

基于二维Otsu准则的自适应分数阶微分的图像增强算法

李 博, 谢 巍[†]

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 针对传统的分数阶微分应用于图像增强中会在强化图像边缘的时候忽视了图像的纹理, 或者在保留更多图像纹理的同时弱化了图像边缘等不足, 本文提出一种可以根据像素点的动态梯度来自适应调整分数阶微分阶次的图像增强新方法. 该方法引入改进的二维Otsu准则, 并结合图像的区域特征构造出自适应分数阶微分函数, 进而求出与每一个像素点相对应的分数阶微分阶次. 最后, 实验结果表明该方法比较现有的方法可以更好的提取和增强图像边缘的同时, 保留图像弱纹理和平滑区域, 从而达到更佳图像增强效果.

关键词: 分数阶微分; 自适应算法; 图像增强; 梯度方法; Otsu; 掩模; 阶次

中图分类号: TP391 文献标识码: A

An algorithm for image enhancement based on adaptive fractional differential using two-dimensional Otsu standard

LI Bo¹, XIE Wei^{1†}

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: Because traditional fractional differential methods ignore textures of image when enhancing the edges, or weaken the edges when preserving the textures in the process of image enhancement, we put forward a new image enhancement method which adjusts the fractional differential order according to the dynamic gradient of the pixels. The improved two-dimensional Otsu algorithm is employed in designing the adaptive image enhancement operator. In addition, the optimal differential order of every pixel is determined by the adaptive fractional differential function constructed on the basis of the area-feature of image. Consequently, the image is adaptively enhanced by an adaptive fractional differential mask. Experimental results show that this method has better image enhancement than other current methods by making the edges clearer and the weak textures richer.

Key words: fractional differential; adaptive algorithms; image enhancement; gradient methods; Otsu; masks; order

1 引言(Introduction)

分数阶微分是关于任意阶微分的理论, 它可看成是整数阶微分的推广^[1-2], 而与传统的整数阶微分算子相比较, 分数阶微分用于图像处理可以使图像边缘明显增强、图像纹理细节更加清晰的同时, 非线性保留图像平滑区域信息. 因此, 将分数阶微积分理论应用到图像处理领域^[3-6]吸引了国内外学者进行相关的研究.

传统的分数阶微分在处理图像的边缘、纹理和平滑区域时都是采用同一的微分阶次, 这样容易造成高微分阶次强化图像边缘的时候忽视了图像的弱纹理和平滑区域, 或者低微分阶次保留较多图像弱纹理的同时弱化了图像边缘, 难以达到较好的图像增强效果. 文献[7-11]中提出并论述了数字图像的分数阶掩模和

运算规则以及传统分数阶微分对图像的增强能力和效果, 文献[7]进一步给出了6种近似微分算子的实现方法以及相应的误差和图像增强效果. 由于上述算法中的分数阶微分阶次都是事先给定的常数值, 在图像增强的效果上难以达到最佳. 文献[12-13]进一步提出了主要以图像梯度特征、图像熵等为依据的自适应分数阶图像处理方法, 但是, 由于图像的复杂多变性, 求取这些参数所需选取的图像区域大小难以准确划分, 进而难以获取合适的规则来确定的每个像素点的微分阶次. 综上所述, 分数阶微分阶次的选取是关系到实际图像增强效果的重要因素, 关于图像增强的自适应分数阶微分阶次选取的方法可以做进一步的研究.

本文提出一种以图像中每一个像素点为对象的自适应分数阶微分阶次的选取方法, 该方法从图像的梯

收稿日期: 2014-05-06; 录用日期: 2015-03-04.

[†]通信作者. E-mail: weixie@scut.edu.cn; Tel.: +86 13710696974.

国家自然科学基金面上项目(61174098), 广东省自然科学基金项目(S2013010012537), 广东省省部产学研合作专项项目(2013B090600062)资助.

Supported by National Natural Science Foundation of China (61174098), Natural Science Foundation of Guangdong Province (S2013010012537) and Project on Integration of Industry, Education and Research of Guangdong Province (2013B090600062).

度特征出发, 引入改进的二维Otsu准则来对梯度图像进行分割, 然后结合图像区域特征构造出自适应分数阶微分阶次的函数, 求出与区域中每一个像素点相对应的微分阶次, 进而应用掩模模板来对每一个像素点进行处理, 从而达到较好的图像增强效果. 最后, 本文所提的方法和现有基于自适应分数阶微分的图像增强算法进行了比较, 验证了本文所提方法的有效性.

