量预测值 $\hat{x}_{k|k-1}$,按照式(34)更新状态向量 $\hat{x}_{k|k}$.

⑥ 更新误差协方差的平方根因子 $S_{k|k}$:

$$S_{k|k} = [\text{Tria}([\chi_{k|k-1} - K_k \zeta_{k|k-1} \quad K_k S_{R,k-1}])^T]^T. \quad (58)$$

通过以上推导过程可看出,与SCKF算法相比,由于有色量测噪声的作用,SCKF-CMN算法与SCKF算

法的区别应在量测更新部分. 因为取 $\mathbf{X}_{i,k|k-1}^* \approx \mathbf{X}_{i,k|k-1}$, 所以SCKF-CMN算法和SCKF算法的区别不大, 主要区别是量测容积点 $\mathbf{Z}_{i,k|k-1}^*$ 通过量测容积点传递上一个时刻量测噪声的相关性. 由于SCKF-CMN算法做了近似处理, 所以在滤波精度上SCKF-CMN算法应该会差于CKF-CMN.

6 数值仿真(Numerical simulations)

6.1 仿真模型(Simulation model)

将CKF-CMN, SCKF-CMN, CKF, SCKF算法分别应用于有色量测噪声背景下的同一个经典空中机动目标跟踪问题, 用于比较以上这4种算法的跟踪精度和鲁棒性^[1].

二维情况下, 设雷达观测站位于坐标原点, 目标在水平平面按照恒定转向速度进行转向机动. 转向速率未知, 系统方程描述如式(59):

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega} & 0 & -\left(\frac{1 - \cos(\Omega T)}{\Omega}\right) \\ 0 & \cos(\Omega T) & 0 & -\sin(\Omega T) \\ 0 & \frac{1 - \cos(\Omega T)}{\Omega} & 1 & \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega} \\ 0 & \sin(\Omega T) & 0 & \cos(\Omega T) \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1}, \quad (59)$$

其中: 目标的状态向量 $\mathbf{x}_k = (x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k)^T$; x_k 和 y_k 分别表示 x 和 y 方向上目标的位置, 而 \dot{x}_k 和 \dot{y}_k 则分别表示 x 和 y 方向上目标的速度; T 为采样时间间隔; 过程噪声 \mathbf{v}_k 为高斯白噪声, 其统计特性为

$$\mathbf{q}_{k-1} = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T, \quad (60)$$

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \text{diag}\{\eta_1 \mathbf{M}, \eta_1 \mathbf{M}\},$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} T^3/3 & T^2/2 \\ T^2/2 & T \end{bmatrix}. \quad (61)$$

根据雷达测站的位置, 可得目标的距离 r_k 和方位 θ_k . 因此, 观测方程为

$$\begin{pmatrix} r_k \\ \theta_k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \\ \tan^{-1}\left(\frac{y_k}{x_k}\right) \end{bmatrix} + \boldsymbol{\omega}_k, \quad (62)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_k$ 为有色噪声序列, 此时可利用式(4)对其建模, 且对应白噪声序列 $\boldsymbol{\xi}_{k-1}$ 的均值为0, 方差 \mathbf{R}_{k-1} 满足

$$\text{cov}(\boldsymbol{\xi}_{k-1}) = \mathbf{R}_{k-1} = \text{diag}\{1600 \text{ m}^2, 200 \text{ m} \cdot \text{rad}^2\}.$$

式(59)–(62)各参数为

$$T = 1 \text{ s}, \eta_1 = 0.1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}, \Omega = -3 (\text{ }^\circ) \cdot \text{s}^{-1}. \quad (63)$$

初始状态及相应协方差为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 = [1000 \text{ m} \ 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \ 1000 \text{ m} \ 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}]^T, \\ \mathbf{P}_{0|0} = \text{diag}\{100 \text{ m}^2, 10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}, 100 \text{ m}^2, 10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}\}. \end{cases} \quad (64)$$

由式(59)–(62)可知, 该目标跟踪模型是一强非线性的估计问题. 该目标跟踪模型是一强非线性的估计问题. 初始估计状态 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0} \sim \mathcal{N}(\mathbf{x}_0, \mathbf{P}_{0|0})$. 初始状态和初始数据如式(63)–(64)所示, 得到目标的真实运动轨迹如图1所示.

