

凸多面体不确定系统的符号稳定性分析

王 通^{1†}, 董朝阳², 王 青¹, 倪茂林³

(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191; 2. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191;

3. 北京控制工程研究所 空间智能控制技术国家级重点实验室, 北京 100190)

摘要: 针对一类凸多面体描述的连续线性不确定系统研究其符号稳定性条件, 从而从符号稳定的角度探索一种新的不确定系统鲁棒控制器设计方法. 在矩阵符号稳定定义和必要条件的基础上, 给出了矩阵集合符号稳定的定义和完整同源稳定符号型集合的概念, 得到了凸多面体不确定系统符号稳定的充分必要条件. 进一步分析了符号稳定凸多面体不确定系统的特征根分布与主对角线元素的关系, 提出了基于符号稳定的不确定系统状态反馈镇定控制综合方法. 相比于基于Lyapunov稳定性理论的不确定系统鲁棒控制方法, 本文所提方法避免了求解线性矩阵不等式, 并且更符合工程设计的习惯. 通过一类三轴稳定卫星姿态控制问题的算例和仿真验证了所提方法的有效性.

关键词: 符号稳定; 控制综合; 不确定系统; 姿态控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Sign stability analysis of polytopic uncertain systems

WANG Tong^{1†}, DONG Chao-yang², WANG Qing¹, NI Mao-lin³

(1. School of Automation Science and Electrical Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

2. School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

3. National Laboratory of Space Intelligent Control, Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China)

Abstract: Considering a class of polytopic continuous linear uncertain systems, the sign stability condition is researched in order to explore a new robust control design approach for uncertain systems. On the basis of the definition and necessary conditions for the sign stability of matrix, the sign stability of matrix set is defined, and the concept of complete isogenous sign stable set is presented. Then the necessary and sufficient condition of sign stability for the polytopic uncertain systems is acquired. The relationship between the eigenroots and principal diagonal elements of sign stable polytopic uncertain systems is analyzed, and the state feedback stabilization control synthesis approach based on sign stability is provided. Compared with the robust control technique based on Lyapunov function method, the achieved approach avoids the resolution of the linear matrix inequalities and accords with the engineering practice. A computation and simulation example of satellite attitude control problem is given to validate the proposed method.

Key words: sign stability; control synthesis; uncertain systems; attitude control

1 引言(Introduction)

符号稳定的概念最早出现在生态系统领域, 在大规模的生态系统中, 种群数量受多种因素影响且缺少精确的建模方法, 但却呈现出很强的稳定性和抗干扰能力, 这促使研究人员利用符号稳定这种定性方法分析不同生物种群之间的动态变化过程^[1-3]. 在上述研究基础上, 系统科学领域的相关学者通过分析雅克比矩阵的符号特征来研究动态系统的定性稳定性, 并取得了一定的研究成果^[4-6]. 这种符号稳定方法通过分析给定矩阵各个位置上元素的符号, 来判断与该矩阵具有相同符号形式的任意矩阵的稳定性.

在控制理论和控制工程领域, 特别是不确定系统的鲁棒控制方法研究中, 符号稳定方法也逐渐得到了一定的重视和应用. 目前, Lyapunov稳定性理论和基于线性矩阵不等式的时域方法是参数不确定系统鲁棒分析与控制综合的主流研究方法^[7-12]. 然而, 不论是要求不确定系统具有公共Lyapunov函数的二次稳定性, 还是Lyapunov函数与不确定性相关联的参数依赖稳定性, 在实际工程中仍有问题需要解决. 这是因为一方面, 随着系统复杂度的增加, 线性矩阵不等式的可解性无法保证; 另一方面, 基于线性矩阵不等式的控制器求解方法不能继承已有的经典控制设计经

收稿日期: 2014-03-20; 录用日期: 2014-08-25.

[†]通信作者. E-mail: xenon@buaa.edu.cn; Tel.: +86 10-82338161.

国家自然科学基金项目(61273083)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61273083).

验. 以上因素使得这些方法与工程上广泛应用的“离线单点设计+在线控制综合”的设计框架仍有区别, 从而限制了其在实际工程中的应用.

由于符号稳定性与系统矩阵元素的数值大小无关, 具有一种天然的鲁棒性, 因此为不确定动态系统的鲁棒控制方法提供了一条新的思路, 即通过配置系统矩阵的元素符号实现不确定系统的鲁棒镇定. 这种方法不但简单、直观, 且一定程度上能够继承经典方法的设计经验. 文献[13]利用符号稳定针对一类轴对称卫星设计了一种三轴姿态镇定控制器, 通过将闭环系统矩阵配置为期望的符号矩阵型, 保证卫星在旋转角速度大幅不确定变化时的鲁棒稳定. 文献[14–15]分析了矩阵元素符号对于系统极点等属性的影响, 研究了满足一定性能要求的闭环系统符号矩阵的设计, 给出了全状态反馈下闭环系统符号可配置的条件和对应的控制器设计方法, 并通过卫星姿态控制系统和飞机横侧向控制系统验证了方法的有效性.

上述研究为符号稳定性方法在控制工程中的应用奠定了理论基础, 但是所讨论和解决的系统不确定性问题还比较简单. 在上述符号稳定性方法基础上, 文献[16]针对一类具有结构化参数不确定性的线性时不变系统提出了一种新的鲁棒控制器设计方法. 该方法提出当闭环系统矩阵集合满足一定的结构特征时, 可以保证系统对于实参数摄动具有一定的鲁棒性. 文献[17]进一步提出了定性鲁棒性的概念, 并针对一类特殊的区间参数矩阵, 研究了鲁棒控制器设计方法. 结论表明当系统的顶点矩阵符号稳定且满足一定条件时, 可保证区间参数矩阵的鲁棒稳定性.

