第 32 卷第 1 期
2015 年 1 月
控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications
Vol. 32 No. 1
Jan. 2015

DOI: 10.7641/CTA.2015.40386

基于Jacobi方法的线性离散时间系统的迭代学习控制

傅 勤†

(苏州科技学院 数理学院, 江苏 苏州 215009)

摘要: 提出线性离散时间系统基于Jacobi方法的迭代学习控制问题. 通过构建线性迭代学习控制问题与线性方程组之间的联系, 将Jacobi方法引入到迭代学习控制中, 并由此构建得到迭代学习控制律. 借助于矩阵运算, 证明这种学习律能使得系统的输出跟踪误差经有限次迭代后为零. 数值例子说明了算法的可适用性.

关键词: 线性系统; 学习律; 迭代学习控制; Jacobi方法

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Iterative learning control for linear discrete-time systems based on Jacobi method

FU Qin†

(School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu 215009, China)

Abstract: Based on Jacobi method, the problem of iterative learning control (ILC) algorithm for linear discrete-time systems is considered. By setting up links between linear ILC problems and linear equations, the Jacobi method is introduced into the ILC framework and the iterative learning control laws are proposed. With the application of matrix operation, it is shown that the output tracking errors can equal zero after finite iterations. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: linear systems; learning scheme; iterative learning control; Jacobi method

1 引言(Introduction)

迭代学习控制由Arimoto等人[1]首次提出完整的控制算法后, 已成为近年来控制理论研究的热点问题, 并引起人们的广泛关注. 在迭代学习控制设计中, 采用较多的是D型学习律[1–4]和P型学习律[5–7], 根据系统所满足的性质, 在重复受控时间内, 用D型学习律或P型学习律进行控制设计.

针对线性离散时间系统, 文[8–11]依据二次性能指标的优化问题, 构建得到迭代学习控制律, 使得跟踪误差在二次性能指标意义下随着迭代次数增加而单调减小并趋于零. 文[12]从另一角度考虑了线性离散时间系统的迭代学习控制问题, 利用迭代矩阵2–范数与1–范数之间的关系,对迭代矩阵的1–范数提出小于1的要求, 从而得到跟踪误差的2–范数随着迭代次数增加而单调减小并趋于零的结论.

文[13]从方程的数值求解角度,提出了一类新的设计算法，将迭代学习控制器的构建转化为方程的数值求解问题, 并针对一类非线性系统, 利用与之相应的非线性方程, 基于Newton法构建得到Newton型迭代学习控制器; 在文[13]的基础上, 文[14]进一步采用了P型学习律与Newton型学习律相结合的形式, 对一类非仿射非线性系统进行迭代学习控制设计; 文[15]采用拟Newton法, 对一类非线性系统做了相应的工作, 并由此得到拟Newton型迭代学习控制器; 文[16]则进一步将相应的工作做到了非线性离散时间系统上. 上述设计针对的均为非线性系统, 原理是将迭代学习控制器的构建转化为相应非线性方程的数值求解问题, 然后利用方程的数值解法求得迭代学习控制器. 由此引出的问题是: 能否针对线性系统也做相应的工作? 与线性系统相应的方程为线性方程组, 如何利用线性方程组的数值解法对线性系统进行迭代学习控制设计, 据笔者所知, 尚无相关的研究论文.

Jacobi迭代法[17]是线性方程组的一大数值解法. 本文从线性方程组数值解法的角度, 针对文[12]中的系统, 提出基于Jacobi方法的迭代学习控制问题, 通过构建线性迭代学习控制问题与线性方程组之间的联

收稿日期: 2014−04−30; 录用日期: 2014−07−01.
†通信作者. E-mail: fuqin925@sina.com; Tel.: +86 512-68056433.
国家自然科学基金项目(11371013)资助.
Supported by National Natural Science Foundation of China (11371013).

系, 将Jacobi方法引入到迭代学习控制中, 由此求得迭代学习控制律, 并借助于矩阵运算, 证明这种学习律能使得系统的输出跟踪误差经有限次迭代后为零.