2 相关理论引导及分析(Relative theory guidance and analysis)

2.1 分数阶微积分的定义(The definition of fractional differential)

如现阶段主要的3种微积分定义表达式: Grünwald-Letnikov(G-L)分数阶微积分定义、Riemann-Liouville(R-L)分数阶微积分定义和Capotu定义^[14-17], 由于G-L定义相较于其他两种定义公式计算复杂度较小, 并且可以用位移加权求和方式来近似表达该函数, 因此较适合应用于信号处理领域.

利用Gamma函数将分数阶阶次从整数推广到分数, G-L定义的 r 阶次分数阶微积分表达式为

$${}_a D_b^r f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-r} \sum_{j=0}^{[(b-a)/h]} (-1)^j \binom{r}{j} f(t-jh), \quad (1)$$

其中: $[\cdot]$ 表示整数部分, $f(t)$ 的变化区间为 $[a, b]$, $\binom{r}{j} = \frac{\Gamma(r+1)}{j! \Gamma(r-j+1)}$ 为二项式系数.

2.2 分数阶微分对信号和图像的作用(The effect of fractional differential on signals and images)

当 $v > 0$ 时, D^v 表示 V 阶微分乘性算子, 对于任意的平方可积的能量信号 $s(t \in L^2(R))$, 它的分数阶微分变换为

$$D_v s(t) = \frac{d^v s(t)}{dt^v}. \quad (2)$$

由信号处理的基本理论可知其Fourier变换为

$$\begin{aligned} D_v s(t) &\stackrel{FT}{\Leftrightarrow} (\hat{D}_v s)(w) = \\ (iw)^v \hat{s}(w) &= |w|^v \exp[i\theta_v(w)] \hat{s}(w) = \\ |w|^v \exp\left[\frac{v\pi i}{2} \text{sgn } w\right] \hat{s}(w), \quad v \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (3)$$

根据公式(3)画出各阶次分数阶微分频率响应图. 由图1可知, 分数阶微分运算对信号的高频部分具有增强作用, 并且随着频率和分数阶微分阶次的增加, 增强的幅度呈非线性急速增长. 同时分数阶微分对信号的低频部分进行了一定程度的非线性的保留. 对于图像而言, 信号的低频部分对应于梯度变化缓慢的图像弱纹理和平滑区域; 信号的高频部分对应于梯度变

化快的图像边缘. 因此, 对图像进行分数阶微分处理可以在增强图像边缘的同时非线性保留图像的弱纹理等细节信息, 从而达到较好的图像增强效果.

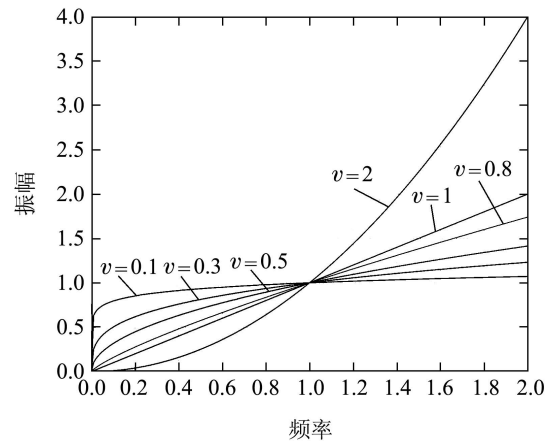


图 1 各阶次分数阶微分频率响应图
Fig. 1 Amplitude-frequency curves of each fractional differential order

2.3 分数阶微分掩模的实现(The realization of fractional differential masks)

由分数阶微积分的G-L定义可知若一元信号 $f(t)$ 的持续期为 $t \in [a, b]$, 将信号持续时间按等分间隔 $h = 1$ 等分, 那么 $n = \lceil \frac{b-a}{h} \rceil = [b-a]$, $f(t)$ 的 v 阶微分的差分表达式:

$$\begin{aligned} \frac{d^v f(t)}{dt^v} &= f(t) + (-v)f(t-1) + \\ &\frac{(-v)(-v+1)}{2} f(t-2) + \dots + \\ &\frac{\Gamma(-v+1)}{m! \Gamma(-v-m+1)} f(t-m). \end{aligned} \quad (4)$$

求取8个方向(与 x 轴方向成 $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ$)的分数阶微分掩模算子, 并叠加得到如图2所示的 5×5 掩模(每项元素除以 $8 - 12v + 4v^2$).