上述结果在基于符号稳定的鲁棒控制研究中有突破, 但是所考虑的不确定对象模型较为特殊, 不具有一般性, 且缺乏系统性的控制器设计方案. 相比之下, 本文所采用的凸多面体不确定系统是一种更为自然且应用广泛的系统不确定性描述方式. 针对这类系统符号稳定性条件的研究能够为不确定系统提供一种更普遍的鲁棒控制方法. 除此之外, 对于不确定系统的控制综合问题, 在传统的Lyapunov稳定意义下, 凸多面体的各顶点稳定并不能保证不确定系统的鲁棒稳定; 相比之下, 符号稳定性在一定条件下对于凸组合运算具有封闭性, 即各顶点的符号稳定能够保证其凸组合的符号稳定性, 这也为设计一类具有“离线单点设计+在线控制综合”设计框架的新型鲁棒控制器综合方法提供了可能.

本文从上述分析出发, 研究了凸多面体不确定系统符号稳定的充要条件, 提出的控制方法可以对各顶点子系统进行独立分析和设计, 再进行控制系统综合, 得到的控制器不仅从理论上保证了系统的稳定性, 而且从极点配置的角度保证了系统性能.

2 问题提出(Problem statement)

本节首先给出矩阵符号稳定的定义和判据, 进一步提出矩阵集合和不确定系统符号稳定的定义, 提出凸多面体不确定系统符号稳定性分析和控制综合的主要问题.

对于 $n \times n$ 的实矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 仅保留其各元素的符号 $\text{sgn } a_{ij}$, 由此组成的矩阵称为矩阵 A 的符号型, 记为 $\text{sgn } A$. 符号型可以视为一类特殊的矩阵, 其元素均由符号+, -, 或0组成.

定义 1^[6] 如果与实矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 有相同符号型的任意实矩阵 B 都是稳定的, 则称 A 是符号稳定的, 同时也称矩阵 A 的符号型 $\text{sgn } A$ 是符号稳定的.

相关文献中给出了矩阵符号稳定的充要条件, 这里以引理的方式给出矩阵符号稳定的必要条件作为本文主要结论的基础.

引理 1^[6] 矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 符号稳定的必要条件如下:

- 1) $\forall i, a_{ii} \leq 0$;
- 2) 至少存在一个 i 使得 $a_{ii} < 0$;
- 3) $\forall i \neq j, a_{ij}a_{ji} \leq 0$;
- 4) 对于含3个或3个以上元素的任意下标序列 i, j, k, \dots, q, r , 都有 $a_{ij}a_{jk} \cdots a_{qr}a_{ri} = 0$;
- 5) $\det A \neq 0$.

上述引理只是矩阵符号稳定的必要条件, 对于矩阵符号稳定的判据, Jeffries等给出了一种涂色测试法^[6], 需要说明的是本文后续的矩阵符号稳定判定均使用上述方法进行.

类似地, 可以给出矩阵集合的符号型以及符号稳定的定义. 定义矩阵集合 $\{A_i, i \in \Gamma\}$ 的符号型集合为 $\text{sgn}\{A_i\} = \{S_i | S_i = \text{sgn } A_i, i \in \Gamma\}$. 考虑矩阵集合 $\{A_i, i \in \Gamma\}$ 和 $\{B_j, j \in \Delta\}$, 如果 $\forall i \in \Gamma$, 都有 $\text{sgn } A_i \in \text{sgn}\{B_j\}$, 且 $\forall j \in \Delta$, 都有 $\text{sgn } B_j \in \text{sgn}\{A_i\}$, 则称矩阵集合 $\{A_i, i \in \Gamma\}$ 和 $\{B_j, j \in \Delta\}$ 具有相同的符号型集合.

定义 2 给定矩阵集合 $\{A_i, i \in \Gamma\}$, 如果 $\forall i \in \Gamma$, A_i 是符号稳定的, 则称矩阵集合 $\{A_i\}$ 是符号稳定的, 也称符号型集合 $\text{sgn}\{A_i\}$ 是符号稳定的.

进一步考虑凸多面体形式的不确定系统, 其状态方程如下所示:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t), & A(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i A_i, \\ \theta \in \Omega := \{(\theta_1, \dots, \theta_N) | \sum_{i=1}^N \theta_i = 1, \theta_i \geq 0\}. \end{cases} \quad (1)$$

对于式(1)描述的凸多面体不确定系统, 同样可以给出其符号稳定的定义.

定义3 如果 $\forall \theta \in \Omega$, $A(\theta)$ 都是符号稳定的, 则称凸多面体不确定系统(1)是符号稳定的.

由定义3不难看出, 对于任意给定的符号稳定凸多面体不确定系统, 其必然是Hurwitz稳定的. 同时, 由凸多面体不确定系统的定义可知, $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, 都有 A_i 是符号稳定的, 即 A_i 的符号型 $\text{sgn} A_i$ 是符号稳定的. 由上述分析不难得出以下引理.

引理2 如果凸多面体不确定系统(1)是符号稳定的, 则系统(1)的顶点矩阵集合 $\{A_i, i=1, \dots, N\}$ 是符号稳定的.

证 如果系统(1)是符号稳定的, 则由定义3可知, $\forall \theta \in \Omega$, $A(\theta)$ 均是符号稳定的. 则令 $\theta_1=1$, 且令 $\theta_2=\theta_3=\dots=\theta_N=0$, 可得 A_1 是符号稳定的, 同理易知 $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, A_i 均是符号稳定的, 即系统(1)的顶点矩阵集合 $\{A_i, i=1, \dots, N\}$ 是符号稳定的.