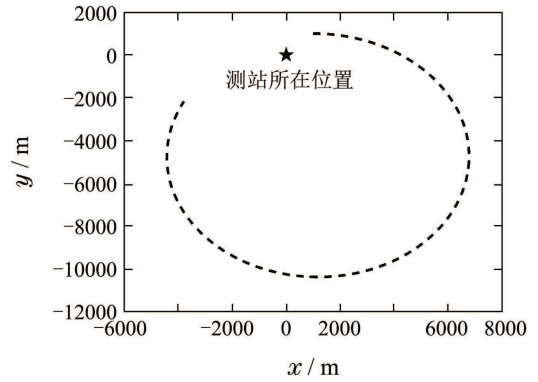


图1 目标真实运动轨迹

Fig. 1 Target true trajectory

6.2 算例分析(Example analysis)

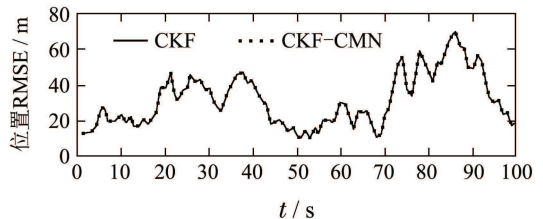
各个算法在不同仿真场景中分别进行150次独立蒙特卡罗仿真. 性能比较以均方根误差(mean square error, RMSE)作为指标. 其中时刻 k 的位置RMSE的定义如下:

$$\text{RMSE}_{\text{pos},k} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N ((x_k - \hat{x}_k^n)^2 + (y_k - \hat{y}_k^n)^2)},$$

其中: (x_k, y_k) 和 $(\hat{x}_k^n, \hat{y}_k^n)$ 分别为第 k 次采样目标位置的真正值和第 n 次蒙特卡洛仿真的第 k 次采样目标位置的估计值, N 为蒙特卡洛仿真次数, 速度RMSE的定义与此类似.

场景1 白色量测噪声背景.

考虑理想情况, 认为在采样时间间隔 $T = 1 \text{ s}$ 时, 量测噪声为理想白噪声, 即设 $\phi_{k,k-1} = 0$. 根据式(4), 此时有色噪声模型 $\boldsymbol{\omega}_k$ 退化为白噪声 $\boldsymbol{\xi}_{k-1}$. 各算法的位置和速度RMSE比较曲线, 如图2和图3所示.