$\frac{v^2-v}{2}$	0	$\frac{v^2-v}{2}$	0	$\frac{v^2-v}{2}$
0	$-v$	v	$-v$	0
$\frac{v^2-v}{2}$	$-v$	1×8	$-v$	$\frac{v^2-v}{2}$
0	$-v$	v	$-v$	0
$\frac{v^2-v}{2}$	0	$\frac{v^2-v}{2}$	0	$\frac{v^2-v}{2}$

图 2 将8个方向偏微分叠加后的掩模
Fig. 2 Mask superposed by partial integrals of 8 directions

3 自适应分数阶微分函数推导过程(The derivation process of adaptive fractional differential function)

3.1 改进的二维Otsu算法求取最优梯度阈值*s* (The optimal threshold *s* is determined by improved Otsu algorithm)

为了有效的对图像进行区域化增强和保留, 本文首先将图像的边缘、弱纹理和平滑区域进行分割. 由于传统的一维Otsu算法^[18]中的直方图不一定存在明显的波峰和波谷, 并是以图像灰度为对象, 所以难以较准确识别图像的边缘和纹理信息. 本文在传统的二维Otsu算法^[19-21]基础上进行改进, 以图3所示的梯度图像为对象, 建立二维梯度直方图, 以边缘和平滑区域的内间方差来求取最优阈值.

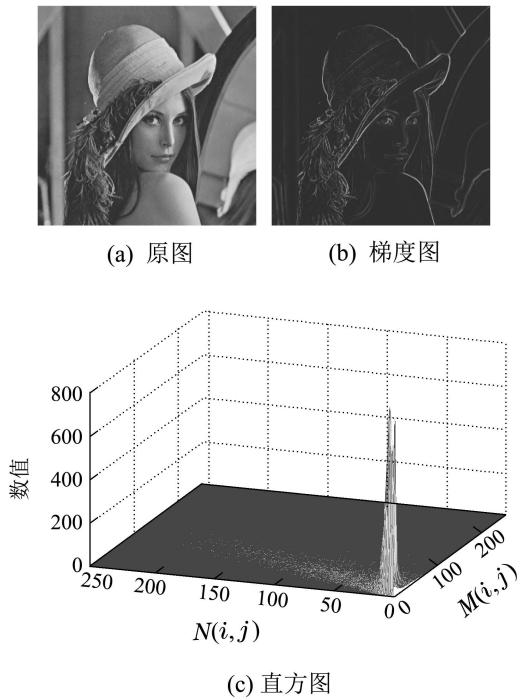


图3 改进二维Oust算法中的梯度图与直方图
Fig. 3 Gradient graph and histogram of Improved two-dimensional Oust algorithm

对于一幅 $A \times B$ 数字图像 $f(i, j)$, 其灰度级为 L , $M(i, j)$ 表示像素点 (i, j) 的8个方向上的梯度的平均值

$$m = \frac{1}{8} (|f(i, j) - f(i-1, j-1)| + |f(i, j) - f(i-1, j)| + |f(i, j) - f(i-1, j+1)| + |f(i, j) - f(i, j-1)| + |f(i, j) - f(i, j+1)| + |f(i, j) - f(i+1, j-1)| + |f(i, j) - f(i+1, j)| + |f(i, j) - f(i+1, j+1)|),$$

$N(i, j)$ 表示像素点 (i, j) 的 3×3 邻域上的8个像素点

的梯度的平均值

$$n = \frac{1}{8} |M(i-1, j-1) + M(i-1, j) + M(i-1, j+1) + M(i, j-1) + M(i, j+1) + M(i+1, j-1) + M(i+1, j) + M(i+1, j+1)|.$$

由此可以构成一个二元组: 像素点的梯度值 m 和它的领域平均梯度值 n (m, n 取整数). 设二元组出现的频数 $R_{m,n}$, 则联合密度为

$$P_{m,n} = \frac{R_{m,n}}{A \times B}, \quad 0 \leq m, n \leq L-1. \quad (5)$$

设阈值为 (s, t) , 那么图像边缘和平滑区域的概率为

$$\begin{cases} w_0 = \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^t P_{m,n}, \\ w_1 = \sum_{m=s+1}^{L-1} \sum_{n=t+1}^{L-1} P_{m,n}, \end{cases} \quad (6)$$