2 问题描述(Problem description)

考虑如下形式的线性离散时间单输入单输出(single input single output, SISO)系统[12]:

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + bu(t), \\ y(t) = c^{\mathrm{T}}x(t), \end{cases} \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

这里: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t), y(t) \in \mathbb{R}$分别是系统的状态、控制输入和输出, $t = 0, 1, \cdots, N$. 系统(1)的第k步迭代格式可写为[12]

$$\begin{cases} y_k(0) = c^{\mathrm{T}}x_0, \\ y_k = L_0x_0 + Lu_k, \end{cases} \tag{2}$$

其中:

$$\begin{aligned} &y_k = [y_k(1)\ \ y_k(2)\ \ \cdots\ \ y_k(N)]^{\mathrm{T}}, \\ &u_k = [u_k(0)\ \ u_k(1)\ \ \cdots\ \ u_k(N-1)]^{\mathrm{T}}, \\ &L_0 = [(c^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}}\ \ (c^{\mathrm{T}}A^2)^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ \ (c^{\mathrm{T}}A^N)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \\ &L = \begin{pmatrix} c^{\mathrm{T}}b & 0 & \cdots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}Ab & c^{\mathrm{T}}b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}A^{N-1}b & \cdots & c^{\mathrm{T}}Ab & c^{\mathrm{T}}b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

设系统(1)的相对阶为1, 即$c^{\mathrm{T}}b \neq 0$, 可知L为可逆阵.

记$y_{\mathrm{d}} = [y_{\mathrm{d}}(1)\ \ y_{\mathrm{d}}(2)\ \ \cdots\ \ y_{\mathrm{d}}(N)]^{\mathrm{T}}$为给定的理想轨迹, 学习控制的目的是寻找适当的学习律, 使得迭代学习序列y_k收敛于理想的输出y_{d}, 即

$$\lim_{k\to\infty} \|e_k\|_2 = 0,$$

其中: $e_k = y_{\mathrm{d}} - y_k$, $\|e_k\|_2$为向量e_k的2–范数.

记$\gamma_1^* = 1/c^{\mathrm{T}}b$, 文[12]对系统(1)构建了迭代学习控制律

$$u_{k+1} = u_k + \gamma_1^* e_k, \tag{3}$$

并得到如下结论:

当条件

$$K = |c^{\mathrm{T}}Ab| + |c^{\mathrm{T}}A^2b| + \cdots + |c^{\mathrm{T}}A^{N-1}b| < \frac{1}{\gamma_1^*} = |c^{\mathrm{T}}b| \tag{4}$$

成立时, 系统(1)在学习律(3)作用下, 输出跟踪误差$\|e_k\|_2$单调减小并趋于零.

本文基于Jacobi方法, 对系统(1)构建迭代学习控制律, 证明得到的Jacobi型迭代控制律经有限次迭代后能使输出跟踪误差$\|e_k\|_2 = 0$, 并进一步说明该迭代控制律与文[12]中的学习律(本文中(3)式)是等价的, 由此对同样的系统, 并在同样的假设条件下, 可对文[12]中的结论作如下改进:

当(4)式成立时, 系统(1)在学习律(3)式作用下, 输出跟踪误差$\|e_k\|_2$单调减小并经有限次迭代后等于零.

3 基于Jacobi方法的迭代学习控制(Iterative learning control based on Jacobi method)

构建系统(1)相应的线性方程组

$$y_{\mathrm{d}} = L_0x_0 + Lu, \tag{5}$$

其中u为未知量. 由L为可逆阵可知, 方程组式(5)存在唯一解u_{d}. 记

$$L = \tilde{L} + D, \tag{6}$$

其中:

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}Ab & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}A^{N-1}b & \cdots & c^{\mathrm{T}}Ab & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} c^{\mathrm{T}}b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c^{\mathrm{T}}b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c^{\mathrm{T}}b \end{pmatrix}.$$

由此构建线性方程组式(5)的Jacobi迭代格式[17]为

$$u_{k+1} = -D^{-1}\tilde{L}u_k + D^{-1}(y_{\mathrm{d}} - L_0x_0). \tag{7}$$

其迭代矩阵

$$J = -D^{-1}\tilde{L} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{c^{\mathrm{T}}Ab}{c^{\mathrm{T}}b} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \frac{c^{\mathrm{T}}A^{N-1}b}{c^{\mathrm{T}}b} & \cdots & \frac{c^{\mathrm{T}}Ab}{c^{\mathrm{T}}b} & 0 \end{pmatrix}$$

为$N \times N$的严格下三角矩阵, 由此可得, J的谱半径$\rho(J) = 0 < 1$, 再由文[17]知, 迭代格式(7)是收敛的.