在上述理论基础上, 本文主要研究凸多面体不确定系统(1)符号稳定的充要条件, 并从符号稳定角度给出系统(1)的状态反馈镇定控制器设计方法.

3 主要结果(Main results)

3.1 不确定系统的符号稳定性分析(Sign stability analysis for uncertain systems)

定义4 对于给定的符号型集合 $\text{sgn}\{A_i, i \in \Gamma\}$, 如果其各符号型中各相同位置处的元素满足下述条件之一, 则称各符号型同源, 称该符号型集合为一个同源集.

- 1) 各元素具有相同的符号(含0元素, 即认为0与任意符号同号);
- 2) 各元素均为0;
- 3) 与该位置关于主对角线对称位置处的各元素均为0.

式(2)给出了一个 3×3 的同源符号型集合:

$$\left\{ \begin{bmatrix} - & + & + \\ - & 0 & - \\ 0 & + & - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} - & 0 & + \\ - & - & - \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & + & - \\ - & - & 0 \\ 0 & + & - \end{bmatrix} \right\}. \quad (2)$$

考虑一个已知的同源符号型集合, 定义其各个符号型并运算如下: 1) 如果各符号型同一位置处的各元素为某一相同符号或0, 则并运算结果对应位置处的元素为该符号(非0); 2) 如果各符号型同一位置处的各元素均为0, 则并运算结果对应位置处的元素为0; 3) 如果各符号型同一位置处的各元素异号, 则并运算结果对应位置处的元素记为*, 表示可取任意符号.

定义上述并运算结果为该同源符号型集合的源符号型, 不难看出所得的源符号型可能已在原集合中, 也可能为一个新的符号型且与原集合中各符号型同源. 集合(2)的源符号型如下:

$$\begin{bmatrix} - & + & * \\ - & - & - \\ 0 & + & - \end{bmatrix} \quad (3)$$

由符号型同源的定义可以看出, 以上述源符号型为基础, 将其部分非零元素替换为0, 可以得到新的同源符号型. 进而可以列出由该源符号型生成的所有同源符号型, 并将原集合扩展为一个新的同源集合, 称为该源符号型的完整同源集. 显然, 在上述的完整同源集中, 满足符号稳定条件的符号型才是研究的重点, 因此可以从该集合中选出所有符号稳定的符号型, 并得到新的集合定义.

定义5 如果一个符号型集合由一个符号稳定的源符号型, 以及所有由该源符号型生成的符号稳定的符号型组成, 则称该符号型集合为完整同源稳定集.

注1 需要说明的是*代表的不确定元素并不影响符号稳定性, 其原因在于*必须与0元素关于主对角线对称出现, 两者的乘积始终为0, 不影响符号稳定性.

下面通过定理给出凸多面体不确定系统符号稳定的充分必要条件, 并提出一种构造符号稳定不确定系统的方法.

定理1 凸多面体不确定系统(1)符号稳定的充分必要条件是系统(1)的顶点矩阵符号型集合 $\text{sgn}\{A_i, i=1, \dots, N\}$ 为某一完整同源稳定集的子集.

证 先证必要性, 由引理2可知系统(1)的顶点矩阵符号型集合 $\text{sgn}\{A_i, i=1, \dots, N\}$ 是符号稳定的. 易知 $\forall \theta \in \Omega$, $A(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i A_i$ 符号稳定, 不妨设 $\theta_3 = \theta_4 = \dots = \theta_N = 0$, 则有

$$A(\theta) = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2, \quad \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0, \theta_1 + \theta_2 = 1. \quad (4)$$

定义 $r_{i,j}$ 为矩阵 $A(\theta)$ 第 i 行第 j 列的元素, $a_{i,j}^{\sim k}$ 为矩阵集合 $\{A_i, i \in \Gamma\}$ 中第 k 个矩阵第 i 行第 j 列的元素, 则有

$$r_{i,j} = \theta_1 a_{i,j}^{\sim 1} + \theta_2 a_{i,j}^{\sim 2}, \quad (5)$$

则由引理1的条件3)可知, 对于 $\forall i \neq j$, 有

$$r_{i,j} r_{j,i} = (\theta_1 a_{i,j}^{\sim 1} + \theta_2 a_{i,j}^{\sim 2})(\theta_1 a_{j,i}^{\sim 1} + \theta_2 a_{j,i}^{\sim 2}) \leq 0. \quad (6)$$

下面分情况讨论.

1) 对于 $r_{i,j} r_{j,i} = 0$ 的情况, 因为 θ_1 和 θ_2 的任意性, 则必有 $a_{i,j}^{\sim 1} = a_{i,j}^{\sim 2} = 0$ 或 $a_{j,i}^{\sim 1} = a_{j,i}^{\sim 2} = 0$, 即 $\forall p \neq q, \forall i \neq j, a_{i,j}^{\sim p} = a_{i,j}^{\sim q} = 0$ 或 $a_{j,i}^{\sim p} = a_{j,i}^{\sim q} = 0$.