对应的均值矢量

$$\begin{cases} \bar{u}_0 = (u_{0m}, u_{0n})^T = \\ \left(\sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^t m P_{m,n} / w_0, \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^t n P_{m,n} / w_0 \right), \\ \bar{u}_1 = (u_{1m}, u_{1n})^T = \\ \left(\sum_{m=s+1}^{L-1} \sum_{n=t+1}^{L-1} m P_{m,n} / w_1, \sum_{m=s+1}^{L-1} \sum_{n=t+1}^{L-1} n P_{m,n} / w_1 \right). \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} u_m(s, t) = \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^t m P_{m,n}, \\ u_n(s, t) = \sum_{m=0}^s \sum_{n=0}^t n P_{m,n}, \end{cases} \quad (8)$$

二维直方图上总的均值矢量:

$$\bar{u}_T = (u_{Tm}, u_{Tn})^T = \left(\sum_{m=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{L-1} m P_{m,n}, \sum_{m=0}^{L-1} \sum_{n=0}^{L-1} n P_{m,n} \right). \quad (9)$$

假设二维直方图的副对角区域图像的概率忽略不计, 则

$$w_0 + w_1 \approx 1, \quad \bar{u}_T \approx w_0 \bar{u}_0 + w_1 \bar{u}_1. \quad (10)$$

类间方差定义为

$$S_b(s, t) = \sum_{k=0}^1 w_k [(\bar{u}_k - \bar{u}_T)^T (\bar{u}_k - \bar{u}_T)]. \quad (11)$$

使用 S_b 的迹 $\text{tr} S_b$ 作为类间方差的测度

$$\begin{aligned} \text{tr} S_b &= w_0 [(u_{0m} - u_{Tm})^2 + (u_{0n} - u_{Tn})^2] + \\ &w_1 [(u_{1m} - u_{Tm})^2 + (u_{1n} - u_{Tn})^2]. \end{aligned} \quad (12)$$

将式(10)代入式(12), 有

$$\text{tr} S_b \approx \frac{[u_{Tm} w_0(s, t) - u_m(s, t)]^2}{w_0(1 - w_0)} +$$

$$\frac{[u_{Tn}w_0(s,t) - u_n(s,t)]^2}{w_0(1-w_0)}. \quad (13)$$

当 $\text{tr } S_b$ 最大时, (s, t) 为最优阈值, 那么此时的 s 为选取的梯度图像中的最优边缘阈值.

3.2 自适应分数阶微分阶次函数的构造(The construction of adaptive fractional differential function)

当像素点的平均梯度幅值 $M(i, j)$ 大于最优阈值 s 时, 该像素点可被认为是边缘点处, 对该像素点进行较高阶次的分数阶微分处理可以有效增强图像的边缘. 为了达到更好的自适应增强效果, 引入边缘点的微分阶次的阈值 v_1 , 当

$$M(i, j) \geq s \text{ 且 } (M(i, j) - s)/M(i, j) \geq v_1$$

时, 梯度幅值与最优阈值差值较大, 像素点处于较强边缘点, 取 $v = (M(i, j) - s)/M(i, j)$, 此时 $M(i, j)$ 越大, v 越大, 可以达到更佳的边缘增强效果. 当

$$M(i, j) \geq s \text{ 且 } (M(i, j) - s)/M(i, j) < v_1$$

时, 梯度幅值与最优阈值较为接近, 像素点处于较弱边缘点, 此时直接以 $v = v_1$ 来增强图像边缘.

当像素点的平均梯度幅值 $M(i, j)$ 小于最优阈值 s 时, 该像素点可被认为是较弱纹理处, 对该像素点进行较低阶次的分数阶微分处理可以更好的保留图像的弱纹理. 同样引入弱纹理点的微分阶次阈值 v_2 , 当

$$2 < M(i, j) < s \text{ 且 } M(i, j)/s \geq v_2$$

时, 梯度幅值与最优阈值较接近, 像素点处于较强纹理处, 此时取 $v = v_2$ 来保留纹理. 当

$$2 < M(i, j) < s \text{ 且 } M(i, j)/s < v_2$$

时, 梯度幅值小于最优阈值较多, 像素点处于较弱纹理处, 设 $v = M(i, j)/s$, 此时梯度幅值越小, 图像纹理越弱, v 越小, 保留的纹理就越多.