因J为严格下三角矩阵, 进一步可得经有限次迭代后输出跟踪误差$\|e_k\|_2$为零的结论, 由此有本文的主要定理:

定理 1 经有限次迭代后, 由式(2)(7)构建得到的y_k与理想输出y_{d}完全一致.

证 u_{d}为方程组式(5)的解, 有

$$y_{\mathrm{d}} = L_0x_0 + Lu_{\mathrm{d}}. \tag{8}$$

利用式(6)将上式改写为

$$u_{\mathrm{d}} = -D^{-1}\tilde{L}u_{\mathrm{d}} + D^{-1}(y_{\mathrm{d}} - L_0x_0). \tag{9}$$

用式(9)减去式(7), 有$u_{\mathrm{d}} - u_{k+1} = J(u_{\mathrm{d}} - u_k)$. 反复套用此式, 可得

$$\begin{aligned} &u_{\mathrm{d}} - u_{k+1} = J(u_{\mathrm{d}} - u_k) = \\ &J^2(u_{\mathrm{d}} - u_{k-1}) = \cdots = J^{k+1}(u_{\mathrm{d}} - u_0). \end{aligned} \tag{10}$$

注意到严格下三角矩阵的性质: N个$N \times N$的严格下三角矩阵相乘, 其乘积为零矩阵, 即

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & * & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ * & \cdots & * & * & 0 \end{pmatrix}}_{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此有$J^N=0$. 结合式(10), 即可得$u_N=u_{\mathrm{d}}$. 再由式(2)(8), 有$y_N=y_{\mathrm{d}}$. 即经N次迭代后, 系统的输出y_N与理想输出y_{d}完全一致. 证毕.

注 1 考虑系统(1)受扰动项干扰的情形:

$$\begin{cases} x(t+1)=Ax(t)+bu(t)+\varepsilon(t), \\ y(t)=c^{\mathrm{T}}x(t), \end{cases} x(0)=x_0, \tag{11}$$

这里, $\varepsilon(t)\in\mathbb{R}^n$为扰动项, 系统(11)的第$k$步迭代格式写为

$$\begin{aligned} &y_k(0)=c^{\mathrm{T}}x_0, \\ &y_k=L_0x_0+Lu_k+\hat{L}\varepsilon, \end{aligned} \tag{12}$$

其中:

$$\hat{L}=\begin{pmatrix} c^{\mathrm{T}} & 0 & \cdots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}A & c^{\mathrm{T}} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}A^{N-1} & \cdots & c^{\mathrm{T}}A & c^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon=[\varepsilon^{\mathrm{T}}(0)\ \ \varepsilon^{\mathrm{T}}(1)\ \ \cdots\ \ \varepsilon^{\mathrm{T}}(N-1)]^{\mathrm{T}}.$$

构建系统(11)相应的线性方程组$y_{\mathrm{d}}=L_0x_0+Lu+\hat{L}\varepsilon$. 并设$u_{\mathrm{d}}$为其解, 则有

$$y_{\mathrm{d}}=L_0x_0+Lu_{\mathrm{d}}+\hat{L}\varepsilon. \tag{13}$$

利用式(6)将上式改写为

$$u_{\mathrm{d}}=-D^{-1}\tilde{L}u_{\mathrm{d}}+D^{-1}(y_{\mathrm{d}}-L_0x_0)-D^{-1}\hat{L}\varepsilon. \tag{14}$$

用式(14)减去式(7), 有$u_{\mathrm{d}}-u_{k+1}=J(u_{\mathrm{d}}-u_k)-D^{-1}\hat{L}\varepsilon$. 注意到$J^N=0$, 反复套用上式, 可得: 当$k\geqslant N$时, 有

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{d}}-u_k=&-J^{N-1}D^{-1}\hat{L}\varepsilon-J^{N-2}D^{-1}\hat{L}\varepsilon-\cdots- \\ &JD^{-1}\hat{L}\varepsilon-D^{-1}\hat{L}\varepsilon. \end{aligned} \tag{15}$$