2) 对于 $r_{i,j} r_{j,i} < 0$ 的情况, 不失一般性, 令 $\theta_1 = \theta_2$, 可得

$$(a_{i,j}^{\sim 1} + a_{i,j}^{\sim 2})(a_{j,i}^{\sim 1} + a_{j,i}^{\sim 2}) < 0, \quad \forall i \neq j, \quad (7)$$

即对于 $\forall i \neq j$, 有

$$a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 1} + a_{i,j}^{\sim 2} a_{j,i}^{\sim 1} + a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 2} + a_{i,j}^{\sim 2} a_{j,i}^{\sim 2} < 0. \quad (8)$$

考虑到各元素的绝对值可任意取值, 令

$$|a_{i,j}^{\sim 1}| = |a_{j,i}^{\sim 2}|, |a_{i,j}^{\sim 2}| = |a_{j,i}^{\sim 1}|, \quad (9)$$

可得

$$\begin{cases} a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 1} = \text{sgn}(a_{j,i}^{\sim 1} a_{i,j}^{\sim 2}) a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 2}, \\ a_{i,j}^{\sim 2} a_{j,i}^{\sim 1} = \text{sgn}(a_{j,i}^{\sim 1} a_{i,j}^{\sim 2}) (a_{i,j}^{\sim 2})^2, \\ a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 2} = \text{sgn}(a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 2}) (a_{i,j}^{\sim 1})^2, \\ a_{i,j}^{\sim 2} a_{j,i}^{\sim 2} = \text{sgn}(a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 2}) a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 2}. \end{cases} \quad (10)$$

由引理1的条件3)可知 $a_{i,j}^{\sim 1}$ 和 $a_{j,i}^{\sim 1}$ 反号(包括0), 且 $a_{i,j}^{\sim 2}$ 和 $a_{j,i}^{\sim 2}$ 反号(包括0). 则必有 $a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 2}$ 和 $a_{j,i}^{\sim 1} a_{i,j}^{\sim 2}$ 同号, 即 $\text{sgn}(a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 2}) = \text{sgn}(a_{j,i}^{\sim 1} a_{i,j}^{\sim 2})$. 则式(8)可写为

$$\begin{aligned} & \text{sgn}(a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 2}) (a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 2} + (a_{i,j}^{\sim 2})^2 + \\ & (a_{i,j}^{\sim 1})^2 + a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 1}) < 0, \quad \forall i \neq j, \end{aligned} \quad (11)$$

即

$$\text{sgn}(a_{i,j}^{\sim 1} a_{j,i}^{\sim 2}) (a_{i,j}^{\sim 1} + a_{j,i}^{\sim 2})^2 < 0, \quad \forall i \neq j. \quad (12)$$

为保证上式对 $a_{i,j}^{\sim 1}$ 和 $a_{j,i}^{\sim 2}$ 的任意取值都成立, 则 $a_{i,j}^{\sim 1}$ 和 $a_{j,i}^{\sim 2}$ 必须反号, 因此, $a_{i,j}^{\sim 1}$ 和 $a_{i,j}^{\sim 2}$ 必须同号(包括0), 即 $a_{i,j}^{\sim 1} a_{i,j}^{\sim 2} \geq 0$, 也即

$$\forall p \neq q, \quad \forall i \neq j, \quad a_{i,j}^{\sim p} a_{i,j}^{\sim q} \geq 0. \quad (13)$$

综合上述两种情况可知对于 $\forall p \neq q, \forall i \neq j$, 有 $a_{i,j}^{\sim p} = a_{i,j}^{\sim q} = 0$, 或 $a_{i,j}^{\sim p} = a_{i,j}^{\sim q} = 0$, 或 $a_{i,j}^{\sim p} a_{i,j}^{\sim q} \geq 0$.

不难看出1)-2)两种情况对应了定义4中的3个条件, 即符号稳定的凸多面体不确定系统(1)的顶点矩阵符号型集合必是同源集. 设此同源集的源符号型为 $\text{sgn} A_s$, 则由 θ 的任意性可知必存在 $\theta_s \in \Omega$ 使得 $\text{sgn}(A(\theta_s)) = \text{sgn} A_s$, 因此源符号型 $\text{sgn} A_s$ 符号稳定. 进一步由定义5可知, 系统(1)的顶点矩阵符号型集合必是以 $\text{sgn} A_s$ 为源符号型的完整同源稳定集的子集.

再证充分性, 如果凸多面体不确定系统(1)的顶点矩阵符号型集合是某一完整同源稳定集的子集, 则各顶点的符号型同源且符号稳定, 则由完整同源稳定集的定义易知, 对于任意的 $\theta^* \in \Omega$, $A(\theta^*) = \sum_{i=1}^N \theta_i^* A_i$ 的符号型属于该完整同源稳定集, 因此 $A(\theta^*)$ 是符号稳定的. 证毕.

利用定理1可以判定一个给定的凸多面体不确定系统是否符号稳定, 也可以由完整同源稳定集的概念构建一个符号稳定的凸多面体不确定系统.

由于完整同源稳定集可以通过其源符号型生成, 因此, 针对确定阶数的矩阵, 寻找一个符号稳定的源符号型是构建完整同源稳定集的关键. 不难看出, 为了使得构建的完整同源稳定集有尽可能多的符号型,

所选取的源符号型应含有尽可能少的0元素. 因此, 通常将源符号型的所有对角线元素均取为-, 非对角线元素尽可能多的取为+-对. 以 2×2 矩阵为例, 式(14)中的集合给出了完整同源稳定集的一个示例, 且集合中的第1个元素为源符号型:

$$\left\{ \begin{bmatrix} - & + \\ - & - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & + \\ - & - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} - & + \\ - & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} - & + \\ 0 & - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} - & 0 \\ - & - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{bmatrix} \right\}. \quad (14)$$

需要说明的是 2×2 矩阵的完整同源稳定集不止上述示例, 事实上, 式(14)中的第5和第6两个符号型也组成一个完整同源稳定集, 且以第5个符号型为源符号型.