当 $0 \leq M(i, j) \leq 2$ 时, 该像素点被认为是图像平滑区域点. 通过对大量图像的进行仿真实验发现当参数取值为时 $v_1 = 0.7$, $v_2 = 0.3$, 可以达到较好的图像自适应增强效果.

依据上述理论, 自适应分数阶微分阶次的函数设计如下:

$$v = \begin{cases} \frac{M(i, j) - t}{M(i, j)}, & M(i, j) \geq t \text{ \& } \frac{M(i, j) - t}{M(i, j)} \geq v_1, \\ v_1, & M(i, j) \geq t \text{ \& } \frac{M(i, j) - t}{M(i, j)} < v_1, \\ v_2, & 2 < M(i, j) < t \text{ \& } \frac{M(i, j)}{t} \geq v_2, \\ \frac{M(i, j)}{t}, & 2 < M(i, j) < t \text{ \& } \frac{M(i, j)}{t} < v_2, \\ 0, & 0 \leq M(i, j) \leq 2. \end{cases} \quad (14)$$

3.3 本文的分数阶微分阶次确定方法与现有方法的比较(The proposed method compared with the existing methods)

针对多种类型的图像进行比较验证, 在统计意义上和现有的自适应分数阶微分阶次的选取方法分别做了对比和分析, 验证了本方法的有效性. 以4幅图像(头像、人物、蔬菜、景色)举例说明.

文献[12]方法的 v 函数:

$$v = \begin{cases} \frac{M(i, j)}{2 \max M(i, j)} + 0.499, & 90 < M(i, j), \\ \frac{M(i, j)}{3 \max M(i, j)} + 0.666, & M(i, j) \leq 90, \\ 0, & M(i, j) < 2, \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\max M(i, j)$ 表示 $M(i, j)$ 的最大值. 文献[13]方法的 v 函数:

$$v = e^{0.5M(i, j) + 0.25C + 0.25S} - 1.7, \quad (16)$$

其中: $e = 2.71$, C 为图像粗糙度, S 为图像熵, (以整幅图像为对象求参数 C 和 S), 式(16)中的 C , S 和 $M(i, j)$ 是归一化后的取值.

如图4所示, 文献[12]方法的微分阶次取值基本都大于0.7, 那么弱纹理点对应的微分阶次也较大, 在弱纹理的保留效果上会较差. 文献[13]方法微分阶次出现负数, 此时会弱化图像边缘, 难以达到增强边缘的效果. 从本文方法的阶次曲线图中可知, 当梯度幅值 $M(i, j)$ 小于 s 时, 图像弱纹理以不大于0.3的微分阶次进行保留, 并且纹理越弱, 微分阶次越小, 保留的幅度就越大; 当 $M(i, j)$ 大于时, 图像边缘以0.7阶次以上增强, 并且边缘梯度越强, 微分阶次越大, 增强的幅度越大. 从而可以看出本文方法在微分阶次的自适应调节效果上最佳.



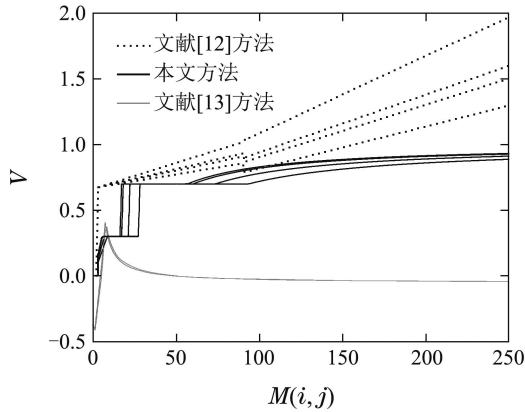


图 4 分数阶微分阶次的自适应情况图

Fig. 4 The graph of adaptive fractional differential order

4 实验与分析(Experiment and analysis)

以图5为例, 本文方法与文献[7-13]方法进行图像增强效果的比较实验, 同时加入直方图均衡与同态滤波方法. 以文献[7]为代表传统的分数阶微分图像增强方法.