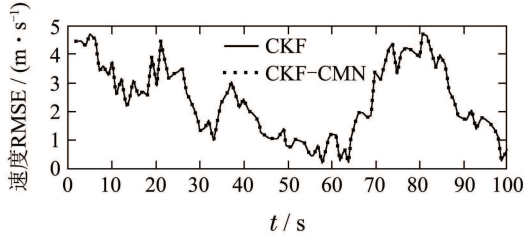


图2 场景1中CKF与CKF-CMN的位置与速度RMSE比较

Fig. 2 RMSEs in position and velocity of CKF and CKF-CMN in Scenario 1

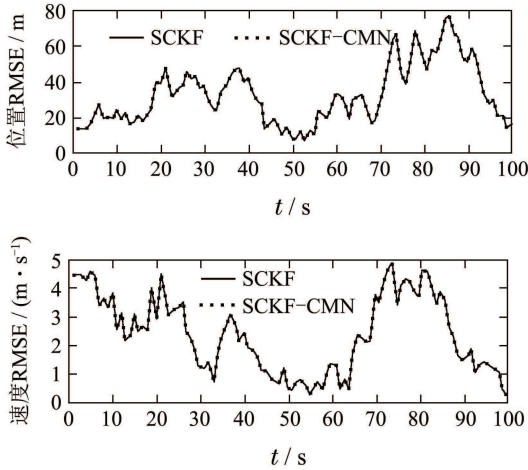


图3 场景1中SCKF与SCKF-CMN的位置与速度RMSE比较

Fig. 3 RMSEs in position and velocity of SCKF and SCKF-CMN in Scenario 1

表1 场景1中CKF, SCKF, CKF-CMN, SCKF-CMN的位置与速度RMSE均值比较

Table 1 RMSE means in position and velocity of CKF, SCKF, CKF-CMN and SCKF-CMN in Scenario 1

	位置RMSE 均值/m	速度RMSE 均值/(m·s ⁻¹)
CKF	31.3687	2.4062
CKF-CMN	31.3687	2.4062
SCKF	32.2231	2.3665
SCKF-CMN	32.2231	2.3665

由图2可见在相同量测白噪声背景下, CKF与CKF-CMN估计的位置、速度的RMSE曲线完全重合. 由图3可见SCKF和SCKF-CMN估计的位置、速度RMSE曲线完全重合. 再结合表1中这4种算法的RMSE均值比较结果, 可知在相同量测白噪声背景下, CKF-CMN, SCKF-CMN与对应的CKF, SCKF的估计精度完全相同. 此时, CKF-CMN, SCKF-CMN完全可以代替对应的CKF, SCKF.

场景2 有色量测噪声背景.

根据式(4), 有色噪声仿真场景中, 取采样时间间隔 $T = 0.1$ s, 相对于白噪声场景采样时间间隔减小10倍, 因此量测噪声的时间相关性大幅增加. 近似认为此时 $T \rightarrow 0$, 则根据式(5), 可得 $\phi_{k,k-1} \approx 1$, ω_k 为有色噪声序列. 初始值 ω_0 为服从任一正态分布的随机向量. CKF和SCKF采用有色噪声 ω_k 的等价协方差. 各算法的位置和速度的RMSE比较曲线, 如图4-5所示.

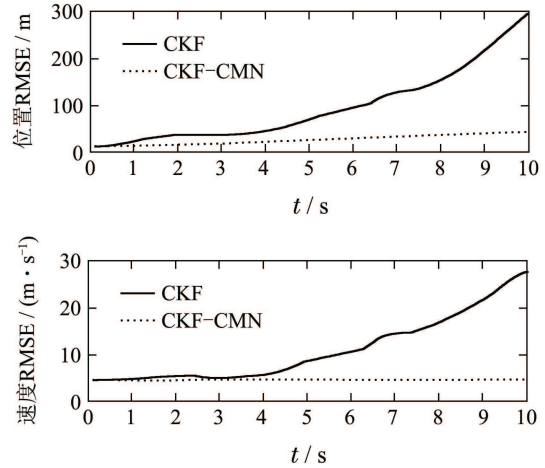


图4 场景2中CKF与CKF-CMN的位置与速度RMSE比较

Fig. 4 RMSEs in position and RMSEs in velocity of CKF and CKF-CMN in Scenario 2

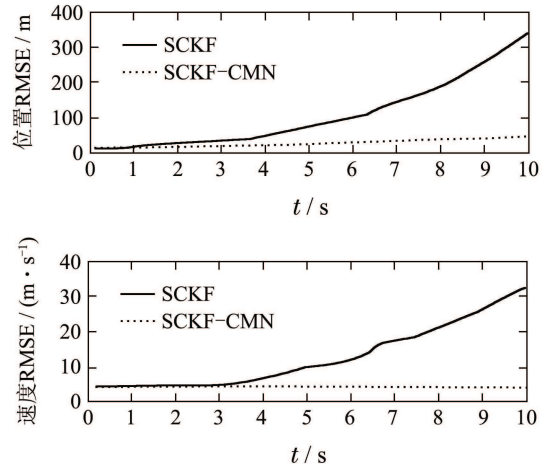


图5 场景2中SCKF与SCKF-CMN的位置与速度RMSE比较

Fig. 5 RMSEs in position and RMSEs in velocity of SCKF and SCKF-CMN in Scenario 2