由式(14)可知, 2×2 的符号稳定矩阵中0元素不是必需的. 而对于 3×3 矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, 由引理1的条件4)可知, 非对角线元素中应至少含有两个0元素, 从而保证 $a_{12} a_{23} a_{31} = 0$ 且 $a_{13} a_{32} a_{21} = 0$. 进一步分析可知, 如式(15)所示, 由符号&和#分别代表的两类非对角线位置应分别含有至少一个0元素:

$$\begin{bmatrix} - & \& \# \\ \# & - & \& \\ \& \# & - \end{bmatrix}. \quad (15)$$

对于阶数更高的矩阵同样有类似的结论, 因此在选择源符号型时, 需要在满足上述条件的基础上, 考虑非对角线元素的配置. 对于 3×3 矩阵的完整同源稳定集, 本文第4节将给出示例.

3.2 基于符号稳定的控制综合(Control synthesis based on sign stability)

以下进一步分析凸多面体不确定系统的特征根分布特点, 并给出系统基于符号稳定的状态反馈镇定控制器综合方法.

引理3^[15] 对于所有符号稳定且主对角线元素均为负的 $n \times n$ 实矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 其所有特征值的实部有界且满足: 特征值实部绝对值的下界是所有对角线元素绝对值的最小值, 特征值实部绝对值的上界是所有对角线元素绝对值的最大值. 即

$$|a_{i,i}|_{\min} \leq |\text{Re}(\lambda_i)|_{\min} \leq |\text{Re}(\lambda_i)|_{\max} \leq |a_{i,i}|_{\max}, \quad (16)$$

且对于 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 部分主对角线元素为0的情况, 有

$$0 < |\text{Re}(\lambda_i)|_{\min} \leq |\text{Re}(\lambda_i)|_{\max} \leq |a_{i,i}|_{\max}. \quad (17)$$

由上述引理易知, 对于 $n \times n$ 实矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若其符号稳定, 则特征值的取值范围由主对角线上的元素取值限定, 对于凸多面体不确定系统(1), 同样可

以获得类似的结论。

定理2 考虑已知的符号稳定凸多面体不确定系统(1), 对于任意的 $\theta^* \in \Omega$, $A(\theta^*) = \sum_{i=1}^N \theta_i^* A_i$ 的所有特征值 $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ 的实部有界且满足: 若所有顶点矩阵的主对角线元素均为负, 则有 $|a_{i,i}^{\sim k}|_{\min} \leq |\operatorname{Re}(\lambda_i^*)|_{\min} \leq |\operatorname{Re}(\lambda_i^*)|_{\max} \leq |a_{i,i}^{\sim k}|_{\max}$; 若部分主对角线元素为0, 则有

$$0 < |\operatorname{Re}(\lambda_i^*)|_{\min} \leq |\operatorname{Re}(\lambda_i^*)|_{\max} \leq |a_{i,i}^{\sim k}|_{\max},$$

其中 $a_{i,i}^{\sim k}$ 为顶点矩阵 A_k 的第 i 个对角线元素。

证 由引理3可知, 对于符号稳定的凸多面体不确定系统(1), 有式(16)或式(17)成立, 又由 $a_{i,i} = \sum_{k=1}^N \theta_k a_{i,i}^{\sim k}$ 易知定理2成立。证毕。

定理2说明对于凸多面体不确定系统的极点实部的配置可以通过各顶点闭环系统矩阵的对角线元素来实现, 为利用主对角线元素调节系统的性能提供了可能。

下面给出利用符号稳定性设计凸多面体不确定系统(1)的状态反馈镇定控制器的步骤:

步骤1 根据凸多面体不确定系统顶点的系统矩阵和控制矩阵的维数和特点, 选择一个符号稳定的源符号型及其对应的完整同源稳定集;

步骤2 分别针对各顶点设计状态反馈控制器使得各顶点的闭环系统矩阵具有上述完整同源稳定集中的符号型, 并且通过配置主对角线元素确定各特征根实部的取值范围;

步骤3 对于任意已知的不确定参数 θ^* , 利用下述插值方法获得凸多面体不确定系统(1)的控制器增益 $K(\theta^*)$:

$$K(\theta^*) = \left(\sum_{i=1}^N \theta_i^* B_i \right)^+ \left(\sum_{i=1}^N \theta_i^* B_i K_i \right), \quad (18)$$

其中 $\left(\sum_{i=1}^N \theta_i^* B_i \right)^+$ 为 $\sum_{i=1}^N \theta_i^* B_i$ 的广义逆, 同时要求 $\sum_{i=1}^N \theta_i^* B_i$ 行满秩。

由上述设计步骤可知, 对于凸多面体不确定系统(1), 其闭环系统矩阵满足

$$\begin{aligned} A_c(\theta^*) &= \sum_{i=1}^N \theta_i^* A_i + \left(\sum_{i=1}^N \theta_i^* B_i \right) K(\theta^*) = \\ &= \sum_{i=1}^N \theta_i^* A_i + \left(\sum_{i=1}^N \theta_i^* B_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \theta_i^* B_i \right)^+ \left(\sum_{i=1}^N \theta_i^* B_i K_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \theta_i^* (A_i + B_i K_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N \theta_i^* A_{ci}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中: A_{ci} 为各顶点的闭环系统矩阵, 且其符号型集 $\operatorname{sgn}\{A_{ci}\}$ 为某一完整同源稳定集的子集, 则由定理1可知, $A_c(\theta^*)$ 符号稳定, 因此上述设计步骤完成了凸多面体不确定系统的符号稳定控制综合。

4 算例验证(Example validation)

4.1 数值算例(Computation example)

考虑如下的凸多面体不确定系统(20):

$$\begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.5 \\ 5.3 & -3.4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1.8 & -2.5 \\ 0.6 & 4.2 \end{bmatrix}, \\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (20)$$