用式(13)减去式(12), 得

$$e_k=y_{\mathrm{d}}-y_k=L(u_{\mathrm{d}}-u_k).$$

结合式(15)可知, 当$k\geqslant N$时, 有

$$\begin{aligned} e_k=&-LJ^{N-1}D^{-1}\hat{L}\varepsilon-LJ^{N-2}D^{-1}\hat{L}\varepsilon-\cdots- \\ &LJD^{-1}\hat{L}\varepsilon-LD^{-1}\hat{L}\varepsilon. \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} \theta=&\|LJ^{N-1}D^{-1}\hat{L}+LJ^{N-2}D^{-1}\hat{L}+\cdots+ \\ &LJD^{-1}\hat{L}+LD^{-1}\hat{L}\|_2, \end{aligned}$$

则有$\|e_k\|_2\leqslant\theta\|\varepsilon\|_2,\ k\geqslant N$.

由此说明, Jacobi型迭代控制律(7)是具有鲁棒性的.

注 2 可将定理1的结论推广到相对阶大于1的情形. 设系统(1)的相对阶为k^*, 即k^*为使得$c^{\mathrm{T}}A^{k^*-1}b\neq0$的最小整数, 则系统(1)的第$k$步迭代格式可写为[9–10]

$$y_k=Gu_k+d,$$

其中:

$$y_k=[y_k(k^*)\ \ y_k(k^*+1)\ \ \cdots\ \ y_k(N)]^{\mathrm{T}},$$
$$u_k=[u_k(0)\ \ u_k(1)\ \ \cdots\ \ u_k(N-k^*)]^{\mathrm{T}},$$
$$d=[c^{\mathrm{T}}A^{k^*}x_0\ \ c^{\mathrm{T}}A^{k^*+1}x_0\ \ \cdots\ \ c^{\mathrm{T}}A^Nx_0]^{\mathrm{T}},$$

$$G=\begin{pmatrix} c^{\mathrm{T}}A^{k^*-1}b & 0 & \cdots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}A^{k^*}b & c^{\mathrm{T}}A^{k^*-1}b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}A^{N-1}b & \cdots & c^{\mathrm{T}}A^{k^*}b & c^{\mathrm{T}}A^{k^*-1}b \end{pmatrix}.$$

记

$$\bar{D}=\begin{pmatrix} c^{\mathrm{T}}A^{k^*-1}b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c^{\mathrm{T}}A^{k^*-1}b & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c^{\mathrm{T}}A^{k^*-1}b \end{pmatrix},$$

$$\bar{L}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}A^{k^*}b & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}A^{N-1}b & \cdots & c^{\mathrm{T}}A^{k^*}b & 0 \end{pmatrix}.$$

设理想输出为$y_{\mathrm{d}}=[y_{\mathrm{d}}(k^*)\ \ y_{\mathrm{d}}(k^*+1)\ \ \cdots\ \ y_{\mathrm{d}}(N)]^{\mathrm{T}}$, 构建相应的Jacobi迭代格式为

$$u_{k+1}=-\bar{D}^{-1}\bar{L}u_k+\bar{D}^{-1}(y_{\mathrm{d}}-d).$$

由此可得相应的结论为: 经$N+1-k^*$次迭代后, 系统的输出y_{N+1-k^*}与理想输出y_{d}完全一致.

注 3 下将Jacobi迭代控制律(7)转化为通常的迭代学习律, 可知式(7)就是文[12]中的迭代学习律(本文中式(3)). 由式(2)(6)知, 式(7)可化为

$$\begin{aligned} &u_{k+1}= \\ &-D^{-1}\tilde{L}u_k+D^{-1}(y_{\mathrm{d}}-L_0x_0)= \\ &-D^{-1}(\tilde{L}+D-D)u_k+D^{-1}(y_{\mathrm{d}}-L_0x_0)= \\ &u_k-D^{-1}Lu_k+D^{-1}(y_{\mathrm{d}}-L_0x_0)= \\ &u_k+D^{-1}(y_{\mathrm{d}}-L_0x_0-Lu_k)= \\ &u_k+D^{-1}(y_{\mathrm{d}}-y_k)=u_k+D^{-1}e_k. \end{aligned}$$

由对角阵D及数γ_1^*的定义, 上式可写为

$$u_{k+1}=u_k+\gamma_1^*e_k.$$

即为式(3). 结合定理1即可对文[12]中的结论作如下改进:

当式(4)成立时, 系统(1)在学习律(3)作用下, 输出跟踪误差$\|e_k\|_2$单调减小并经有限次迭代后等于零.