如图5所示, 直方图均衡方法有一定的增强效果, 但是灰度区域过度不自然, 图像纹理细节不完整, 对比度增强效果并不理想. 同态滤波图像的灰度被压缩, 图像整体较暗.

经由文献[7]传统的分数阶微分方法处理后的图5(d)和5(e)可以发现, 高阶次分数阶微分可以增强图像边缘, 但是弱纹理和平滑区域被削弱, 甚至出现噪声, 低阶次分数阶微分对边缘增强效果较弱, 弱纹理部分较清晰.

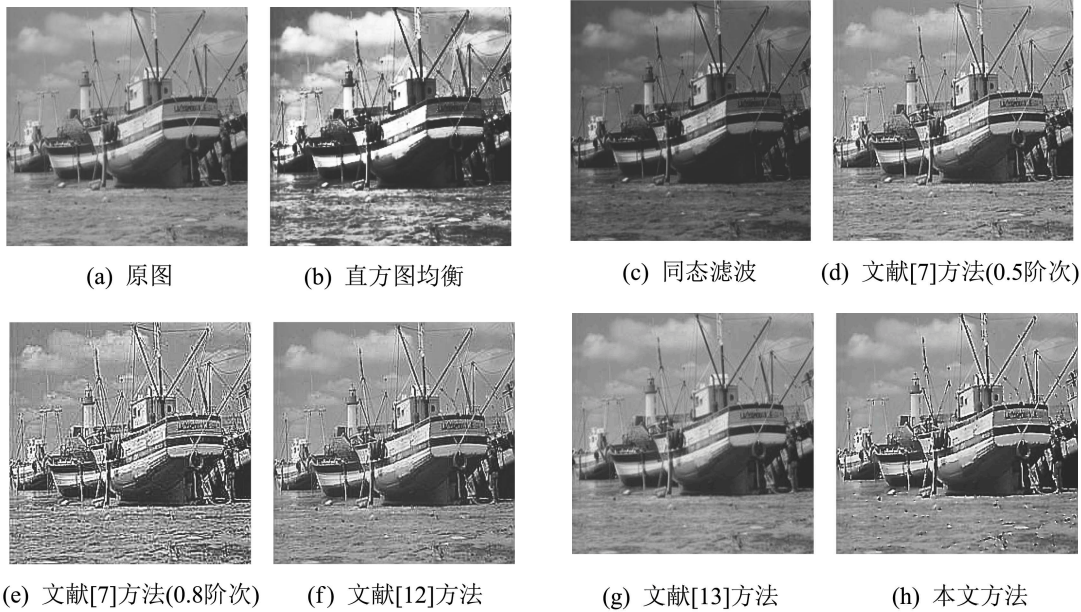
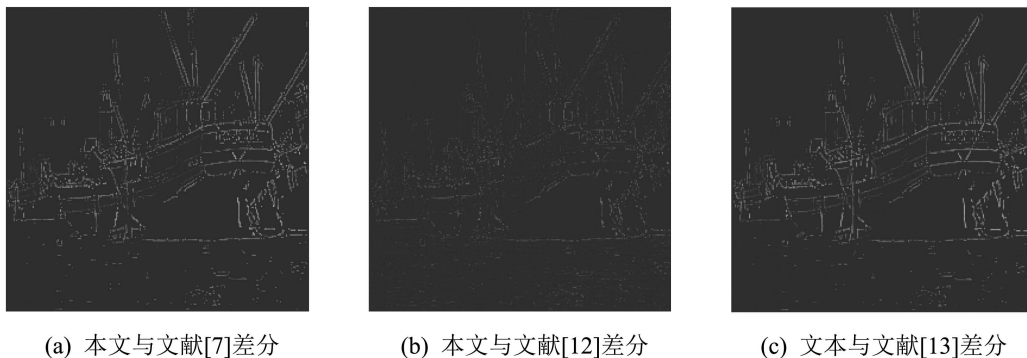


图 5 各个方法处理后的图像

Fig. 5 Images processed by each method

图6为本文增强后图像与文献[7]、文献[12]和文献[13]的方法进行差分后的结果. 图6中的船身的轮廓清晰可见, 由此说明本文方法较准确提取和更大程度上增强了图像的边缘信息.