根据各顶点的系统矩阵特征, 选择式(21)所示的源符号型, 并利用由其生成的完整同源稳定集对上述不确定系统进行状态反馈镇定控制。事实上, 这里并不需要写出式(21)对应的完整同源稳定集, 而只需给出该集合中所需的部分符号型即可。如式(22)所示, $\operatorname{sgn} A_{c1}$ 和 $\operatorname{sgn} A_{c2}$ 分别为两个顶点闭环系统的目标符号型。

$$\begin{bmatrix} - & - \\ + & - \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\operatorname{sgn} A_{c1} = \begin{bmatrix} - & 0 \\ + & - \end{bmatrix}, \operatorname{sgn} A_{c2} = \begin{bmatrix} - & - \\ 0 & - \end{bmatrix}. \quad (22)$$

经过计算, 通过式(23)所示的状态反馈增益矩阵 K_1 和 K_2 可以将系统(20)顶点的闭环系统矩阵配置为式(22)所示的目标符号型。进一步应用本文的主要结论可知, 闭环不确定系统具有形如式(21)的符号型, 且是符号稳定的, 从而完成了凸多面体不确定系统(20)的镇定控制。

$$K_1 = \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.6 & -5.5 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

4.2 应用实例(Application example)

为进一步验证本文所提的方法, 考虑一类对地定向三轴稳定卫星的姿态控制问题, 若把卫星看作刚体, 其滚动、俯仰和偏航3个姿态角分别记为 ϕ , θ 和 ψ , 则在姿态角和姿态角速度很小的情况下, 有如下的姿态动力学方程:

$$\begin{cases} I_x \ddot{\phi} + (I_z - I_y) \omega_0 \dot{\psi} = L_x, \\ I_y \ddot{\theta} = L_y, \\ I_z \ddot{\psi} + (I_y - I_x) \omega_0 \dot{\phi} = L_z, \end{cases} \quad (24)$$

其中: L_x, L_y, L_z 是外力矩在卫星本体坐标系中的3个分量; I_x, I_y, I_z 是卫星的3个主惯量; ω_0 是卫星的轨道角速度。将上述姿态动力学方程写为线性状态方程形

式:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (25)$$

其中: $x(t) = [\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ 是系统的状态向量; $u(t) = [L_x \ L_y \ L_z]^T$ 是控制向量; 系统矩阵 A 和控制矩阵 B 分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_0(I_y - I_z)/I_x \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega_0(I_x - I_y)/I_z & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_z \end{bmatrix}.$$

取 $\omega_0 = 1 \times 10^{-3}$ rad/s; $I_x = 9 \times 10^3$ kg·m²; $I_z = 7 \times 10^3$ kg·m²; $I_y = 7 \times 10^3$ kg·m². 为验证符号稳定性方法在凸多面体不确定系统中的应用, 对 I_y 取 $\pm 10\%$ 的参数偏差, 由此得到具有4个顶点的凸多面体不确定系统如下:

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7.78 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.86 \times 10^{-4} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7.78 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 3.86 \times 10^{-4} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1.11 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 1.30 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1.43 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

$$B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 1.11 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 1.59 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1.43 \times 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

下面通过前述的符号稳定控制综合步骤给出卫星姿态控制系统的状态反馈镇定控制器设计方法. 首先选择不确定闭环系统的源符号型如下:

$$\begin{bmatrix} - & * & * \\ 0 & - & + \\ 0 & - & - \end{bmatrix}. \quad (27)$$

利用涂色测试法作为符号稳定判据可以得到式(27)对应的完整同源稳定集如式(28)所示, 其中*仍代表可能为+, -或0的不确定符号. 由于*的存在, 式(28)中各元素实际上分别包含了9(= 3 × 3)个符号型, 因此集合中总计有54(= 6 × 9)个符号型:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} - & * & * \\ 0 & - & + \\ 0 & - & - \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} - & * & * \\ 0 & 0 & + \\ 0 & - & - \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} - & * & * \\ 0 & - & + \\ 0 & - & 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} - & * & * \\ 0 & - & 0 \\ 0 & - & - \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} - & * & * \\ 0 & - & + \\ 0 & 0 & - \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc} - & * & * \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - \end{array} \right] \end{array} \right\}. \quad (28)$$

需要说明的是, 当用*代表任意符号后, 上述集合中各符号型的第1行和第1列均不可改变, 即完整同源稳定集由右下角的2 × 2矩阵块确定. 实际上, 该矩阵块恰好与式(14)中的完整同源稳定集相同.

选择凸多面体不确定系统4个顶点的闭环系统矩阵 $A_{c1}, A_{c2}, A_{c3}, A_{c4}$ 分别具有如下的符号型, 同时各主对角线元素均为-0.7.

$$\text{sgn } A_{c1} = \text{sgn } A_{c3} = \begin{bmatrix} -0.7 & * & + \\ 0 & -0.7 & + \\ 0 & - & -0.7 \end{bmatrix},$$

$$\text{sgn } A_{c2} = \text{sgn } A_{c4} = \begin{bmatrix} -0.7 & * & - \\ 0 & -0.7 & + \\ 0 & - & -0.7 \end{bmatrix}.$$

结合各顶点的系统矩阵和控制矩阵, 易解算出一组满足要求的状态反馈增益矩阵如下所示:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -6306.3 & 0 & 1000 \\ 0 & -5384.6 & 1 \\ -1.301 & -1 & -4895.1 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -6306.3 & 0 & -1000 \\ 0 & -5384.6 & 1 \\ -2.699 & -1 & -4895.1 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -6306.3 & 0 & 1000 \\ 0 & -4402.5 & 1 \\ -1.301 & -1 & -4895.1 \end{bmatrix},$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -6306.3 & 0 & -1000 \\ 0 & -4402.5 & 1 \\ -2.699 & -1 & -4895.1 \end{bmatrix}.$$