由图4-5可见, 当 $\phi_{k,k-1} = 1.0$ 时, 有色噪声的相关性极强. CKF和SCKF算法的位置和速度跟踪精度在滤波开始阶段(CKF约在 $t = 4$ s之前, SCKF约在 $t = 3.5$ s之前)分别与对应CKF-CMN, SCKF-CMN相差不大. 随着滤波的进行, CKF和SCKF趋于发散, 而CKF-CMN和SCKF-CMN位置跟踪RMSE虽也有所增大, 但位置跟踪精度仍远远高于CKF和SCKF. 与位置跟踪相比, SCKF-CMN, CKF-CMN的速度RMSE较小, 基本稳定在4 m/s~5 m/s的范围内变化.

表 2 场景2中CKF, SCKF, CKF-CMN, SCKF-CMN的位置与速度RMSE均值比较

Table 2 RMSE means in position and velocity of CKF, SCKF, CKF-CMN and SCKF-CMN in Scenario 2

	位置RMSE 均值/m	速度RMSE 均值/(m · s ⁻¹)
CKF	97.4458	10.7794
CKF-CMN	27.2221	4.3666
SCKF	107.9743	12.5909
SCKF-CMN	27.3307	4.3920

由于SCKF-CMN采用了近似处理, 由表2可见, 场景2中CKF-CMN比SCKF-CMN的跟踪性能略好, 但两种改进算法都能有效减小有色噪声对滤波精度的影响。

场景 3 不同有色量测噪声背景比较.

由于位置跟踪在机动目标跟踪中最为重要, 所以取不同 $\phi_{k,k-1}$ 值的4种算法的位置跟踪RMSE均值比较, 如表3所示. 根据前文分析已知, 采样时间间隔 $T = 1$ s时, 实际量测噪声的相关性并不能忽略. 因此, 此时仍设采样时间间隔 $T = 1$ s. 由表3数据可知, 随着量测噪声相关系数增大, CKF和SCKF的位置RMSE均值逐渐增大, 且 $\phi_{k,k-1}$ 的值越大, 位置RMSE均值增大越多, 且SCKF比CKF算法对于 $\phi_{k,k-1}$ 值的增大更为敏感, 位置RMSE增大更多. 由此可见, SCKF算法虽然能够有效抑制滤波发散, 但在有色量测噪声条件下, 并不能提高滤波精度, 反而因为计算误差的影响, 会降低滤波精度. 由表3的数据还可看出, CKF-CMN的位置RMSE均值均小于CKF的位置跟踪的RMSE均值, 证明CKF-CMN在不同有色量测噪声条件下能有效改进CKF的位置跟踪精度, 但SCKF-CMN由于前文中的近似处理, 在 $\phi_{k,k-1} = 0.1$ 的跟踪精度还略差于SCKF算法, 直到 $\phi_{k,k-1} > 0.5$, SCKF-CMN的位置跟踪精度才优于SCKF算法.

表 3 场景3中 $\phi_{k,k-1}$ 取不同值, 4种算法的位置RMSE均值比较(m)

Table 3 RMSE means in position of four algorithms for different values of $\phi_{k,k-1}$ in Scenario 3

	0.1	0.3	0.6	0.9
CKF	34.6927	42.8874	69.2838	171.6135
CKF-CMN	33.9256	40.0834	56.6447	105.6947
SCKF	35.6876	44.4119	73.0351	203.6346
SCKF-CMN	35.763	44.7433	67.0735	112.3156

6.3 计算复杂性分析(Computational complexity)

为进一步评估所提出CKF-CMN和SCKF-CMN算法的计算性能. 利用MATLAB7.1将场景1和2在配

置Intel(R)Core(TM)i7-4500U 1.80 Ghz 4CPU处理器和8 G RAM的基于WIN8.1操作系统的计算机上实现, 并得到各算法的运行一次的平均CPU时间如表4所示.