4 数值例子(Numerical examples)

1) 输出跟踪误差$\|e_k\|_2$单调减小并经有限次迭代后等于零. 取

$$A=\begin{pmatrix}0.1&0.2&0.3&0.4\\0&0.1&0.2&0.3\\0&0&0.1&0.2\\0.1&0.1&0&0.1\end{pmatrix},$$

$$c=b=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm T},\ N=8,$$

则有

$$K=|c^{\mathrm T}Ab|+|c^{\mathrm T}A^2b|+\cdots+|c^{\mathrm T}A^7b|=3.8601<4=|c^{\mathrm T}b|$$

成立, 即系统满足文[12]中的单调收敛条件(本文中式(4)). 取

$$y_{\mathrm d}=[1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8]^{\mathrm T},$$
$$x_0=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm T},$$

并取迭代初值(Jacobi迭代的通常取法)

$$u_0=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm T},$$

则由式(2)(7)可算得, 见表1.

表 1　e_k的模

Table 1　Norm(e_k)

k	0	1	2	3	4
$\|e_k\|_2$	13.9679	9.2391	5.3490	2.4888	0.7892
k	5	6	7	8	
$\|e_k\|_2$	0.1243	0.0629	0.0183	0.0000	

即输出跟踪误差$\|e_k\|_2$单调减小并经8次迭代后等于零, 见图1.

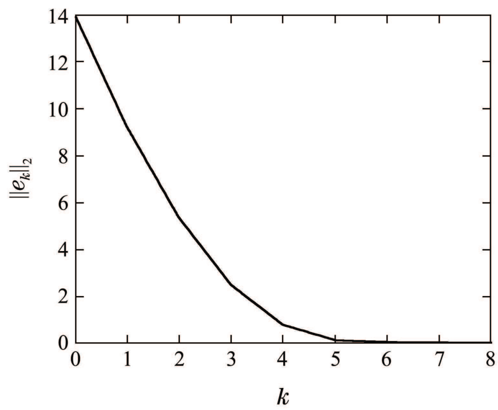

图 1　跟踪误差$\|e_k\|_2$

Fig. 1　Tracking errors $\|e_k\|_2$

2) 输出跟踪误差$\|e_k\|_2$非单调减小但经有限次迭代后等于零. 取

$$A=\begin{pmatrix}0.1&0.2&0.3&0.4\\0&0.1&0.2&0.3\\0&0&0.1&0.2\\1&0.1&0&0.1\end{pmatrix},$$

$$c=b=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm T},\ N=8.$$

则有

$$K=|c^{\mathrm T}Ab|+|c^{\mathrm T}A^2b|+\cdots+|c^{\mathrm T}A^7b|=15.1885<4=|c^{\mathrm T}b|$$

不成立, 即系统不满足文[12]中的单调收敛条件(本文中式(4)). 取

$$y_{\mathrm d}=[1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8]^{\mathrm T},$$
$$x_0=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm T},$$

并取迭代初值

$$u_0=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm T},$$

则由式(2)(7)可算得, 见表2.

表 2　e_k的模

Table 2　Norm(e_k)

k	0	1	2	3	4
$\|e_k\|_2$	10.7256	11.7985	6.7583	10.6761	13.0187
k	5	6	7	8	
$\|e_k\|_2$	8.0302	2.5917	0.3526	0.0000	

即输出跟踪误差$\|e_k\|_2$非单调减小但经8次迭代后等于零, 见图2.