此时, 对应的顶点闭环系统矩阵为

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 & 0.1111 \\ 0 & -0.7 & 1.30 \times 10^{-4} \\ 0 & -1.43 \times 10^{-4} & -0.7 \end{bmatrix},$$

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 & -0.1111 \\ 0 & -0.7 & 1.30 \times 10^{-4} \\ 0 & -1.43 \times 10^{-4} & -0.7 \end{bmatrix},$$

$$A_{c3} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 & 0.1111 \\ 0 & -0.7 & 1.59 \times 10^{-4} \\ 0 & -1.43 \times 10^{-4} & -0.7 \end{bmatrix},$$

$$A_{c4} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 & -0.1111 \\ 0 & -0.7 & 1.59 \times 10^{-4} \\ 0 & -1.43 \times 10^{-4} & -0.7 \end{bmatrix}.$$

对于实际测得的参数 I_y^* , 利用凸分解可以得到对应的 $\theta^* = (\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, \theta_4^*)$, 则不确定系统的状态反馈控制增益矩阵由式(18)确定.

例如若取 $I_y^* = 7.5 \times 10^3$ kg·m², 则可解得

$$\theta_1^* = 0.7559, \theta_2^* = 0.1261,$$

$$\theta_3^* = 0.1011, \theta_4^* = 0.0169,$$

进一步可得

$$K^* = \begin{bmatrix} -6306.3 & 0 & 714 \\ 0 & -5246.5 & 1 \\ -1.501 & -1 & -4895.1 \end{bmatrix}.$$

此时闭环系统矩阵为

$$A_c^* = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 & 7.93 \times 10^{-2} \\ 0 & -0.7 & 1.33 \times 10^{-4} \\ 0 & -1.43 \times 10^{-4} & -0.7 \end{bmatrix}.$$

闭环特征根为

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -0.7, \\ \xi_2 &= -0.7 + 0.0001i, \\ \xi_3 &= -0.7 - 0.0001i. \end{aligned}$$

注 2 不确定闭环系统的源符号型的选择并不唯一, 需要结合开环系统矩阵和控制矩阵的特点进行选择, 其基本原则是使对系统矩阵各位置符号的改动尽可能的小, 本例为说明同源符号型在稳定性分析中的优势, 选择了前述的源符号型, 并为简化运算, 降低了数值的复杂度.

进一步在凸多面体内选取多个不确定子系统, 即对 I_y 取多组不同的参数偏差 ($0, \pm 2\%, \pm 4\%, \pm 6\%, \pm 8\%$), 并通过上述方法解算状态反馈控制器, 取仿真初值为 $\dot{\phi}_0 = 0.001 \text{ rad/s}$, $\dot{\theta}_0 = -0.001 \text{ rad/s}$, $\dot{\psi}_0 = 0.002 \text{ rad/s}$, 对各系统进行仿真, 仿真结果曲线如图 1–3 所示.

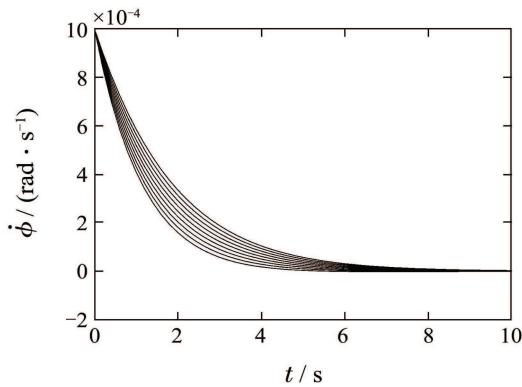


图 1 滚转角速度 $\dot{\phi}$

Fig. 1 Roll angular rate $\dot{\phi}$

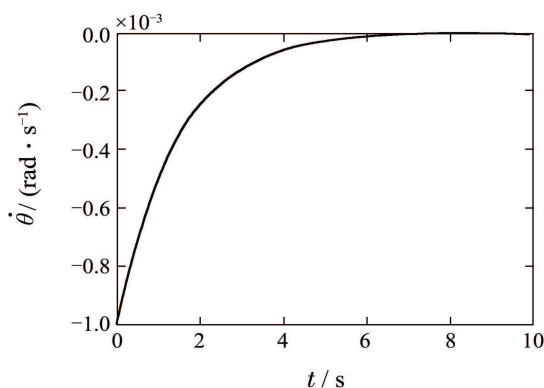


图 2 俯仰角速度 $\dot{\theta}$

Fig. 2 Pitch angular rate $\dot{\theta}$

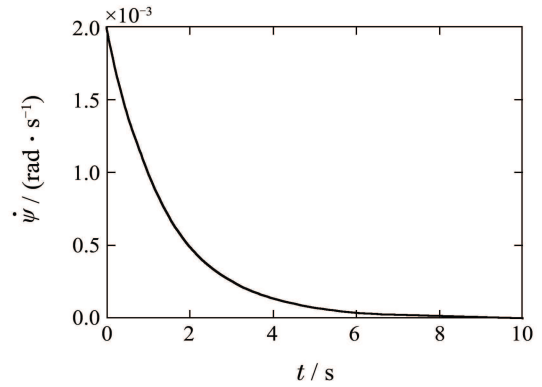


图 3 偏航角速度 $\dot{\psi}$

Fig. 3 Yaw angular rate $\dot{\psi}$

如姿态角速度响应曲线所示, 对应于 I_y 取多组不同的参数偏差时, 卫星的 3 个姿态角都能快速收敛, 受 I_y 参数不确定性的影响, 滚转角速度 $\dot{\phi}$ 的收敛曲线略有差异, 但基本收敛趋势一致, 俯仰角速度 $\dot{\theta}$ 和偏航角速度 $\dot{\psi}$ 的曲线完全重合, 说明了本文所提方法对于不确定系统控制器设计的有效性.