表 4 场景1-2中CKF, SCKF, CKF-CMN, SCKF-CMN运行一次的平均CPU时间比较

Table 4 Average CPU time in one run of CKF, SCKF, CKF-CMN and SCKF-CMN in Scenario 1-2

	场景1/s	场景2/s
CKF	0.0241	0.0246
CKF-CMN	0.0322	0.0324
SCKF	0.0218	0.0219
SCKF-CMN	0.0232	0.0234

由表4可见场景1中, CKF-CMN在相关系数 $\phi_{k,k-1} = 0$ 时, 仍需按照式(41)-(44)求取预测观测容积点 $\mathbf{Z}_{i,k|k-1}^*$, 预测观测协方差 $\mathbf{P}_{\mathbf{z}_{i,k|k-1}^*}$ 和观测互协方差 $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{z}_{i,k|k-1}^*}$, 计算复杂性大为增加, 所以计算时间更长. 而由于SCKF-CMN仅在量测容积点 $\mathbf{Z}_{i,k|k-1}^*$ 的求取上比SCKF算法略有变化, 因此这两种算法的计算难易程度相当, 因此计算时间相差不大. 场景2中各算法在有色噪声条件下计算时间都有所增加. CKF-CMN和SCKF-CMN的平均计算时间仍然长于CKF和SCKF算法.

根据前面分析可知场景2中CKF-CMN算法和SCKF-CMN均可获得优于标准CKF和SCKF算法的滤波精度, 因此这两种改进算法实际通过增加计算复杂性来提高有色量测噪声条件下的滤波精度.

7 结论(Conclusions)

针对CKF和SCKF算法在有色量测噪声背景下的应用的局限性, 基于标准白噪声条件下的非线性时滞系统的高斯域贝叶斯滤波器和三度求容积准则的提出CKF-CMN和SCKF-CMN算法. 机动目标跟踪仿真结果表明, 在量测白噪声条件下, CKF-CMN和SCKF-CMN能获得与CKF和SCKF相同的滤波精度, 但计算复杂性增加; 在有色量测噪声背景下, CKF和SCKF的滤波误差均大大增加, 此时CKF-CMN的滤波精度优于CKF算法, 而SCKF-CMN滤波精度因为近似处理, 只有当 $\phi_{k,k-1} > 0.5$ 时, 才能取得优于SCKF的位置跟踪精度.

参考文献(References):

- [1] ARASARA I, HAYKIN S. Cubature Kalman filter [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1254 - 1260.
- [2] BAR-SHALOM Y, LI X R, KIRUBARAJAN T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software* [M]. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- [3] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.