(a) 本文与文献[7]差分

(b) 本文与文献[12]差分

(c) 本文与文献[13]差分

图 6 本文方法与其他方法的差分图像

Fig. 6 The result of subtracting other methods from the proposed method

其次通过图像数据分析来进行客观评价, 通过二维Otsu准则对各个方法增强后的图像进行计算, 求出相应的图像边缘点比例、纹理平均灰度、边缘点平均梯度和对比度来进行数据比较. 其中设比度定义为 $C_o = C_{\text{processed}}/C_{\text{original}}$, C 为所有 3×3 单位对比度的均值, C_{original} 和 $C_{\text{processed}}$ 分别代表原始和增强后图像的对比度. 边缘点比例表示图像边缘点的数量比例, 平均梯度表示图像边缘被增强的程度, 对比度表征图像清晰度.

由表1可以看出, 随着文献[7]方法的微分阶次的提升, 图像边缘点的平均梯度明显提高, 图像边缘被加强, 但是同时边缘点比例较原图增加较多, 表明阶次较高的传统分数阶微分算法容易使图像中出现与边缘点梯度相近的噪声点, 同时对比度过大, 会导致视觉效果较差. 直方图均衡与同态滤波方法在对比度提高较多, 但是对边缘的加强方面较弱. 本文方法与原图的边缘点比例最为接近, 且平均梯度较高, 所以本文方法在图像增强过程中产生的噪声点少, 同时能较准确的提取图像中的边缘点, 并对其进行有效的增强. 除同态滤波以外, 其他方法的纹理点平均灰度与原文的相差都很小, 从而说明文献[7-13]都能在一定程度上对弱纹理和对平滑区域进行一定的保留. 所有方法的对比度都有提高, 本文方法效果较佳.

表1 图5中各图像的评价参数

Table 1 The evaluation parameters of image in Fig.5

图5中各图像	参 数			
	边缘比例	边缘梯度	纹理灰度	对比度
(a)	0.1865	67.3775	133.0463	1
(b)	0.1604	70.3271	77.8553	1.7653
(c)	0.2418	121.6099	127.0402	1.9906
(d)	0.2052	136.2827	132.9229	2.084
(e)	0.3933	194.3769	132.8951	3.6942
(f)	0.2359	162.5147	133.4406	2.4142
(g)	0.1856	65.9123	132.9357	1.047
(h)	0.1931	184.7997	134.0494	2.2546

5 结论(Conclusions)

基于自适应分数阶微分的图像增强是一个新的发展方向, 利用分数阶能够在提取边缘信息的同时保留图像纹理的特点能够在图像处理领域发挥积极的作用. 本文引入改进的二维Otsu准则将图像进行区域划分后, 再利用由图像区域特征构造的自适应分数阶微分函数, 提出一种以图像中每一个像素点