在上述仿真分析基础上, 将本文所提方法及其应用与文献[13]中的线性定常系统符号稳定应用实例作对比. 由于文献[13]中的符号稳定控制方案要求所设计的闭环系统具有单一的符号型, 使其仅能适应部分参数的不确定性, 在相应的应用实例中, 该方法仅对卫星轨道角速度 ω_0 的变化具有鲁棒性, 且要求 ω_0 的符号保持不变, 限制了该方法的进一步应用. 相比之下, 本文提出的符号稳定鲁棒控制方法面向一类凸多面体不确定系统, 对于符合凸多面体描述的系统参数不确定性均具有鲁棒性, 因此具有更广的应用范围.

5 结论(Conclusions)

本文研究了一类凸多面体不确定系统的符号稳定性问题, 并将其应用于不确定线性时不变系统的鲁棒镇定控制. 利用完整同源稳定符号型集合的概念提出了凸多面体不确定系统符号稳定的充分必要条件, 进一步利用符号稳定对于凸组合的封闭性, 给出了不确定系统的状态反馈符号镇定控制方法. 所得的控制器不仅从理论上保证了不确定系统的鲁棒稳定性, 而且从极点配置的角度保证了系统性能. 所提的方法简便、直观, 符合“单点设计+控制综合”的设计框架, 为凸多面体不确定系统的分析与控制综合提供了一种新的思路.

参考文献(References):

- [1] DAMBACHER J, LUH H, LI H, et al. Qualitative stability and ambiguity in model ecosystems [J]. *The American Naturalist*, 2003, 161(6): 876–888.
- [2] MAY R. Will a large complex system be stable [J]. *Nature*, 1972, 238(1): 413–414.
- [3] JEFFRIES C. Qualitative stability and digraphs in model ecosystems [J]. *Ecology*, 1974, 55(6): 1415–1419.

- [4] GRUNDY D A, OLESKY D D, VAN DEN DRIESSCHE P. Constructions for potentially stable sign patterns [J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2012, 436(12): 4473 – 4488.
- [5] HORVATH R. On the sign-stability of numerical solutions of one-dimensional parabolic problems [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2008, 32(8): 1570 – 1578.
- [6] JEFFRIES C, KLEE V, VAN DEN DRIESSCHE P. When is a matrix sign stable [J]. *Canadian Journal of Mathematics*, 1977, 2(29): 315 – 326.
- [7] AGULHARI C M, OLIVEIRA R C L F, PERES P L D. LMI relaxations for reduced-order robust H_∞ control of continuous-time uncertain linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(6): 1532 – 1537.
- [8] LEITE V J S, PERES P L D. An improved LMI condition for robust D-stability of uncertain polytopic systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(3): 500 – 504.
- [9] 高会军. 基于参数依赖Lyapunov函数的不确定动态系统的分析与综合 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2005.
(GAO Huijun. *Analysis and synthesis of uncertain dynamic systems based on parameter-dependent Lyapunov function* [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2005.)
- [10] CHESI G. Time-invariant uncertain systems: a necessary and sufficient condition for stability and instability via homogeneous parameter-dependent quadratic Lyapunov functions [J]. *Automatica*, 2010, 46(2): 471 – 474.
- [11] 高文华, 邓飞其. 凸多面体不确定随机时滞系统的参数依赖状态反馈控制 [J]. 控制理论与应用, 2011, 28(2): 235 – 241.
(GAO Wenhua, DENG Feiqi. Parameter-dependent state feedback control for stochastic delay-varying systems with polytopic-type uncertainties [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(2): 235 – 241.)
- [12] DONG J X, YANG G H. Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties [J]. *Automatica*, 2013, 49(6): 1821 – 1829.
- [13] YEDAVALLI R K. Robust control design for linear systems using an ecological sign stability approach [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2009, 32(1): 348 – 352.
- [14] DEVARAKONDA N, YEDAVALI R K. Engineering perspective of ecological sign stability and its application in control design [C] // *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. Baltimore: AACC, 2010: 5062 – 5067.
- [15] YEDAVALLI R K, DEVARAKONDA N. Sign-stability concept of ecology for control design with aerospace applications [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2010, 33(2): 333 – 346.
- [16] DEVARAKONDA N, YEDAVALI R K. A new and simple robust control design for linear systems with structured time varying real parameter uncertainty [C] // *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*. Atlanta: IEEE, 2010: 621 – 626.
- [17] YEDAVALI R K, DEVARAKONDA N. Sufficiency of vertex matrix check for robust stability of interval matrices via the concept of qualitative robustness [C] // *Proceedings of the 2013 European Control Conference*. Zurich: EUCA, 2013: 2351 – 2356.

作者简介:

王 通 (1987–), 男, 博士研究生, 研究方向为飞行器控制、鲁棒控制等, E-mail: xenon@buaa.edu.cn;

董朝阳 (1966–), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为航天器控制系统、飞行器安全与控制等, E-mail: dongchaoyang@buaa.edu.cn;

王 青 (1968–), 女, 教授, 博士生导师, 研究方向为飞行器制导与控制、网络控制系统等, E-mail: wangqing@buaa.edu.cn;

倪茂林 (1963–), 男, 研究员, 博士生导师, 研究方向为不确定系统的鲁棒控制、航天器智能鲁棒控制等, E-mail: niml@bice.org.cn.