- (QIN Yongyuan, ZHANG Hongyue, WANG Shuhua. *Principle of Kalman Filtering and Integrated Navigation* [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998.)
- [4] ARASARA I, HAYKIN S. Cubature Kalman smoothers [J]. *Automatica*, 2011, 47(10): 2245 – 2250.
- [5] ARASARA I, HAYKIN S. Cubature Kalman filtering for continuous-systems: theory and simulations [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(10): 1 – 17.
- [6] SUN F, TANG L J. Augmented and non-augmented cubature kalman filter: theory and simulations [J]. *Journal of Information & Computational Science*, 2012, 9(2): 437 – 450.
- [7] HAVLICEK M, FRISTON K J, JAN J, et al. Dynamic modeling of neuronal responses in fMRI using cubature Kalman filtering [J]. *NeuroImage*, 2011, 56(4): 2109 – 2128.
- [8] 魏喜庆, 宋申民. 无模型容积分卡尔曼滤波及其应用 [J]. 控制与决策, 2013, 28(5): 769 – 773.
(WEI Xiqing, SONG Shenmin. Model-free cubature Kalman filter and its application [J]. *Control and Decision*, 2013, 28(5): 769 – 773.)
- [9] 张鑫春, 郭承军. 均方根嵌入式容积分卡尔曼滤波 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(9): 1116 – 1121.
(ZHANG Xinchun, GUO Chengjun. Square-root imbedded cubature Kalman filtering [J]. *Control Theory & Applications*, 2013, 30(9): 1116 – 1121.)
- [10] ROGERS S. Alpha-beta filter with correlated measurement noise [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1987, 23(4): 592 – 594.
- [11] LI W L, JIA Y. H-infinity filtering for a class of nonlinear discrete-time systems based on unscented transform [J]. *Signal Processing*, 2010, 90(11): 3301 – 3307.
- [12] LI W, JIA Y, ZHOU D H, et al. Strong tracking filtering of nonlinear time-varying stochastic systems with coloured noise: Application to parameter estimation and empirical robustness analysis [J]. *International Journal of Control*, 1996, 65(2): 295 – 307.
- [13] 赵琳, 王小旭, 孙明, 等. 基于极大后验估计和指数加权的自适应UKF滤波算法 [J]. 自动化学报, 2010, 36(7): 1007 – 1019.
(ZHAO Lin, WANG Xiaoxu, SUN Ming, et al. Adaptive UKF filtering algorithm based on maximum a posterior estimation and exponential weighting [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(7): 1007 – 1019.)
- [14] 熊伟, 陈立奎, 何友, 等. 有色噪声下的不敏卡尔曼滤波器 [J]. 电子与信息学报, 2007, 29(3): 598 – 600.
(XIONG Wei, CHEN Likui, HE You, et al. Unscented Kalman filter with colored noise [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(3): 598 – 600.)
- [15] 王小旭, 梁彦, 潘泉, 等. 带有色量测噪声的非线性系统Unscented卡尔曼滤波器 [J]. 自动化学报, 2012, 38(6): 986 – 998.
(WANG Xiaoxu, LIANG Yan, PAN Quan, et al. Unscented Kalman filter for nonlinear systems with colored measurement noise [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(6): 986 – 998.)
- [16] 丁家琳, 肖建. 基于极大后验估计的自适应容积分卡尔曼滤波器 [J]. 控制与决策, 2014, 29(2): 327 – 334.
(DING Jialin, XIAO Jian. Design of adaptive cubature Kalman filter based on maximum a posteriori estimation [J]. *Control and Decision*, 2014, 29(2): 327 – 334.)
- [17] 史岳鹏, 汤显峰, 周溪召. 应用自适应容积分卡尔曼滤波改善组合导航性能 [J]. 中国航海, 2013, 36(4): 12 – 16.
(SHI Yuepeng, TANG Xianfeng, ZHOU Xizhao. Improving integrated navigation systems with adaptive cubature kalman filtering [J]. *Navigation of China*, 2013, 36(4): 12 – 16.)
- [18] GE Q B, XU D X, WEN C L. Cubature information filters with correlated noises and their applications in decentralized fusion [J]. *Signal Processing*, 2014, 94(1): 434 – 444.
- [19] CHANDRA K P B, GU D W, POSTLETHWAITE I. A cubature H_∞ filter and its square-root version [J]. *International Journal of Control*, 2014, 87(4): 764 – 776.

作者简介:

王思思 (1980–), 女, 博士研究生, 主要研究方向为统计信息处理和非线性滤波理论等, E-mail: mar32lin@sina.com.cn;

齐国清 (1960–), 男, 教授, 主要研究方向为雷达信号和信息处理, E-mail: qgq@dlmu.com.cn.