为对象的自适应分数阶微分阶次的选取方法, 对图像的每个像素点进行不同阶次的微分处理. 最后, 本文所提的方法和现有自适应分数阶微分算法进行了比较, 验证了本文所提的方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] OLDHAM K B, SPAIER J. *The Fractional Calculus* [M]. New York and London: Academic Press, 1974.
- [2] KEMPFLE S. Fractional calculus via functional calculus: theory and applications [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 29(1/2/3/4): 99 – 127.
- [3] 陈庆利, 黄果, 张秀琼, 等. 数字图像的Caputo分数阶微分增强 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2013, 25(4): 519 – 525. (CHEN Qingli, HUANG Guo, ZHANG Xiuqiong, et al. A Caputo fractional differential approach to image enhancement [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2013, 25(4): 519 – 525.)
- [4] DI MARTINO J M, FLORES J L, AYUBI G A, et al. Edge enhancement of color images using a digital micromirror device [J]. *Applied Optics*, 2012, 51(16): 3439 – 3444.
- [5] 郭李, 覃剑. 分数阶微分和小波分解最优用于图像增强 [J]. 小型微型计算机系统, 2012, 33(12): 2680 – 2686. (GUO Li, QIN Jian. Fractional differential and optimal wavelet decomposition used in image enhancement [J]. *Journal of Chinese Computer Systems*, 2012, 33(12): 2680 – 2686.)
- [6] 杜晓昕, 王波, 刘同双. 医学DR图像增强处理方法仿真研究 [J]. 计算机仿真, 2013, 30(6): 423 – 427. (DU Xiaoxin, WANG Bo, LIU Tongshuang. Simulation research on medical dr image enhancement processing algorithm [J]. *Journal of Computer Simulation*, 2013, 30(6): 423 – 427.)
- [7] PU Y F, ZHOU J L, YUAN X. Fractional differential mask: a fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement [J]. *IEEE Transactions on Image processing*, 2010, 19(2): 491 – 511.
- [8] 杨柱中, 周激流, 晏祥玉, 等. 基于分数阶微分的图像增强 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2008, 20(3): 333 – 348. (YANG Zhongzhu, ZHOU Jiliu, YAN Xiangyu, et al. Image enhancement based on fractional differentials [J]. *Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics*, 2008, 20(3): 333 – 348.)
- [9] 蒲亦非. 将分数阶微分演算引入数字图像处理 [J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2007, 39(3): 124 – 132. (PU Yifei. Application of fractional differential approach to digital image processing [J]. *Journal of Sichuan University: Engineering Science Editor*, 2007, 39(3): 124 – 132.)
- [10] 蒲亦非, 王卫星. 数字图像的分数阶微分掩模及其数值运算规则 [J]. 自动化学报, 2007, 33(11): 1128 – 1135. (PU Yifei, WANG Weixing. Image enhancement masks based on fractional differential [J]. *Acta Automatic Sinica*, 2007, 33(11): 1128 – 1135.)
- [11] WANG W X, LI W S, YU X. Fractional algorithms for rock fracture images [J]. *The Imaging Science Journal*, 2012, 60(3): 103 – 111.
- [12] 汪成亮, 兰利彬, 周尚波. 自适应分数阶微分在图像纹理增强中的应用 [J]. 重庆大学学报, 2011, 34(2): 32 – 37. (WANG Chengliang, LAN Libin, ZHOU Shangbo. Adaptive fractional differential and its application to image texture enhancement [J]. *Journal of Chongqing University*, 2011, 34(2): 32 – 37.)
- [13] 黄果, 陈庆利, 蒲亦非, 等. 可变阶次分数阶微分实现图像自适应增强 [J]. 沈阳工业大学学报, 2012, 34(4): 446 – 454.

- (HUANG Guo, CHEN Qingli, PU Yifei, et al. Realization of adaptive image enhancement with variable fractional order differential [J]. *Journal of Shenyang University of Technology*, 2012, 34(4): 446 – 454.)
- [14] CAFAGNA D. Fractional calculus: a mathematical tool from the Past for present engineers [J]. *IEEE Industrial Electronics Magazine*, 2007, 1(2): 35 – 40.
- [15] MILLER K S, ROSS B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* [M]. New York, USA: John Wiley & Sons, 1993.
- [16] LOVE E R. Fractional derivatives of imaginary order [J]. *Journal of the London Mathematical Society*, 1971, 2(2): 241 – 259.
- [17] MCBRIDE A C. *Fractional Calculus* [M]. New York: Halsted Press, 1986.
- [18] OTSU N. A threshold selection method from gray level histogram [J]. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, 1979, 9(1): 62 – 66.
- [19] 刘建庄, 栗文青. 灰度图像的二维Otsu自动阈值分割法 [J]. *自动化学报*, 1993, 19(1): 101 – 105.
(LIU Jianzhuang, LI Wenqing. Automatic thresholding of gray-level pictures using two-dimension Otsu method [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1993, 19(1): 101 – 105.)
- [20] 徐长新, 彭国华. 二维Otsu阈值法的快速算法 [J]. *计算机应用*, 2012, 32(5): 1258 – 1260.
(XU Changxin, PENG Guohua. Fast algorithm for 2D Otsu thresholding algorithm[J]. *Journal of Computer Applications*, 2012, 32(5): 1258 – 1260.)
- [21] 范朝冬, 欧阳红林, 张英杰. 基于小概率策略的Otsu图像分割方法 [J]. *电子与信息学报*, 2013, 35(9): 2081 – 2087.
(FAN Chaodong, OUYANG Honglin, ZHANG Yingjie. Small probability strategy based otsu thresholding method for image segmentation [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(9): 2081 – 2087.)

作者简介:

李 博 (1982–), 男, 博士研究生, 目前研究方向主要为机器视觉、图像处理, E-mail: l.bo15@mail.scut.edu.cn;

谢 巍 (1974–), 男, 教授, 目前研究方向主要为机器视觉、图像处理、鲁棒控制、传感器网络等, E-mail: weixie@scut.edu.cn.