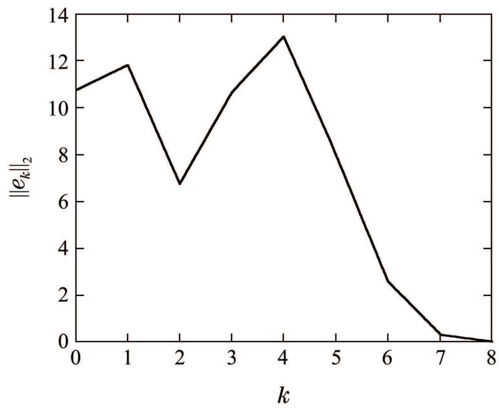

图 2　跟踪误差$\|e_k\|_2$

Fig. 2　Tracking errors $\|e_k\|_2$

5 结论(Conclusions)

本文对线性离散时间系统提出了基于Jacobi方法的迭代学习控制问题, 构建得到Jacobi型迭代控制律, 且说明该控制律是具有鲁棒性的. 利用矩阵

运算, 证明这种控制律能使得系统的输出跟踪误差经有限次迭代后为零, 并说明该Jacobi型迭代控制律经变换后就是文[12]中构建的通常形式迭代学习控制律, 由此得出文[12]中关于迭代收敛性的结论是可改进的, 不但是单调收敛, 而且是单调有限次收敛, 得到了很好的结果, 数值例子也说明如此.

参考文献(References):

[1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robots by learning [J]. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 1(2): 123 – 140.

[2] BIEN Z, HWANG D H, OH S R. A nonlinear iterative learning method for robot path control [J]. *Robotica*, 1991, 9(4): 387 – 392.

[3] SUN M, WANG D. Iterative learning control with initial rectifying action [J]. *Automatica*, 2002, 38(7): 1177 – 1182.

[4] CHEN Y, WEN C, GONG Z, et al. An iterative learning controller with initial state learning [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(2): 371 – 376.

[5] FREEMAN C T, CAI Z L, ROGERS E, et al. Iterative learning control for Multiple point-to-point tracking application [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, 19(3): 590 – 600.

[6] RUAN X E, BIEN Z, WANG Q. Convergence characteristics of proportional-type iterative learning control in the sense of Lebesgue-p norm [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(5): 707 – 714.

[7] XU J X, TAN Y. Robust optmal design and convergence properties analysis of iterative learning control approaches [J]. *Automatica*, 2002, 38(11): 1867 – 1880.

[8] AMANN N, OWENS D H, ROGERS E. Iterative learning control for discrete-time systems with exponential rate of convergence [J]. *IEE Proceedings — Control Theory Applications*, 1996, 143(2): 217 – 224.

[9] OWENS D H. Multivariable norm optimal and parameter optimal iterative learning control: a unified formulation [J]. *International Journal of Control*, 2012, 85(8): 1010 – 1025.

[10] OWENS D H, CHU B, MUTITA S J. Parameter-optimal iterative learning control using polynomial representations of the inverse plant [J]. *International Journal of Control*, 2012, 85(5): 533 – 544.

[11] OWENS D H, CHU B. Modelling of non-minimum phase effects in discrete-time norm optimal iterative learning control [J]. *International Journal of Control*, 2010, 83(10): 2012 – 2027.

[12] STEFAN H, MADHUKAR P. An iterative learning controller with reduced sampling rate for plants with variations of initial states [J]. *International Journal of Control*, 2000, 73(10): 882 – 889.

[13] XU J X, QIAN J. New ILC algorithms with improved convergence for a class of non-affine functions [C] //*Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa: IEEE, 1998, 1: 660 – 665.

[14] XU J X, TAN Y. On the P-type and Newton-type ILC schemes for dynamic systems with non-affine-in-input factors [J]. *Automatica*, 2002, 38(7): 1237 – 1242.

[15] AVRACHENKOV K E. Iterative learning control based on quasi-Newton methods [C] //*Proceeding of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa: IEEE, 1998, 1: 170 – 174.

[16] LIN T, OWENS D H, HATONEN J. Newton method based iterative learning control for discrete non-linear systems [J]. *International Journal of Control*, 2006, 79(10): 1263 – 1276.

[17] 袁慰平, 孙志忠, 吴宏伟, 等. 计算方法与实习 [M]. 第4版. 南京: 东南大学出版社, 2005.
(YUAN Weiping, SUN Zhizhong, WU Hongwei, et al. *An Elementary Numerical Analysis* [M]. 4th Edition. Nanjing: Southeast University Press, 2005.)

作者简介:

傅　勤　(1962–), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为分散控制、非线性系统鲁棒控制、迭代学习控制, E-mail: fuqin925@sina.com.